Sistemas de control en tiempo discreto

Sistemas de control en tiempo discreto

SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO

Segunda edición

Katsuhiko Ogata

University of Minnesota

TRADUCCIÓN:
JOSE GUILLERMO ARANDA PÉREZ
Jefe del Area de Control
Universidad La Salle

FRANCISCO RODRÍGUEZ RAMÍREZ
Ingeniero Mecánico Electricista
Facultad de Ingeniería de la UNAM

GABRIEL SÁNCHEZ GARCÍA
Ingeniero Mecánico Electricista
UNAM

REVISOR TÉCNICO:
JOSÉ GUILLERMO ARANDA PÉREZ
Ingeniero Mecánico Electricista
Universidad La Salle

FRANCISCO RODRÍGUEZ RAMÍREZ
Ingeniero Mecánico Electricista
Facultad de Ingeniería de la UNAM

Na. 1033506
Vca. 1574659

Pearson Educación ®

MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA OVIEDO

BIBLIOTECA DE C. JURIDICAS OVIEDO

0 -26M7-

EDICIÓN EN INGLÉS:
Editorial/production supervision: Lynda Griffiths/TKM Productions
Cover design: Karen Salzbach
Production coordinator: David Dickey/Bill Scazzero

OGATA: Sistemas de control en tiempo discreto 2a edición

Traducido del inglés de la obra: DISCRETE TIME CONTROL SYSTEMS

All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice Hall Inc.
Todos los Derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice Hall/Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmited in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying recording or by any information storage retrieval system, without permission in writing form the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio ó método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1996 respecto a la primera edición en español publicada por PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA S.A.
Calle 4 Nº 25-2º piso Fracc. Ind. Alce Blanco,
Naucalpan de Juárez, Edo. de México,
C.P. 53370
ISBN 968-880-539-4
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

Original English Language Edition Published by Prentice Hall Inc.
Copyright © MCMXCV
all Rights Reserved
ISBN 0-13-034281-5

Impreso en México/Printed in Mexico

Contenido

Prólogo ix

Capítulo 1

Introducción a los sistemas de control en tiempo discreto 1

1-1 INTRODUCCIÓN, 1
1-2 SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL, 5
1-3 CUANTIFICACIÓN Y ERRORES DE CUANTIFICACIÓN, 8
1-4 SISTEMAS DE ADQUISICIÓN, CONVERSIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE DATOS, 11
1-5 COMENTARIOS FINALES, 20

Capítulo 2

La transformada *z* 23

2-1 INTRODUCCIÓN, 23
2-2 LA TRANSFORMADA *z*, 24
2-3 TRANSFORMADA *z* DE FUNCIONES ELEMENTALES, 25
2-4 PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA *z*, 31
2-5 LA TRANSFORMADA *z* INVERSA, 37
2-6 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA *z* PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS, 52
2-7 COMENTARIOS FINALES, 54
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 55
PROBLEMAS, 70

Capítulo 3

Análisis en el plano *z* de sistemas de control en tiempo discreto 74

3-1 INTRODUCCIÓN, 74
3-2 MUESTREO MEDIANTE IMPULSOS Y RETENCIÓN DE DATOS, 75
3-3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA *z* MEDIANTE EL MÉTODO DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN, 83
3-4 RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES ORIGINALES A PARTIR DE SEÑALES MUESTREADAS, 90
3-5 LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PULSO, 98
3-6 REALIZACIÓN DE CONTROLADORES DIGITALES Y FILTROS DIGITALES, 122
PROBLEMAS DE EJEMPLOS Y SOLUCIONES, 138
PROBLEMAS, 166

Capítulo 4

Diseño de sistemas de control en tiempo discreto mediante métodos convencionales 173

4-1 INTRODUCCIÓN, 173
4-2 CORRESPONDENCIA ENTRE EL PLANO-*s* Y EL PLANO-*z*, 174
4-3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO EN EL PLANO-*z*, 182
4-4 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS TRANSITORIA Y EN ESTADO PERMANENTE, 193
4-5 DISEÑO BASADO EN EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO EN LAS RAÍCES, 204
4-6 DISEÑO BASADO EN EL MÉTODO DE Y RESPUESTA EN FRECUENCIA, 225
4-7 MÉTODO DE DISEÑO ANALÍTICO, 242
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 257
PROBLEMAS, 288

Capítulo 5

Análisis en el espacio de estado 293

5-1 INTRODUCCIÓN, 293
5-2 REPRESENTACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO, 297
5-3 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO, 302
5-4 MATRIZ DE TRANSFERENCIA PULSO, 310
5-5 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO, 312
5-6 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LIAPUNOV, 321
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 336
PROBLEMAS, 370

Capítulo 6

Ubicación de polos y diseño de observadores 377

6-1 INTRODUCCIÓN, 377
6-2 CONTROLABILIDAD, 379
6-3 OBSERVABILIDAD, 388
6-4 TRANSFORMACIONES ÚTILES EN EL ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS, 396
6-5 DISEÑO VÍA UBICACIÓN DE POLOS, 402
6-6 OBSERVADORES DE ESTADO, 421
6-7 SISTEMAS DE SEGUIMIENTO, 460
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 474
PROBLEMAS, 510

Capítulo 7

Enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de sistemas de control 517

7-1 INTRODUCCIÓN, 517
7-2 LA ECUACIÓN DIOFANTINA, 518
7-3 EJEMPLO ILUSTRATIVO, 522
7-4 ENFOQUE DE ECUACIONES POLINOMIALES PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL, 525
7-5 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE EL ACOPLAMIENTO A UN MODELO, 532
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 540
PROBLEMAS, 562

Capítulo 8

Sistemas de control óptimo cuadráticos 566

8-1 INTRODUCCIÓN, 566
8-2 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO, 569
8-3 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO EN ESTADO ESTACIONARIO, 587
8-4 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO DE UN SISTEMA DE SEGUIMIENTO, 596
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 609
PROBLEMAS, 629

Apéndice A

Análisis vector y matrices 633

A-1 DEFINICIONES, 633
A-2 DETERMINANTES, 633
A-3 INVERSIÓN DE MATRICES, 635

A-4 REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES, 637
A-5 VECTORES Y ANÁLISIS VECTORIAL, 643
A-6 VALORES PROPIOS, VECTORES PROPIOS Y TRANSFORMACIONES DE SIMILITUD, 649
A-7 FORMAS CUADRÁTICAS, 659
A-8 PSEUDOINVERSAS, 663
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 666

Apéndice B

Teoría de la transformada *z* 681

B-1 INTRODUCCIÓN, 681
B-2 TEOREMAS ÚTILES DE LA TRANSFORMADA *z*, 681
B-3 TRANSFORMACIÓN INVERSA *z* Y EL MÉTODO DE LA INTEGRAL DE INVERSIÓN, 686
B-4 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA *z* MODIFICADA, 691
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 697

Apéndice C

Diseño por ubicación de polos cuando la señal de control es un vector 704

C-1 INTRODUCCIÓN, 704
C-2 DISCUSIÓN PRELIMINAR, 704
C-3 DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS, 707
PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES, 718

Bibliografía 730

Índice 735

Prefacio

En este libro se presenta un tratamiento entendible sobre el análisis y diseño de sistemas de control en tiempo discreto. El libro se escribió para utilizarse como texto para los cursos sobre sistemas de control en tiempo discreto o de control digital que se imparten ya sea en el último año de licenciatura o en el primer año de posgrado para estudiantes de ingeniería.

En esta segunda edición, parte del material de la primera edición se ha omitido y se añadió material nuevo a lo largo del libro. La característica más significativa de esta edición es el tratamiento amplio acerca del diseño mediante ubicación de polos con observadores de orden reducido a través del enfoque en el espacio de estados (véase el capítulo 6) y el enfoque de ecuaciones polinomiales (véase el capítulo 7).

En este libro todo el material se presenta de manera que el lector pueda seguir fácilmente todas las discusiones. Se incluye la información necesaria para entender los temas que se presentan (tal como la prueba de teoremas y los pasos que se siguen para la obtención de las ecuaciones importantes relacionadas con el diseño de observadores y la ubicación de polos) con el fin de facilitar la comprensión de éstos.

Los antecedentes teóricos para el diseño de sistemas de control se discuten en forma detallada. Una vez que se han entendido los aspectos teóricos, el lector puede utilizar ventajosamente MATLAB para obtener las soluciones numéricas que involucran varios tipos de operaciones con matrices y vectores. Se supone que el lector está familiarizado con el material que se presenta en el libro del mismo autor *Solving Control Engineering Problems with MATLAB* (editado por Prentice-Hall) o su equivalente.

Los requisitos para el lector son un curso introductorio de sistemas de control, un curso sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y estar familiarizado con MATLAB (si el lector no está familiarizado con MATLAB, éste se puede estudiar paralelamente).

Debido a que este libro está escrito desde el punto de vista de ingeniería, la presentación del material hace énfasis en los conceptos básicos y evita de una manera cuidadosa los desarrollos matemáticos complejos. Todo el texto se ha organizado con el fin de presentar la teoría de control en tiempo discreto en una forma gradual.

El libro está organizado en ocho capítulos y tres apéndices. Está formado como sigue: en el capítulo 1 se da una introducción a los sistemas de control en tiempo discreto. El capítulo 2 presenta la teoría de la transformada z necesaria para el estudio de los sistemas de control en tiempo discreto. En el capítulo 3 se discute el análisis en el plano z de los sistemas en tiempo discreto, en el que se incluye el muestreo mediante impulsos, la retención de datos, el teorema de muestreo, la función de transferencia pulso y los filtros digitales. El capítulo 4 trata el diseño de sistemas de control en tiempo discreto mediante métodos convencionales. Este capítulo incluye el análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado en el plano z, el análisis de las respuestas transitoria y en estado estacionario y el diseño basado en el método del lugar geométrico de las raíces, el método de respuesta en frecuencia y el método analítico.

El capítulo 5 presenta el análisis en el espacio de estados, incluyendo la representación de sistemas en tiempo discreto en dicho espacio, la matriz de transferencia pulso, un método de discretización y el análisis de estabilidad de Liapunov. En el capítulo 6 se discute el diseño por ubicación de polos y el diseño de observadores. Este capítulo contiene discusiones sobre controlabilidad, observabilidad, ubicación de polos, observadores de estados y sistemas de seguimiento. El capítulo 7 trata el enfoque de ecuaciones polinomiales en el diseño de sistemas de control. En este capítulo primero se estudia la ecuación Diofantina y entonces se presenta el enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de sistemas de control. Por último, se diseñan sistemas de control mediante el acoplamiento a un modelo utilizando el enfoque de ecuaciones polinomiales. El capítulo 8 presenta el control óptimo cuadrático. Se estudian los problemas de control óptimo cuadrático tanto de dimensión finita como infinita. Este capítulo concluye con un problema de diseño basado en el control óptimo cuadrático resuelto con MATLAB.

El apéndice A presenta un resumen del análisis con matrices y vectores. En el apéndice B se dan los teoremas útiles de la teoría de la transformada z que no se presentaron en el capítulo 2, el método de la integral de inversión y el método de la transformada z modificada. En el apéndice C se discute el problema de diseño por ubicación de polos cuando la señal de control es una cantidad vectorial.

Los ejemplos se presentan en puntos estratégicos a lo largo del libro para que el lector tenga un mejor entendimiento de los temas que se discuten. Además se proporciona un buen número de problemas resueltos (problemas A) al final de cada capítulo, excepto en el capítulo 1. Estos problemas representan una parte integral del texto. Se sugiere que el lector los estudie cuidadosamente para obtener un entendimiento profundo de los temas discutidos. Además, se presentan muchos problemas propuestos (problemas B) para que se utilicen como tarea o problemas de examen.

La mayoría del material que se presenta en este libro se ha probado en clases en el último curso sobre sistemas de control a nivel licenciatura y el primero a nivel posgrado en la Universidad de Minnesota.

Todo el material de este libro se puede cubrir en dos trimestres. En un curso de un semestre, el instructor tendrá cierta flexibilidad para seleccionar los temas a tratar. En un curso trimestral, es

posible cubrir una buena parte de los primeros seis capítulos. Este libro también puede servir para ingenieros que deseen estudiar la teoría de control en tiempo discreto.

Se debe dar reconocimiento a mis exalumnos, quienes resolvieron todos los problemas resueltos (problemas A) y los problemas propuestos (problemas B) e hicieron un buen número de comentarios constructivos acerca del material contenido en este libro.

Katsuhiko Ogata

Sistemas de control en tiempo discreto

1

Introducción a los sistemas de control en tiempo discreto

1-1 INTRODUCCIÓN

En años recientes se ha incrementado el uso de controladores digitales en sistemas de control. Los controladores digitales se utilizan para alcanzar el desempeño óptimo —por ejemplo, en la forma de productividad máxima, beneficio máximo, costo mínimo o la utilización mínima de energía.

Recientemente, la aplicación de control por computadora ha hecho posible el movimiento "inteligente" en robots industriales, la optimización de economía de combustible en automóviles y el refinamiento en la operación de enseres y máquinas de uso doméstico, tales como hornos de microondas y máquinas de coser, entre otros. La capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las mayores ventajas de los sistemas de control digital.

La tendencia actual de controlar los sistemas dinámicos en forma digital en lugar de analógica, se debe principalmente a la disponibilidad de computadoras digitales de bajo costo y a las ventajas de trabajar con señales digitales en lugar de señales en tiempo continuo.

Tipos de señales. Una señal en tiempo continuo es aquella que se define sobre un intervalo continuo de tiempo. La amplitud puede tener un intervalo continuo de valores o solamente un número finito de valores distintos. El proceso de representar una variable por medio de un conjunto de valores distintos se denomina *cuantificación* y los valores distintos resultantes se denominan *valores cuantificados*. La variable cuantificada sólo cambia en un conjunto finito de valores distintos.

Una señal analógica es una señal definida en un intervalo continuo de tiempo cuya amplitud puede adoptar un intervalo continuo de valores. La figura 1-1*a*) muestra una señal analógica en tiempo continuo y la figura 1-1*b*) una señal cuantificada en tiempo continuo (cuantificada sólo en amplitud).

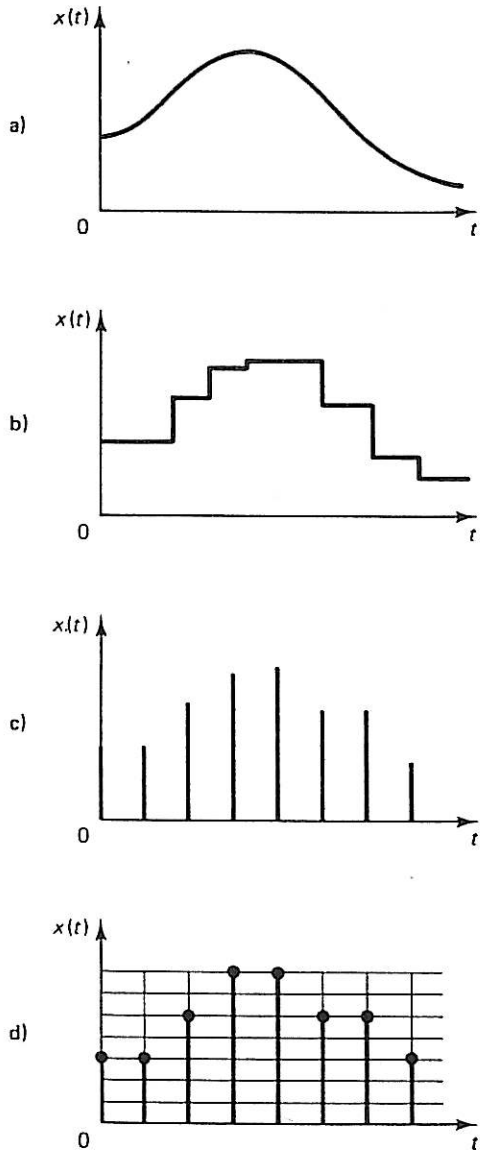


Figura 1-1 *a*) Señal analógica en tiempo continuo; *b*) señal cuantificada en tiempo continuo; *c*) señal de datos muestreados; *d*) señal digital.

Observe que la señal analógica es un caso especial de la señal en tiempo continuo. En la práctica, sin embargo, se emplea con frecuencia la terminología "tiempo continuo" en lugar de "analógica". De esta forma, en la literatura, incluyendo este libro, los términos "señal en tiempo continuo" y "señal analógica" se intercambian de manera frecuente, aunque estrictamente hablando no son del todo sinónimos.

Una señal en tiempo discreto es una señal definida sólo en valores discretos de tiempo (esto es, aquellos en los que la variable independiente t está cuantificada). En una señal en tiempo discreto, si la amplitud puede adoptar valores en un intervalo continuo, entonces la señal se denomina *señal de datos muestreados*. Una señal de datos muestreados se puede generar muestreando una señal analógica en valores discretos de tiempo. Ésta es una señal de pulsos modulada en amplitud. La figura 1-1*c*) muestra una señal de datos muestreados.

Una señal digital es una señal en tiempo discreto con amplitud cuantificada. Dicha señal se puede representar mediante una secuencia de números, por ejemplo, en la forma de números binarios.

(En la práctica, muchas señales digitales se obtienen mediante el muestreo de señales analógicas que después se cuantifican; la cuantificación es lo que permite que estas señales analógicas sean leídas como palabras binarias finitas.) La figura 1-1*d*) muestra una señal digital. Es claro que está cuantificada tanto en amplitud como en tiempo. El uso de un controlador digital requiere de la cuantificación de las señales tanto en amplitud como en tiempo.

El término "señal en tiempo discreto" es más general que el término "señal digital" o que el término "señal de datos muestreados". De hecho, una señal en tiempo discreto se puede referir ya sea a una señal digital o a una señal de datos muestreados. En la práctica, los términos "tiempo discreto" y "digital" a menudo se intercambian. Sin embargo, el término "tiempo discreto" se emplea en el estudio teórico, mientras que el término "digital" se utiliza en conexión con las realizaciones de hardware o software.

En ingeniería de control, el objeto controlado es una planta o proceso. Éste podría ser una planta o proceso físico o un proceso no físico como un proceso económico. La mayoría de las plantas o procesos físicos involucran señales en tiempo continuo; por lo tanto, si los sistemas de control incluyen controladores digitales, se hace necesaria la conversión de señales (de analógico a digital y de digital a analógico). Existen técnicas estándar para realizar dichas conversiones de señales; las que se estudiarán en la sección 1-4.

Hablando con cierta holgura, los términos como sistemas de control en tiempo discreto, sistemas de control de datos muestreados y control digital implican el mismo tipo o tipos muy similares de sistemas de control. Hablando en forma precisa, por supuesto que hay diferencias en estos sistemas. Por ejemplo, en un sistema de control de datos muestreados existen tanto señales en tiempo continuo como en tiempo discreto; las señales en tiempo discreto están moduladas en amplitud por una señal de pulsos. Los sistemas de control digital pueden incluir tanto señales en tiempo continuo como en tiempo discreto; donde las señales en tiempo discreto están codificadas en forma numérica. Los sistemas de control de datos muestreados y los digitales son sistemas de control en tiempo discreto.

Muchos sistemas de control industrial incluyen señales en tiempo continuo, señales de datos muestreados y señales digitales. Por lo tanto, en este libro se utiliza el término "sistemas de control en tiempo discreto" para describir los sistemas de control que incluyen alguna de las formas de señales de datos muestreados (señales de pulsos moduladas en amplitud) y/o señales digitales (señales codificadas en forma numérica).

Sistemas que se tratan en este libro. Los sistemas de control en tiempo discreto que se consideran en este libro son en su mayoría lineales e invariables en el tiempo, aunque ocasionalmente se incluyen en las discusiones sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo. Un sistema lineal es aquel en el que se satisface el principio de superposición. De esta manera, si y_1 es la respuesta del sistema a la entrada x_1, y y_2 es la respuesta a la entrada x_2, entonces el sistema es lineal si y sólo si, para cualesquiera escalares α y β, la respuesta a la entrada $\alpha x_1 + \beta x_2$ es $\alpha y_1 + \beta y_2$.

Un sistema lineal se puede describir mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias lineales. Un sistema lineal e invariable en el tiempo es aquel en el que los coeficientes en la ecuación diferencial o en diferencias no varían con el tiempo, esto es, es aquel sistema cuyas propiedades no cambian con el tiempo.

Sistemas de control en tiempo continuo y en tiempo discreto. Los sistemas de control en tiempo discreto son aquellos sistemas en los cuales una o más de las variables pueden cambiar sólo en valores discretos de tiempo. Estos instantes, los que se denotarán mediante kT o t_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$),

pueden especificar los tiempos en los que se lleva a cabo alguna medición de tipo físico o los tiempos en los que se extraen los datos de la memoria de una computadora digital. El intervalo de tiempo entre estos dos instantes discretos se supone que es lo suficientemente corto de modo que el dato para el tiempo entre éstos se pueda aproximar mediante una interpolación sencilla.

Los sistemas de control en tiempo discreto difieren de los sistemas de control en tiempo continuo en que las señales para los primeros están en la forma de datos muestreados o en la forma digital. Si en el sistema de control está involucrada una computadora digital como un controlador, los datos muestreados se deben convertir a datos digitales.

Los sistemas en tiempo continuo, cuyas señales son continuas en el tiempo, se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales. Los sistemas en tiempo discreto, los cuales involucran señales de datos muestreados o señales digitales y posiblemente señales en tiempo continuo, también se pueden describir mediante ecuaciones en diferencias después de la apropiada discretización de las señales en tiempo continuo.

Proceso de muestreo. El muestreo de señales en tiempo continuo reemplaza la señal en tiempo continuo por una secuencia de valores en puntos discretos de tiempo. El proceso de muestreo se emplea siempre que un sistema de control involucra un controlador digital, puesto que son necesarias una operación de muestreo y una de cuantificación para ingresar datos a ese controlador. También, se da un proceso de muestreo cuando las mediciones necesarias para control se obtienen en forma intermitente. Por ejemplo, en el sistema de seguimiento por radar, a medida que la antena del radar gira, la información acerca del azimut y de la elevación se obtiene una vez por cada vuelta que da la antena. De este modo, la operación de rastreo del radar produce un dato muestreado. En otro ejemplo, el proceso de muestreo se necesita cuando un controlador o computádora de gran tamaño se comparte en tiempo entre varias plantas con el fin de reducir los costos. En este caso se envía periódicamente una señal de control para cada una de las plantas y de esta manera la señal se convierte en una de datos muestreados.

El proceso de muestreo es seguido por un proceso de cuantificación. En el proceso de cuantificación, la amplitud analógica muestreada se reemplaza por una amplitud digital (representada mediante un número binario). Entonces la señal digital se procesa por medio de la computadora. La salida de la computadora es una señal muestreada que se alimenta a un circuito de retención. La salida del circuito de retención es una señal en tiempo continuo que se alimenta al actuador. En la sección 1-4 se presentarán los detalles para dichos métodos de procesamiento de señales en el controlador digital.

El término "discretización" en lugar de "muestreo" se utiliza con frecuencia en el análisis de sistemas con entradas y salidas múltiples, aunque ambos significan básicamente lo mismo.

Es importante observar que de manera ocasional la operación de muestreo o discretización es enteramente ficticia y se ha introducido sólo para simplificar el análisis de los sistemas de control que en realidad sólo contienen señales en tiempo continuo. De hecho, a menudo se utiliza un modelo en tiempo discreto apropiado para un sistema en tiempo continuo. Un ejemplo es la simulación en una computadora digital de un sistema en tiempo continuo. Dicho sistema simulado en una computadora digital se puede analizar para obtener los parámetros que optimizan un índice de desempeño dado.

La mayor parte del material que se presenta en este libro trata con sistemas de control que se pueden modelar como sistemas en tiempo discreto, lineales e invariables en el tiempo. Es importante mencionar que muchos sistemas de control digital están basados en técnicas de diseño en tiempo continuo. Debido a que se ha acumulado una gran riqueza en lo que a experiencia se refiere en el

diseño de controladores en tiempo continuo, el conocimiento pleno de estas técnicas es muy valioso en el diseño de sistemas de control en tiempo discreto.

1-2 SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL

En la figura 1-2 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital que presenta la configuración del esquema de control básico. En el sistema se incluye el control realimentado y el prealimentado. En el diseño de dicho sistema de control, se deberá observar que la "bondad" del sistema de control depende de circunstancias individuales. Se requiere elegir un índice de desempeño apropiado para un caso dado y diseñar un controlador de modo que optimice el índice de desempeño elegido.

Formas de las señales en un sistema de control digital. La figura 1-3 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital. Los elementos básicos del sistema se muestran mediante los bloques. La operación del controlador se maneja por el reloj. En dicho sistema de control digital, en algunos puntos del sistema pasan señales de amplitud variable ya sea en tiempo continuo o en tiempo discreto, mientras que en otros pasan señales codificadas en forma numérica, como se muestra en la figura.

La salida de la planta es una señal en tiempo continuo. La señal de error se convierte a forma digital mediante el circuito de muestreo y retención y el convertidor analógico-digital. La conversión se hace en el tiempo de muestreo. La computadora digital procesa las secuencias de números

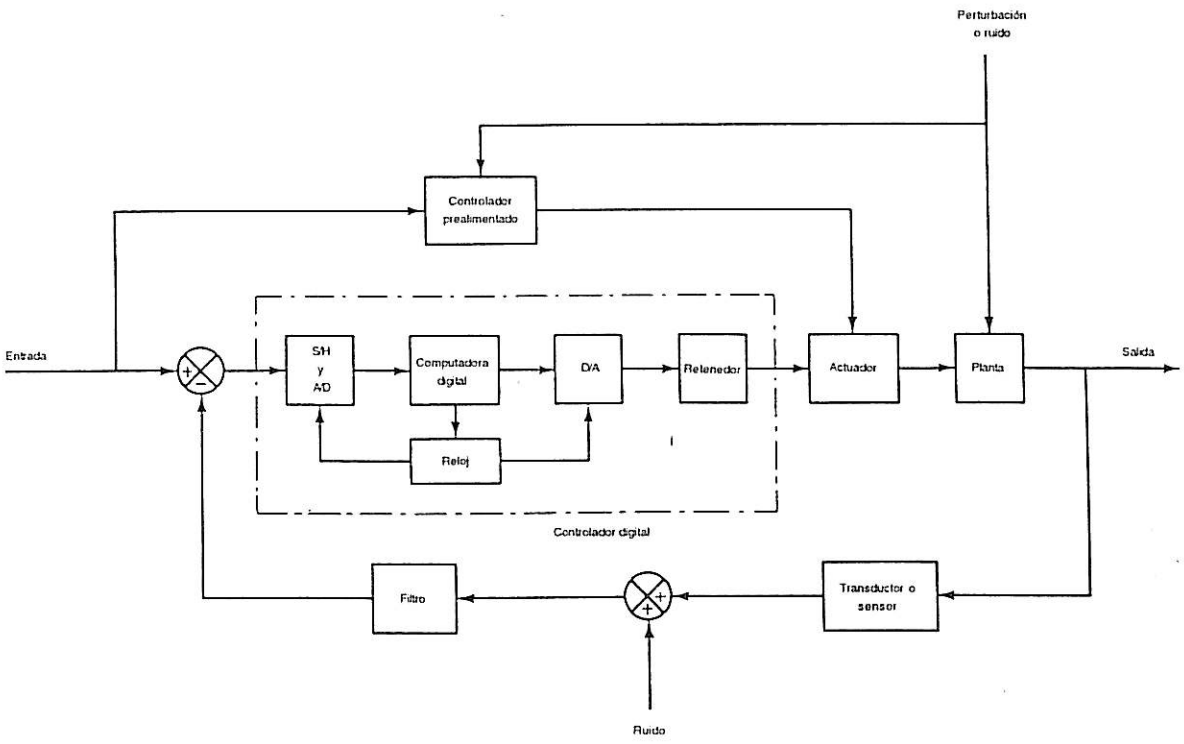


Figura 1-2 Diagrama de bloques de un sistema de control digital.

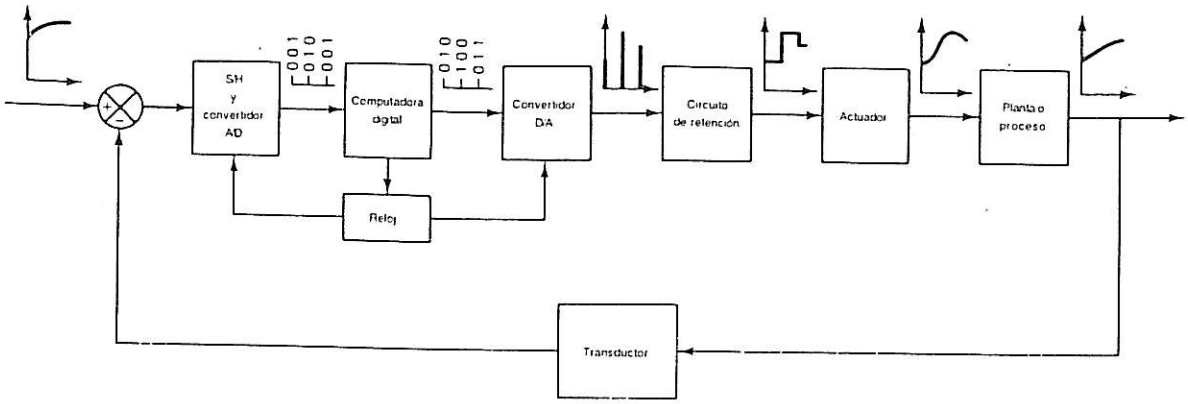


Figura 1-3 Diagrama de bloques de un sistema de control digital que muestra las señales en forma binaria o gráfica.

por medio de un algoritmo y produce nuevas secuencias de números. En cada instante de muestreo se debe convertir un número codificado (en general un número binario que consiste en ocho o más dígitos binarios) en una señal física de control, la cual normalmente es una señal en tiempo continuo o analógica. El convertidor digital-analógico y el circuito de retención convierten la secuencia de números en código numérico a una señal continua por secciones. El reloj en tiempo real de la computadora sincroniza los eventos. La salida del circuito de retención, una señal en tiempo continuo, se alimenta a la planta, ya sea de manera directa o a través de un actuador, para controlar su dinámica.

La operación que transforma las señales en tiempo continuo en datos en tiempo discreto se denomina *muestreo* o *discretización*. La operación inversa, que transforma datos en tiempo discreto en una señal en tiempo continuo, se conoce como *retención de datos*; ésta realiza la reconstrucción de la señal en tiempo continuo a partir de la secuencia de datos en tiempo discreto. Esto por lo regular se logra al utilizar alguna de las muchas técnicas de extrapolación. En la mayoría de los casos esto se realiza manteniendo constante la señal entre los instantes de muestreo sucesivos. (Dichas técnicas de extrapolación se estudiarán en la sección 1-4.)

El circuito de muestreo y retención (S/H, del inglés Sample-and-Hold) y el convertidor analógico-digital (A/D) convierten la señal en tiempo continuo en una secuencia de palabras binarias codificadas numéricamente. Dicho proceso de conversión A/D se conoce como *codificación*. La combinación del circuito S/H y el convertidor analógico-digital se puede visualizar como un interruptor que cierra instantáneamente en cada intervalo de tiempo T y genera una secuencia de números en código numérico. La computadora digital procesa dichos números en código numérico y genera una secuencia deseada de números en código numérico. El proceso de conversión digital-analógico (D/A) se denomina *decodificación*.

Definición de términos. Antes de estudiar los sistemas de control digital en detalle, se necesitan definir algunos de los términos que aparecen en el diagrama de bloques de la figura 1-3.

Muestreador y retenedor (S/H). "Muestreador y retenedor" es un término general que se utiliza para un amplificador de muestreo y retención. Este término describe un circuito que recibe como entrada una señal analógica y mantiene dicha señal en un valor constante durante un tiempo específico. Normalmente la señal es eléctrica, pero son posibles otras formas de ésta, tales como óptica o mecánica.

Convertidor analógico-digital (A/D). Un convertidor analógico-digital, también conocido como codificador, es un dispositivo que convierte una señal analógica en una señal digital, usualmente una señal codificada numéricamente. Dicho convertidor se necesita como una interfaz entre un componente analógico y uno digital. Con frecuencia un circuito de muestreo y retención es una parte integral de un convertidor A/D disponible comercialmente. La conversión de una señal analógica en la señal digital correspondiente (número binario) es una aproximación, ya que la señal analógica puede adoptar un número infinito de valores, mientras que la variedad de números diferentes que se pueden formar mediante un conjunto finito de dígitos está limitada. Este proceso de aproximación se denomina *cuantificación*. (En la sección 1-3 se presenta más información acerca de la cuantificación.)

Convertidor digital-analógico (D/A). Un convertidor digital-analógico, también denominado decodificador, es un dispositivo que convierte una señal digital (datos codificados numéricamente) en una señal analógica. Dicho convertidor es necesario como una interfaz entre un componente digital y uno analógico.

Planta o proceso. Una planta es cualquier objeto físico a ser controlado. Como ejemplos se tienen un horno, un reactor químico y un conjunto de partes de maquinaria que funcionan de manera conjunta para llevar a cabo una operación particular, tal como un sistema de seguimiento o una nave espacial.

En general, un proceso se define como una operación progresiva o un desarrollo marcado mediante una serie de cambios graduales que suceden uno a otro de una manera relativamente fija y conducen hacia un resultado o fin determinado. En este libro se denomina proceso a cualquier operación a ser controlada. Como ejemplos se pueden citar procesos químicos, económicos y biológicos.

La parte más difícil en el diseño de sistemas de control puede situarse en el modelado preciso de una planta o proceso físico. Existen muchos enfoques para obtener el modelo de una planta o proceso pero, aun así, pueden existir dificultades, debido principalmente a la falta de precisión en la dinámica del proceso y a la pobre definición de parámetros aleatorios en muchas plantas o procesos físicos. Por tanto, en el diseño de un controlador digital, es necesario reconocer el hecho de que el modelo matemático de una planta o proceso en muchos casos es sólo una aproximación del proceso físico. Existen algunas excepciones en el modelado de sistemas electromecánicos y sistemas hidraúlico-mecánicos (hidromecánicos), puesto que éstos se pueden modelar de manera precisa. Por ejemplo, el modelado de un sistema de un brazo manipulador (robot) se puede llevar a cabo con una gran precisión.

Transductor. Un transductor es un dispositivo que convierte una señal de entrada en una señal de salida de naturaleza diferente a la de entrada, tal como los dispositivos que convierten una señal de presión en una salida de voltaje. En general, la señal de salida depende de la historia de la entrada.

Los transductores se pueden clasificar como transductores analógicos, transductores de datos muestreados o transductores digitales. Un transductor analógico es aquel en que las señales de entrada y salida son funciones continuas del tiempo. Las magnitudes de estas señales pueden tomar cualquier valor dentro de las limitaciones físicas del sistema. Un transductor de datos muestreados es aquel en el que las señales de entrada y salida se presentan en valores discretos de tiempo (normalmente periódicos), pero las magnitudes de las señales, como en el caso de los transductores analógicos, no están cuantificadas. Un transductor digital es aquel en el que las señales de entrada y salida se presentan sólo en valores discretos de tiempo y las magnitudes de las señales están cuantificadas (esto es, solamente pueden adoptar ciertos valores discretos).

Tipos de operaciones de muestreo. Como se estableció antes, una señal cuya variable independiente t es discreta se denomina señal en tiempo discreto. Una operación de muestreo es básicamente la transformación de una señal en tiempo continuo en una en tiempo discreto.

Existen diferentes tipos de operaciones de muestreo de importancia práctica:

1. *Muestreo periódico.* En este caso, los instantes de muestreo están espaciados de manera uniforme, o $t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). El muestreo periódico es el tipo más convencional de las operaciones de muestreo.
2. *Muestreo de orden múltiple.* El patrón de los t_k se repite periódicamente; esto es, $t_{k+r} - t_k$ es constante para todo k.
3. *Muestreo de tasa múltiple.* En un sistema de control que tiene lazos múltiples, la mayor constante de tiempo involucrada en un lazo puede diferir en gran medida de las de los otros lazos. Por lo tanto, puede ser aconsejable muestrear lentamente en un lazo que involucre una constante de tiempo grande, mientras que en un lazo que involucre constantes de tiempo pequeñas la tasa de muestreo debe ser más rápida. De esta manera, un sistema de control digital puede tener diferentes períodos de muestreo en diferentes trayectorias de realimentación o bien tasas de muestreo múltiples.
4. *Muestreo aleatorio.* En este caso, los instantes de muestreo son aleatorios, o t_k es una variable aleatoria.

En este libro se tratará sólo el caso donde el muestreo es periódico.

1-3 CUANTIFICACIÓN Y ERRORES DE CUANTIFICACIÓN

Las principales funciones involucradas en la conversión analógico-digital son el muestreo, la cuantificación de la amplitud y la codificación. Cuando el valor de cualquier muestra cae entre dos estados de salida adyacentes "permitidos", se debe leer como el estado de salida permitido más cercano al valor real de la señal. El proceso de representación de una señal continua o analógica mediante un número finito de estados discretos se denomina *cuantificación de la amplitud.* Esto es, "cuantificación" significa la transformación de una señal continua o analógica en un conjunto de estados discretos. (Observe que la cuantificación se presenta cuando una cantidad física se representa en forma numérica.)

El estado de salida de cualquier muestra cuantificada se describe entonces mediante un código numérico. El proceso de representar el valor de una muestra mediante un código numérico (tal como el código binario) se denomina *codificación.* De este modo, la codificación es el proceso de asignación de una palabra o código digital a cada uno de los estados discretos. El período de muestreo y los niveles de cuantificación afectan el desempeño de los sistemas de control digital. De manera que éstos se deben determinar cuidadosamente.

Cuantificación. El sistema numérico estándar utilizado para el procesamiento de señales digitales es el sistema binario. En este sistema numérico el grupo de códigos consisten en n pulsos cada uno de los cuales indica ya sea "encendido" (1) o "apagado" (0). En el caso de la cuantificación, los n pulsos "encendido-apagado" pueden representar 2^n niveles de amplitud o estados de salida.

El nivel de cuantificación Q se define como el intervalo entre dos puntos adyacentes de decisión y está dado mediante

$$Q = \frac{\text{FSR}}{2^n}$$

donde FSR es el intervalo a escala completa. Observe que el bit que está más a la izquierda del código binario natural tiene el mayor peso (un medio de la escala completa) y se le conoce como el bit más significativo (MSB). El bit que está más a la derecha tiene el menor peso ($1/2^n$ veces la escala completa) y se le conoce como el bit menos significativo (LSB). De esta manera,

$$\text{LSB} = \frac{\text{FSR}}{2^n}$$

El bit menos significativo es el nivel de cuantificación Q.

Error de cuantificación. Puesto que el número de bits en la palabra digital es finito, la conversión A/D da como resultado una resolución finita. Esto es, la salida digital puede solamente adoptar un número finito de niveles, y por lo tanto un número analógico se debe redondear al nivel digital más cercano. Por consiguiente, toda conversión A/D involucra un error de cuantificación. Dicho error de cuantificación varía entre 0 y $\pm\frac{1}{2}Q$. Este error depende de la fineza del nivel de cuantificación y se puede hacer tan pequeño como se desee haciendo más pequeño el nivel de cuantificación (esto es, al incrementar el número n de bits). En la práctica, existe un máximo para el número n de bits, y de este modo siempre existe algún error debido a la cuantificación. La incertidumbre presente en el proceso de cuantificación se conoce como *ruido de cuantificación.*

Para determinar el tamaño deseado del nivel de cuantificación (o número de estados de salida) en un sistema de control digital dado, el ingeniero debe tener un buen entendimiento entre el tamaño del nivel de cuantificación y el error resultante. La varianza del ruido de cuantificación es una medida del error de cuantificación, puesto que ésta es proporcional a la potencia promedio asociada con el ruido.

En la figura 1-4*a*) se muestra un diagrama de bloques de un cuantificador junto con sus características entrada-salida. Para una entrada analógica $x(t)$, la salida $y(t)$ toma sólo un número finito de niveles, los cuales son múltiplos enteros del nivel de cuantificación Q.

En el análisis numérico, el error resultante de despreciar los dígitos remanentes se denomina *error de redondeo.* Debido a que el proceso de cuantificación es un proceso de aproximación en el que la cantidad analógica se aproxima mediante un número digital finito, el error de cuantificación es un error de redondeo. Es claro que, mientras más fino sea el nivel de cuantificación, más pequeño será el error de redondeo.

En la figura 1-4*b*) se muestra una entrada analógica $x(t)$ y la salida discreta $y(t)$, la cual está en la forma de una función escalonada. El error de cuantificación $e(t)$ es la diferencia entre la señal de entrada y la salida cuantificada, o

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

Observe que la magnitud del error cuantificado es

$$0 \leq |e(t)| \leq \tfrac{1}{2}Q$$

Para un nivel de cuantificación pequeño Q, la naturaleza del error de cuantificación es similar a la del ruido aleatorio. Y, en efecto, el proceso de cuantificación actúa como una fuente de ruido aleatorio. A continuación se obtendrá la varianza del ruido de cuantificación. Dicha varianza se puede obtener en términos del nivel de cuantificación Q.

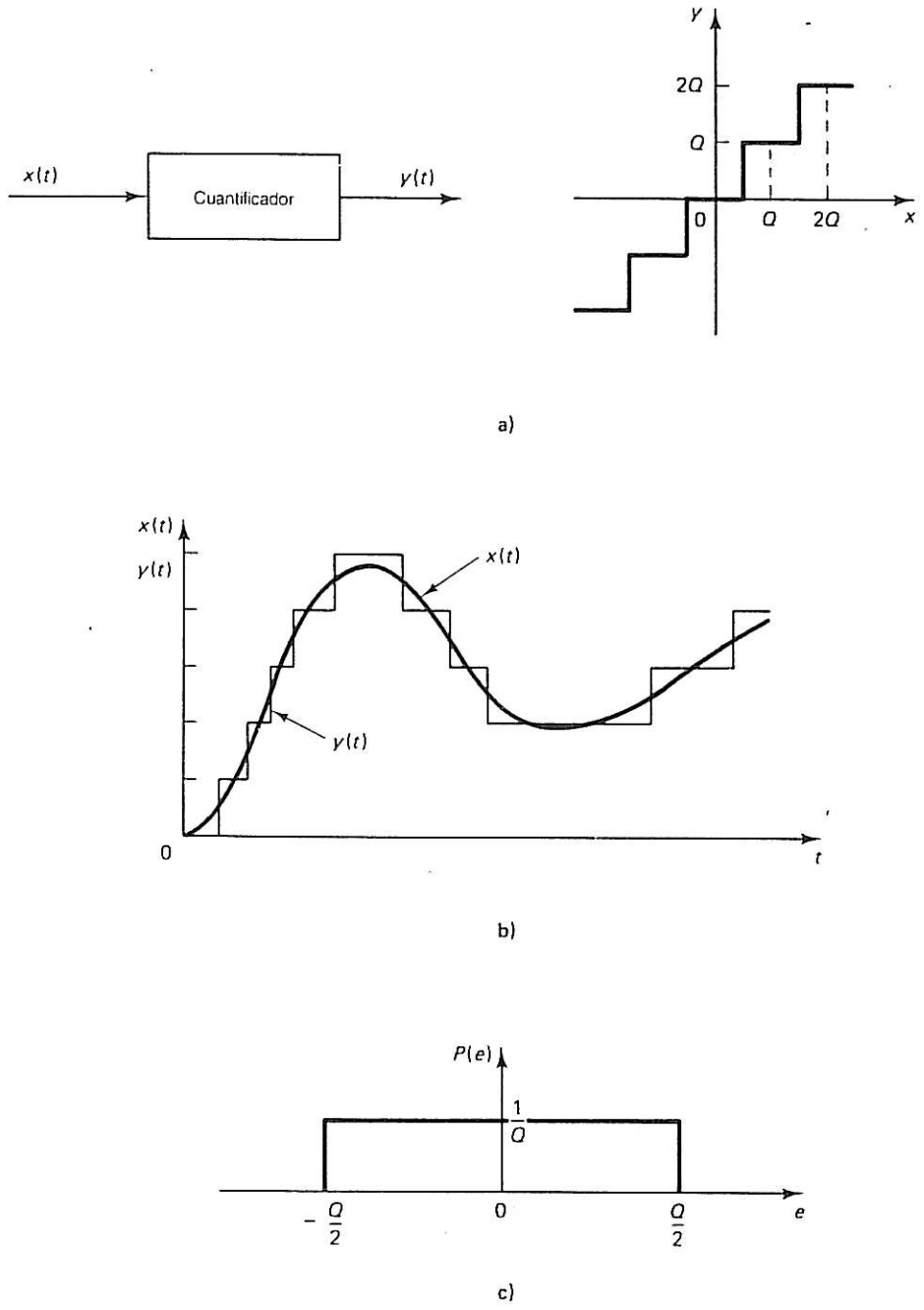


Figura 1-4 *a*) Diagrama de bloques de un cuantificador y sus características entrada-salida; *b*) entrada analógica $x(t)$ y salida discreta $y(t)$; *c*) distribución de probabilidad $P(e)$ del error de cuantificación $e(t)$.

Suponga que el nivel de cuantificación Q es pequeño y que también el error de cuantificación $e(t)$ se distribuye uniformemente entre $-\frac{1}{2}Q$ y $\frac{1}{2}Q$ y que este error actúa como un ruido blanco. [Esto es de manera obvia una suposición un tanto áspera. Sin embargo, debido a que la señal de error de cuantificación $e(t)$ es de una amplitud pequeña, esta suposición podría ser aceptable como una aproximación de primer orden.] La distribución de probabilidad $P(e)$ de la señal $e(t)$ puede graficarse

como se muestra en la figura 1-4*c*). El valor promedio de $e(t)$ es cero, o $e(t) = 0$. Entonces la varianza σ^2 del ruido de cuantificación es

$$\sigma^2 = E[e(t) - \overline{e(t)}]^2 = \frac{1}{Q}\int_{-Q/2}^{Q/2} \xi^2 \, d\xi = \frac{Q^2}{12}$$

De esta manera, si el nivel de cuantificación Q es pequeño comparado con la amplitud promedio de la señal de entrada, entonces la varianza del ruido de cuantificación es un doceavo del cuadrado del nivel de cuantificación.

1-4 SISTEMAS DE ADQUISICIÓN, CONVERSIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE DATOS

Con el crecimiento rápido en el uso de computadoras digitales para ejecutar las acciones de un control digital, tanto los sistemas de adquisición de datos como los de distribución se han convertido en una parte importante de todo sistema de control.

La conversión de señales que tiene lugar en el sistema de control digital involucra las siguientes operaciones:

1. Multiplexación y demultiplexación
2. Muestreo y retención
3. Conversión analógico-digital (cuantificación y codificación)
4. Conversión digital-analógico (decodificación)

En la figura 1-5*a*) se muestra el diagrama de bloques de un sistema de adquisición de datos y en la figura 1-5*b*) se muestra un diagrama de bloques de un sistema de distribución de datos.

En el sistema de adquisición de datos, la entrada al sistema es una variable física tal como posición, velocidad, aceleración, temperatura o presión. Dichas variables físicas primero se convierten en una señal eléctrica (una señal de voltaje o corriente) mediante un transductor apropiado. Una

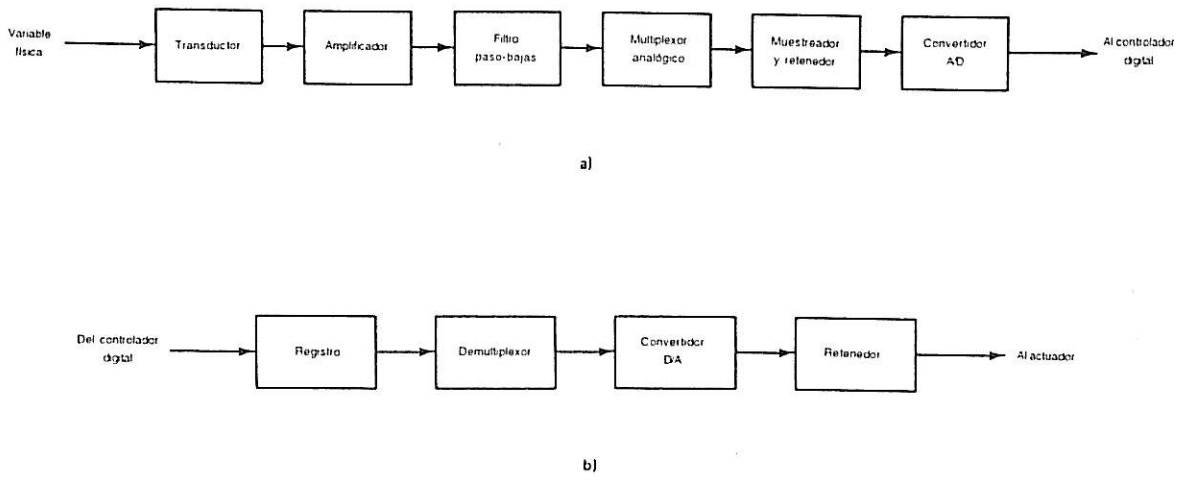


Figura 1-5 *a*) Diagrama de bloques de un sistema de adquisición de datos; *b*) diagrama de bloques de un sistema de distribución de datos.

vez que la variable física se convierte en una señal de voltaje o corriente, el resto del proceso de adquisición de datos se hace por medios electrónicos.

En la figura 1-5*a*) el amplificador que sigue del transductor (frecuentemente un amplificador operacional) ejecuta una o más de las siguientes funciones: amplificar el voltaje de salida del transductor; convertir la señal de corriente en una de voltaje; o aislar la señal. El filtro paso-bajas que sigue al amplificador atenúa las componentes de alta frecuencia de la señal, tales como señales de ruido. (Observe que los ruidos de tipo electrónico son de naturaleza aleatoria y se pueden reducir mediante filtros paso-bajas. Sin embargo, dichos ruidos de tipo electrónico, como la interferencia de la línea de alimentación, generalmente son periódicos y se pueden reducir por medio de filtros de muesca.) La salida del filtro paso-bajas es una señal analógica. Esta señal se alimenta a un multiplexor analógico. La salida del multiplexor se alimenta al circuito de muestreo y retención, cuya salida, a su vez, se alimenta al convertidor analógico-digital. La salida del convertidor es la señal en forma digital; ésta se alimenta al controlador digital.

El proceso inverso al de adquisición de datos es el de distribución de datos. Como se muestra en la figura 1-5*b*), un sistema de distribución de datos consiste en registros, un demultiplexor, convertidores digital-analógico y circuitos de retención. Este sistema convierte la señal en forma digital (números binarios) en otra en forma analógica. La salida del convertidor D/A se alimenta al circuito de retención. La salida del circuito de retención se alimenta al actuador analógico, el cual, a su vez, controla directamente la planta que se está considerando.

A continuación, se estudiará cada componente individual involucrado en el sistema de procesamiento de la señal.

Multiplexor analógico. Un convertidor analógico-digital es el componente más costoso en un sistema de adquisición de datos. El multiplexor analógico es un dispositivo que lleva a cabo la función de compartir en tiempo un convertidor A/D entre muchos canales analógicos. El procesamiento de varios canales con un controlador digital es posible debido a que el ancho de cada uno de los pulsos que representa a la señal de entrada es muy angosto, de manera que el espacio vacío durante cada período de muestreo se puede utilizar para otras señales. Si se van a procesar muchas señales por un solo controlador digital, entonces estas señales de entrada se deben alimentar al controlador a través de un multiplexor.

En la figura 1-6 se muestra un diagrama de un multiplexor analógico. El multiplexor analógico

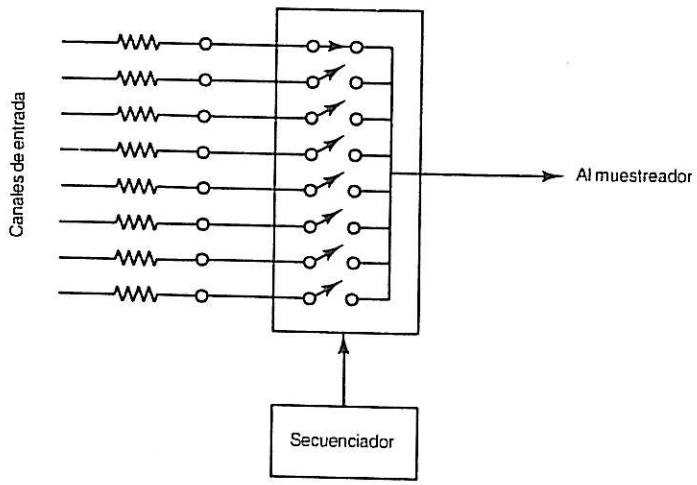


Figura 1-6 Diagrama esquemático de un multiplexor analógico.

es un interruptor múltiple (normalmente un interruptor electrónico) que conmuta secuencialmente entre muchos canales de entrada analógicos en alguna forma preestablecida. El número de canales, en muchas instancias, es 4, 8 o 16. En un instante dado, sólo un interruptor está en la posición de "encendido". Cuando el interruptor está encendido en un canal de entrada dado, la señal de entrada se conecta a la salida del multiplexor durante un tiempo específico. Durante el tiempo de conexión, el circuito de muestreo y retención muestrea a la señal de voltaje (señal analógica) y retiene su valor, mientras que el convertidor analógico-digital convierte el valor analógico en datos digitales (números binarios). Cada uno de los canales se lee en orden secuencial y los valores correspondientes se convierten en datos digitales en la misma secuencia.

Demultiplexor. El demultiplexor, el cual está sincronizado con la señal de muestreo de entrada, separa los datos digitales de la salida compuesta, del controlador digital en los canales originales. Cada uno de los canales está conectado a un convertidor D/A para producir la señal de salida analógica para ese canal.

Circuitos de muestreo y retención. Un muestreador en un sistema digital convierte una señal analógica en un tren de pulsos de amplitud modulada. El circuito de retención mantiene el valor del pulso de la señal muestreada durante un tiempo específico. El muestreador y el retenedor son necesarios en el convertidor A/D para producir un número que represente de manera precisa la señal de entrada en el instante de muestreo. Existen de manera comercial circuitos de muestreo y retención en una sola unidad, conocidos como muestreador y retenedor (S/H). Sin embargo, matemáticamente, las operaciones de muestreo y la de retención se modelan por separado (véase la sección 3-2). Es una práctica común utilizar un solo convertidor analógico-digital y multiplexar muchas entradas analógicas muestreadas en éste.

En la práctica, la duración del muestreo es muy corta comparada con el período de muestreo T. Cuando la duración del muestreo es despreciable, el muestreador se puede considerar como un "muestreador ideal". Un muestreador ideal lo habilita a uno para obtener un modelo matemático relativamente simple de un muestreador y retenedor. (Dicho modelo matemático se discutirá con detalle en la sección 3-2.)

En la figura 1-7 se muestra un diagrama simplificado para el muestreador y retenedor. El circuito S/H es un circuito analógico (simplemente un dispositivo de memoria de voltaje) en el que se adquiere una entrada de voltaje y entonces se almacena en un capacitor de alta calidad con características de fuga y absorción dieléctrica bajas.

En la figura 1-7 el interruptor electrónico se conecta al capacitor de retención. El amplificador operacional 1 es un amplificador de aislamiento de entrada con una impedancia de entrada alta. El amplificador operacional 2 es el amplificador de salida; éste aísla el voltaje en el capacitor de retención.

Existen dos modos de operación para el circuito de muestreo y retención: el modo de seguimiento y el de retención. Cuando el interruptor está cerrado (esto es, cuando la señal de entrada está conectada), el modo de operación es el de seguimiento. La carga en el capacitor en el circuito sigue al voltaje de entrada. Cuando el interruptor está abierto (la señal de entrada está desconectada), el modo de operación es el de retención y el voltaje del capacitor se mantiene constante por un tiempo específico. La figura 1-8 muestra los modos de seguimiento y de retención.

Observe que, de manera práctica, la conmutación del modo de seguimiento al de retención no es instantáneo. Si se da el comando de retención mientras el circuito está en el modo de seguimiento, entonces el circuito permanecerá en el modo de seguimiento por un momento antes de reaccionar ante

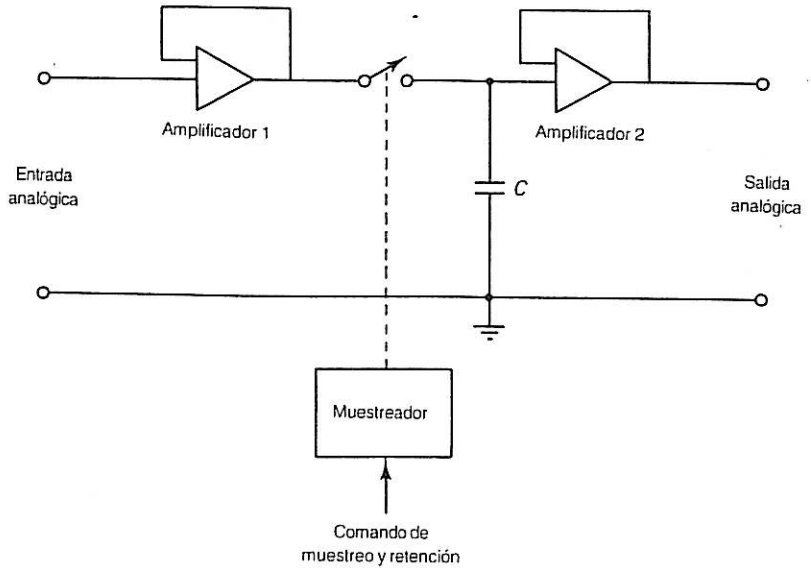


Figura 1-7 Circuito de muestreo y retención.

el comando de retención. El intervalo de tiempo durante el cual la conmutación tiene lugar (esto es, el intervalo de tiempo cuando la amplitud medida es incierta) se denomina *tiempo de apertura.*

El voltaje de salida durante el modo de retención puede decrecer ligeramente. La caída del modo de retención se puede reducir mediante el uso de un amplificador de aislamiento de salida con una impedancia de entrada alta. Dicho amplificador de aislamiento de salida debe tener una corriente de polarización muy baja.

La operación de muestreo y retención está controlada por un reloj.

Tipos de convertidores analógico-digital (A/D). Como se estableció en un principio, el proceso mediante el cual una señal analógica muestreada se cuantifica y se convierte en un número binario es conocido como *conversión analógico-digital.* De esta manera, un convertidor A/D trans-

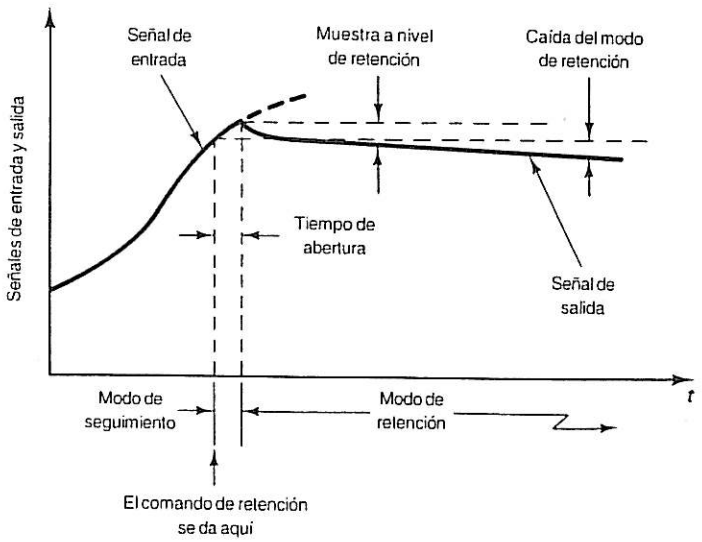


Figura 1-8 Modo de seguimiento y modo de retención.

forma una señal analógica (por lo general en la forma de voltaje o corriente) en una señal digital o una palabra codificada numéricamente. En la práctica, la lógica está basada en dígitos binarios compuestos por 0s y 1s, y la representación tiene un número finito de dígitos. El convertidor A/D ejecuta las operaciones de muestreo y retención, cuantificación y codificación. Observe que en el sistema digital un reloj genera un pulso cada periodo de muestreo T. El convertidor A/D envía una señal digital (número binario) al controlador digital cada vez que el pulso llega.

Entre los circuitos A/D disponibles, los siguientes tipos son los más frecuentemente utilizados:

1. Del tipo de aproximaciones sucesivas
2. Del tipo de integración
3. Del tipo contador
4. Del tipo paralelo

Cada uno de estos cuatro tipos tiene sus propias ventajas y desventajas. En cualquier aplicación particular, la velocidad de conversión, precisión, longitud de palabra y el costo son los principales factores a considerar en la elección del tipo de convertidor A/D. (Si se requiere de una mayor precisión, por ejemplo, se debe incrementar el número de bits en la señal de salida.)

Como se verá, el convertidor analógico-digital utiliza como parte de sus lazos de realimentación convertidores digital-analógico. El tipo más sencillo de convertidor A/D es el del tipo contador. Su principio básico es que se aplican los pulsos de reloj al contador digital de manera que el voltaje de salida del convertidor D/A (esto es, parte del lazo de realimentación del convertidor A/D) aumente un bit menos significativo (LSB) cada vez, y el voltaje de salida se compara con el voltaje analógico de entrada una vez por cada pulso. Cuando el voltaje de salida ha alcanzado la magnitud del voltaje de entrada, los pulsos de reloj se detienen. El voltaje de salida del contador es entonces la salida digital.

El convertidor A/D del tipo de aproximaciones sucesivas es mucho más rápido que el del tipo contador y es el utilizado con mayor frecuencia. En la figura 1-9 se muestra un diagrama del convertidor A/D del tipo de aproximaciones sucesivas.

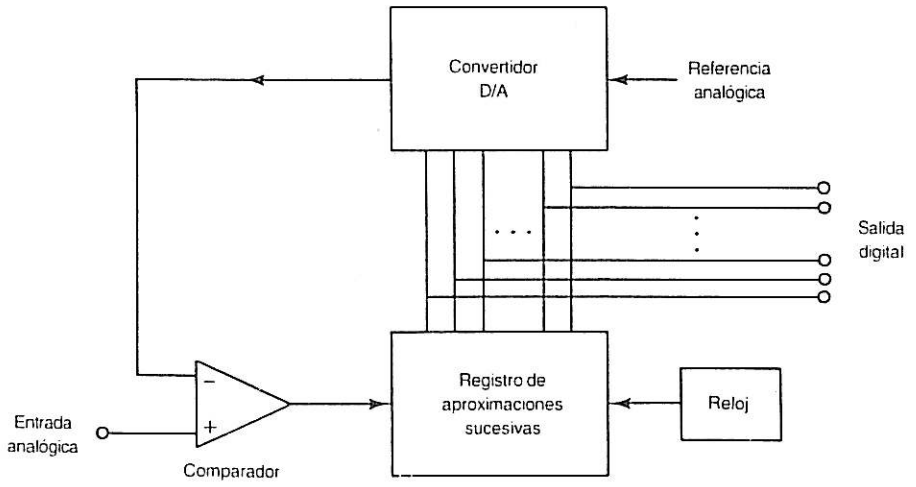


Figura 1-9 Diagrama esquemático de un convertidor A/D del tipo de aproximaciones sucesivas.

El principio de operación de este tipo de convertidor A/D es el que sigue. El registro de aproximaciones sucesivas (SAR) primero enciende el bit más significativo (la mitad del máximo) y lo compara con la entrada analógica. El comparador decide ya sea dejar encendido este bit o apagarlo. Si el voltaje de entrada analógico es mayor, el bit más significativo permanece encendido. El siguiente paso es encender el bit 2 y entonces compararlo con los tres cuartos del máximo del voltaje analógico de entrada. Después de que se completan las n comparaciones, la salida digital del registro de aproximaciones sucesivas indica todos aquellos bits que se mantienen encendidos y produce el código digital deseado. Así, este tipo de convertidor A/D fija un bit por cada ciclo de reloj, y de este modo sólo requiere de n ciclos de reloj para generar n bits, donde n es la resolución del convertidor en bits. (El número n de bits empleados determina la exactitud de conversión.) El tiempo requerido para la conversión es aproximadamente 2μseg o menos para una conversión de 12 bits.

Errores en convertidores A/D. Los convertidores analógico-digitales reales difieren de los convertidores ideales en que los primeros siempre tienen algunos errores, tales como errores de nivel, de linealidad y de ganancia; las características de éstos se muestran en la figura 1-10. También, es importante observar que las características entrada-salida cambian con el tiempo y con la temperatura.

Por último, se debe observar que los convertidores comerciales se especifican para tres rangos de temperatura: comercial (0 °C a 70 °C), industrial (–25 °C a 85 °C) y militar (–55 °C a 125 °C).

Convertidores digital-analógico (D/A). A la salida del controlador digital la señal digital se debe convertir en una señal analógica mediante el proceso conocido como conversión digital-analógica. Un convertidor D/A es un dispositivo que transforma una entrada digital (números binarios) en una salida analógica. La salida, en la mayoría de los casos, es una señal de voltaje.

Para el rango completo de la entrada digital, existen 2^n valores analógicos correspondientes diferentes, incluyendo el 0. Para la conversión digital-analógica existe una correspondencia uno a uno entre la entrada digital y la salida analógica.

En general se emplean dos métodos para la conversión digital-analógica: el método que utiliza resistores ponderados y el otro que utiliza la red en escalera R-$2R$. El primero es sencillo en la configuración del circuito, pero su exactitud puede no ser muy buena. El segundo es un poco más complicado en configuración, pero es más exacto.

En la figura 1-11 se muestra el diagrama de un convertidor D/A que emplea resistores ponderados. Los resistores de entrada del amplificador operacional tienen valores ponderados en forma binaria. Cuando el circuito lógico recibe un 1 binario, el interruptor (en realidad una compuerta electrónica) conecta el resistor al voltaje de referencia. Cuando el circuito lógico recibe un 0 binario, el interruptor conecta el resistor a tierra. Los convertidores digital-analógicos empleados en la práctica común son del tipo paralelo: todos los bits que intervienen se aplican simultáneamente de la entrada digital (números binarios).

Así el convertidor D/A genera el voltaje de salida analógico correspondiente al voltaje digital dado. Para el convertidor D/A que se muestra en la figura 1-11, si el número binario es $b_3b_2b_1b_0$, donde cada una de las b puede ser ya sea un 0 o un 1, entonces la salida es

$$V_o = \frac{R_o}{R}\left(b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{8}\right)V_{\text{ref}}$$

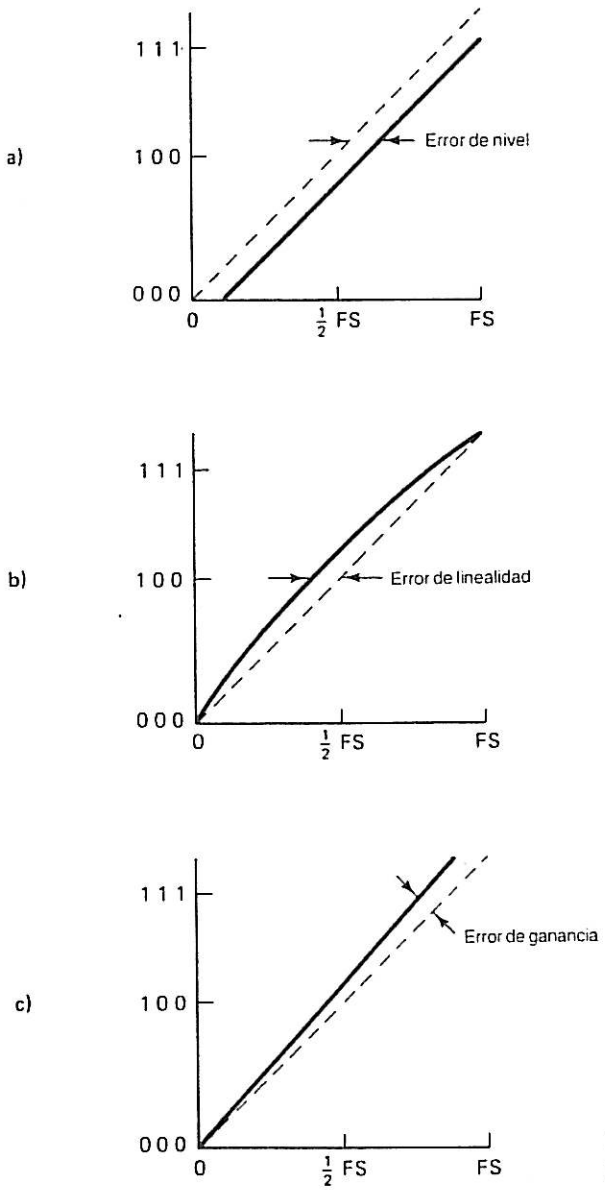


Figura 1-10 Errores en convertidores A/D: *a*) error de nivel; *b*) error de linealidad; *c*) error de ganancia.

Nótese que a medida que el número de bits se incrementa el intervalo de valores de los resistores se hace más grande y la exactitud se empobrece.

En la figura 1-12 se muestra un diagrama esquemático de un convertidor D/A de n-bits que utiliza un circuito en escalera R-$2R$. Observe que con excepción del resistor de realimentación (el cual es $3R$) todos los resistores involucrados son ya sea R o $2R$. Esto significa que se puede alcanzar un alto nivel de exactitud. El voltaje de salida en este caso puede estar dado mediante

$$V_o = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}b_0\right)V_{\text{ref}}$$

Reconstrucción de la señal de entrada mediante circuitos de retención. La operación de muestreo produce una señal de pulsos modulados en amplitud. La función de la operación de reten-

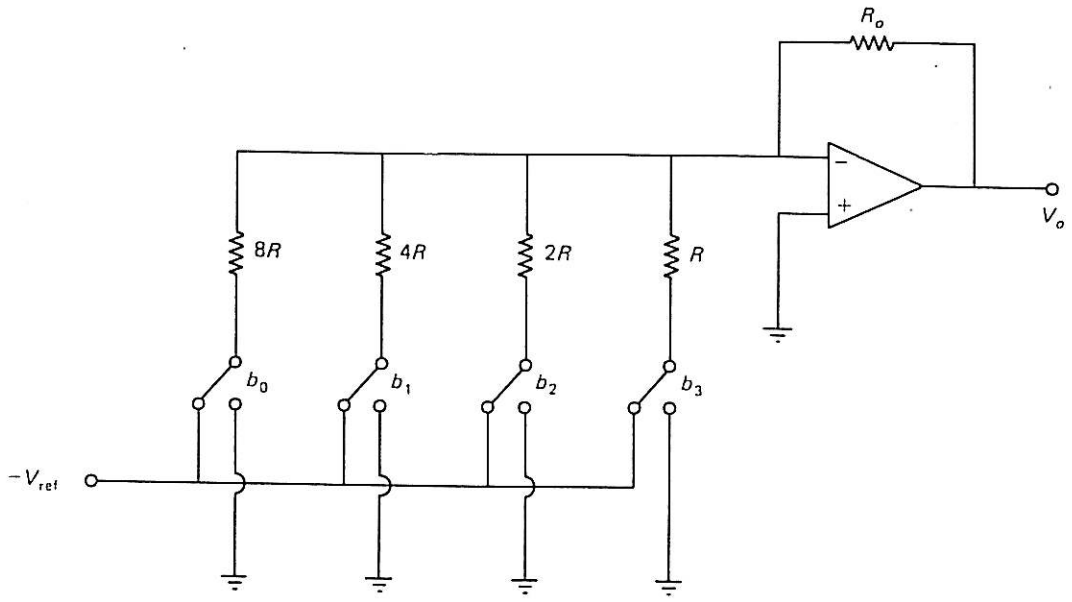


Figura 1-11 Diagrama esquemático de un convertidor D/A que emplea resistores ponderados.

ción es reconstruir la señal analógica que ha sido transmitida como un tren de pulsos muestreados. Esto es, el propósito de la operación de retención es rellenar los espacios entre los períodos de muestreo y así reconstruir en forma aproximada la señal analógica de entrada original.

El circuito de retención se diseña para extrapolar la señal de salida entre puntos sucesivos de acuerdo con alguna manera preestablecida. La forma de onda de escalera de la salida que se muestra en la figura 1-13 es la forma más sencilla para reconstruir la señal de entrada original. El circuito de retención que produce dicha forma de onda de escalera se conoce como *retenedor de orden cero*. Debido a su simplicidad, el retenedor de orden cero se emplea por lo regular en sistemas de control digital.

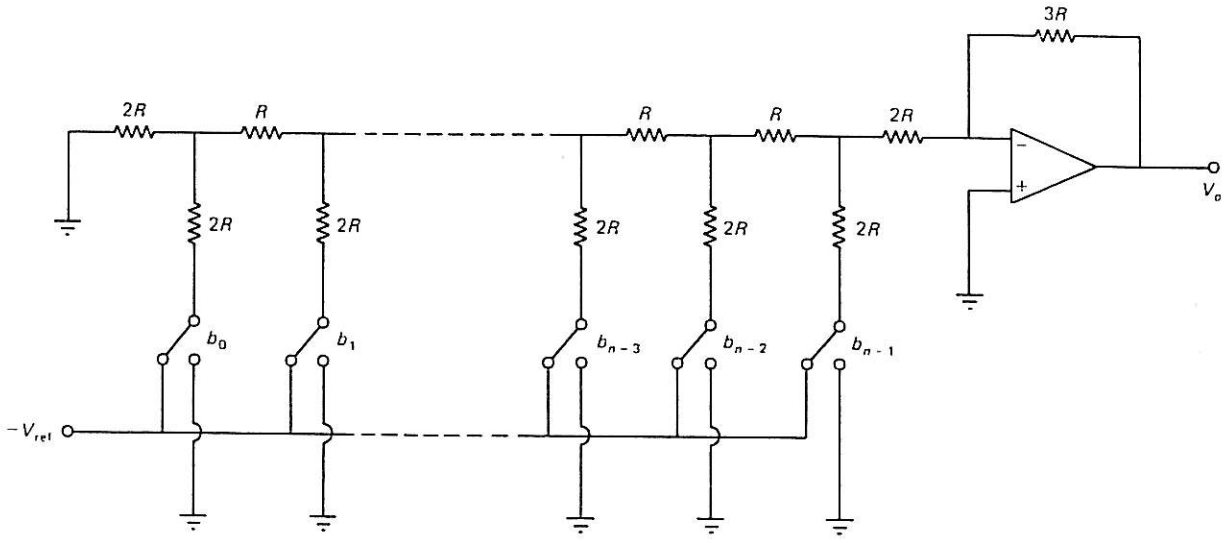


Figura 1-12 Convertidor D/A de n-bits que usa un circuito escalera R-$2R$.

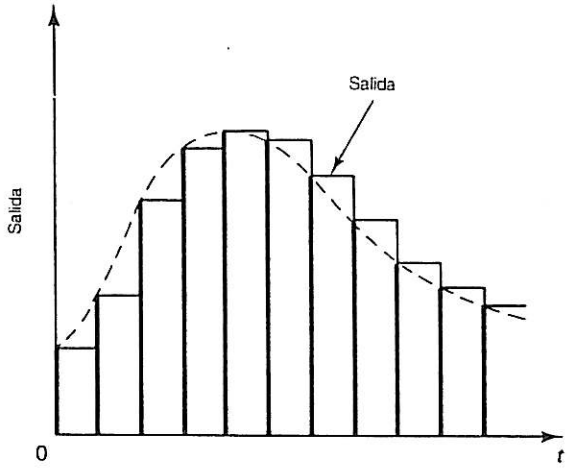


Figura 1-13 Salida de un retenedor de orden cero.

Se dispone de circuitos de retención más sofisticados que el de orden cero. Estos se conocen como circuitos de retención de orden superior e incluyen los retenedores de primero y segundo orden. En general los circuitos de retención de orden superior reconstruirán una señal de manera más exacta que los retenedores de orden cero, pero con algunas desventajas, como se explicará posteriormente.

El retenedor de primer orden mantiene el valor de la muestra anterior, así como el de la presente, y mediante extrapolación predice el valor de la muestra siguiente. Esto se logra mediante la generación de la pendiente de salida igual a la pendiente de un segmento de línea que conecta la muestra actual con la anterior y proyectando ésta desde el valor de la muestra actual, como se puede apreciar en la figura 1-14.

Como se puede ver fácilmente en la figura, si la pendiente de la señal original no cambia mucho, la predicción es buena. Sin embargo, si la señal original invierte su pendiente, entonces la predicción es mala y la salida sigue la dirección equivocada, causando así un gran error para el período de muestreo considerado.

Un retenedor de primer orden con interpolación, también conocido como retenedor *poligonal*, reconstruye la señal original de una manera mucho más exacta. Este circuito de retención también genera una línea recta a la salida cuya pendiente es igual a aquella que une el valor de la muestra anterior con el valor de muestra actual, pero esta vez la proyección se hace desde el punto de la

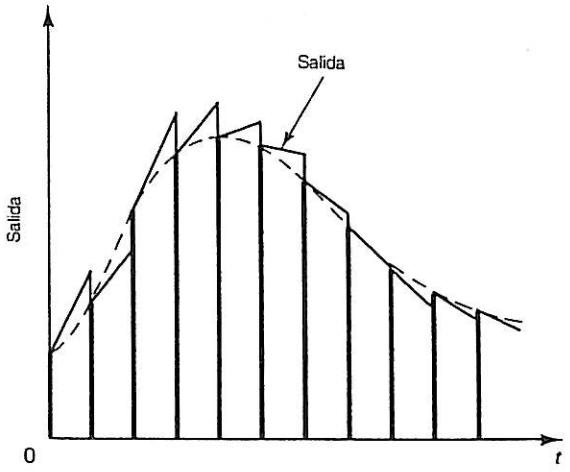


Figura 1-14 Salida de un retenedor de primer orden.

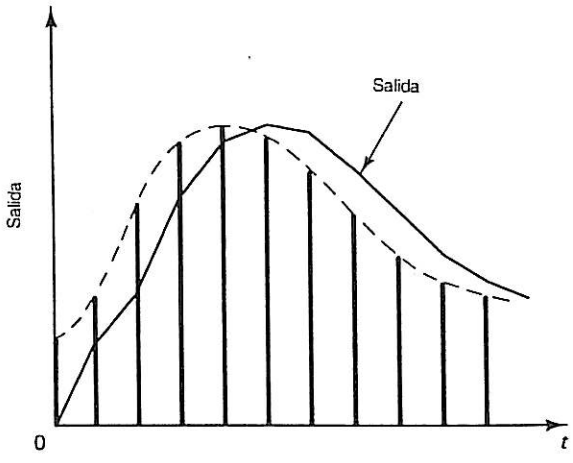


Figura 1-15 Salida de un retenedor de primer orden con interpolación (retenedor poligonal).

muestra actual con la amplitud de la muestra anterior. Por lo tanto, la exactitud al reconstruir la señal original es mejor que para otros circuitos de retención, pero existe un período de muestreo de retardo, como se muestra en la figura 1-15. En efecto, la mejoría en la exactitud se logra a expensas de un retardo de un período de muestreo. Desde el punto de vista de la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado, dicho retardo no es deseable, y de este modo el retenedor de primer orden con interpolación (retención poligonal) no se emplea en aplicaciones de sistemas de control.

1-5 COMENTARIOS FINALES

En la conclusión de este capítulo se compararán los controladores digitales y los analógicos utilizados en sistemas de control industrial y se revisarán algunos conceptos sobre el control digital de procesos. Entonces se presentará la organización del libro.

Controladores digitales y analógicos. Los controladores digitales solamente operan sobre números. La toma de decisiones es una de sus funciones importantes. Estos a menudo se utilizan para resolver los problemas relacionados con la operación global óptima de plantas industriales.

Los controladores digitales son muy versátiles. Éstos pueden manejar ecuaciones de control no lineales que involucran cálculos complicados u operaciones lógicas. Se puede utilizar con controladores digitales una variedad mucho más amplia de leyes de control que las que se pueden usar con controladores analógicos. También en el controlador digital, mediante la edición de un nuevo programa, las operaciones que se están ejecutando se pueden cambiar por completo. Esta característica es en particular importante si el sistema de control va a recibir información o instrucciones de operación desde algún centro de cálculo donde se hacen análisis económicos y estudios de optimización.

Los controladores digitales son capaces de ejecutar cálculos complejos con exactitud constante a alta velocidad y pueden tener casi cualquier grado deseado de exactitud de cálculo con un incremento relativamente pequeño en el costo.

En un principio los controladores digitales se usaron sólo como componentes en sistemas de control a gran escala. Actualmente, sin embargo, gracias a la disponibilidad de microcomputadoras baratas, los controladores digitales se utilizan en muchos sistemas de control de gran y pequeña

escala. De hecho, los controladores digitales están reemplazando a los controladores analógicos que han sido utilizados en muchos sistemas de control a pequeña escala. Los controladores digitales son a menudo superiores en desempeño y con un costo menor que sus contrapartes analógicas.

Los controladores analógicos representan las variables en una ecuación mediante cantidades físicas continuas. Éstos se pueden diseñar fácilmente para servir de manera satisfactoria como controladores que no tienen que tomar decisiones. Pero el costo de las computadoras o controladores analógicos se incrementa rápidamente a medida que la complejidad del cálculo se incrementa, si se tiene que mantener una exactitud constante.

Existen ventajas adicionales de los controladores digitales sobre los analógicos. Los componentes digitales, tales como circuitos de muestreo y retención, convertidores A/D y D/A y los transductores digitales, son de construcción robusta, alta confiabilidad y a menudo compactos y ligeros. Además, los componentes digitales tienen alta sensibilidad y con frecuencia son más baratos que sus contrapartes analógicas y son menos sensibles a señales de ruido. Y, como se mencionó en un principio, los controladores digitales son flexibles al permitir cambios en la programación.

Control digital de procesos. En general, en sistemas de control de procesos industriales, no es práctico operar por períodos de tiempo muy prolongados en estado estacionario, debido a que se pueden presentar ciertos cambios en los requerimientos de producción, materias primas, factores económicos y equipos y técnicas de procesamiento. Así, el comportamiento transitorio de los procesos industriales debe siempre tomarse en consideración. Debido a que existen interacciones entre las variables de proceso, al utilizar una sola variable de proceso para cada uno de los agentes de control no es apropiado para un control completo real. Mediante el uso de un controlador digital, es posible tomar en cuenta todas las variables del proceso, conjuntamente con los factores económicos, los requerimientos de producción, el desempeño del equipo y todas las demás necesidades, y de este modo alcanzar el control óptimo de los procesos industriales.

Observe que un sistema capaz de controlar un proceso tan completamente como pueda, deberá resolver ecuaciones complicadas. En el control más completo, lo más importante es que se conozcan y empleen las relaciones correctas entre las variables de operación. El sistema debe ser capaz de aceptar instrucciones desde muy variadas fuentes como computadoras y operadores humanos y debe también ser capaz de cambiar por completo su subsistema de control en un tiempo corto. Los controladores digitales son los más apropiados en dichas situaciones. De hecho, una de sus ventajas es su flexibilidad, esto es, la facilidad de cambiar los esquemas de control mediante reprogramación.

En el control digital de un proceso complicado, el diseñador debe tener un buen conocimiento del proceso a ser controlado y debe ser capaz de obtener su modelo matemático. (El modelo matemático se puede obtener en términos de ecuaciones diferenciales o en diferencias, o de alguna otra forma.) El diseñador debe estar familiarizado con la tecnología de medición asociada con la salida y otras variables relacionadas en el proceso. Él o ella debe tener un buen conocimiento del trabajo con computadoras digitales, así como de la teoría de control moderno. Si el proceso es complicado, el diseñador debe investigar varios enfoques diferentes para el diseño del sistema de control. A este respecto, sería útil un buen conocimiento de técnicas de simulación.

Organización del libro. El objetivo de este libro es presentar una visión detallada de la teoría de control que es relevante al análisis y diseño de sistemas de control en tiempo discreto. Se enfatizan los conceptos básicos involucrados. En este libro, con frecuencia los controladores digitales se diseñan en la forma de funciones de transferencia pulso o ecuaciones en diferencias equivalentes, las cuales se pueden implantar fácilmente en la forma de programas de computadora.

La organización del libro es como sigue. El capítulo 1 ha presentado material introductorio. El capítulo 2 presenta la teoría de la transformada z. Este capítulo incluye la transformada z de funciones elementales, propiedades y teoremas importantes de la transformada z, la transformada z inversa y la solución de ecuaciones en diferencias mediante el método de la transformada z. El capítulo 3 presenta material de antecedentes para el análisis de sistemas de control en el plano z. Este capítulo incluye discusiones del muestreo mediante impulsos y la reconstrucción de señales originales a partir de señales muestreadas, funciones de transferencia pulso y la realización de controladores y filtros digitales.

El capítulo 4 presenta en principio la relación entre los planos s y z y entonces se discute el análisis de estabilidad de los sistemas en lazo cerrado en el plano z, seguido del análisis de las respuestas transitoria y en estado estacionario, diseñado mediante los métodos del lugar geométrico de las raíces y de la respuesta en frecuencia y el método analítico de diseño. El capítulo 5 presenta la representación en el espacio de estados de sistemas en tiempo discreto, la solución de las ecuaciones de estado en tiempo discreto y la matriz de funciones de transferencia pulso. Después, se trata la discretización de las ecuaciones en el espacio de estados en tiempo continuo y el análisis de estabilidad de Liapunov.

El capítulo 6 presenta el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. El capítulo inicia con una presentación detallada de controlabilidad y observabilidad. Entonces se presentan las técnicas de diseño basadas en la ubicación de polos, seguido por una discusión de observadores de estado de orden completo y de orden mínimo. Este capítulo se concluye con el diseño de sistemas de seguimiento. El capítulo 7 trata el enfoque de ecuaciones polinomiales al diseño de sistemas de control. El capítulo comienza con el estudio de las ecuaciones Diofantinas. Entonces se presenta el diseño de sistemas de regulación y sistemas de control empleando la solución de las ecúaciones Diofantinas. Este enfoque es una alternativa al de ubicación de polos combinado con los observadores de orden mínimo. En este capítulo se incluye el diseño de sistemas de control mediante el acoplamiento a un modelo. Por último, el capítulo 8 trata en detalle los problemas de control óptimo cuadrático.

El análisis en el espacio de estados y el diseño de sistemas de control en tiempo discreto, que se presenta en los capítulos 5, 6 y 8, hace un uso extensivo de vectores y matrices. En el estudio de estos capítulos el lector puede, si la necesidad surge, referirse al apéndice A, el cual resume el material básico del análisis de vectores y matrices. El apéndice B presenta material referente a la teoría de la transformada z que no se incluyó en el capítulo 2. El apéndice C trata los problemas de diseño mediante la ubicación de polos cuando el control es una cantidad vectorial.

En cada uno de los capítulos, excepto el capítulo 1, el texto principal está seguido por problemas resueltos y por problemas propuestos. El lector deberá estudiar y resolver los problemas cuidadosamente. Los problemas resueltos son una parte integral del texto. Los apéndices A, B y C están seguidos por problemas resueltos. El lector que estudie estos problemas tendrá un mejor entendimiento del material presentado.

2

La transformada z

2-1 INTRODUCCIÓN

Una herramienta matemática muy utilizada en el análisis y la síntesis de sistemas de control en tiempo discreto es la transformada z. El papel de la transformada z en sistemas en tiempo discreto es similar al de la transformada de Laplace en sistemas en tiempo continuo.

En un sistema de control en tiempo discreto, una ecuación en diferencias lineal caracteriza la dinámica del sistema. Para determinar la respuesta del sistema a una entrada dada, se debe resolver dicha ecuación en diferencias. Con el método de la transformada z, las soluciones a las ecuaciones en diferencias se convierten en un problema de naturaleza algebraica. (De la misma forma en que la transformada de Laplace transforma las ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo en ecuaciones algebraicas en s, la transformada z transforma las ecuaciones en diferencias lineales e invariantes en el tiempo en ecuaciones algebraicas en z.)

El principal objetivo de este capítulo es presentar las definiciones de la transformada z, los teoremas básicos asociados con ella y los métodos para encontrar la transformada z inversa. También se estudia la solución de ecuaciones en diferencias mediante el método de la transformada z.

Señales en tiempo discreto. Las señales en tiempo discreto surgen si el sistema involucra la operación de muestreo de señales en tiempo continuo. La señal muestreada es $x(0), x(T), x(2T), \ldots$, donde T es el período de muestreo. Dicha secuencia de valores que surge de la operación de muestreo normalmente se escribe como $x(kT)$. Si el sistema incluye un proceso iterativo realizado por una computadora digital, la señal involucrada es una secuencia de números $x(0), x(1), x(2). \ldots$ La secuencia de números normalmente se escribe como $x(k)$, donde el argumento k indica el orden en el que se presentan los números en la secuencia, por ejemplo, $x(0), x(1), x(2). \ldots$ Aunque $x(k)$ es una secuencia de números, ésta se puede considerar como una señal muestreada de $x(t)$ cuando el período de muestreo T es 1 segundo.

La transformada z se aplica a la señal en tiempo continuo $x(t)$, a la señal muestreada $x(kT)$ y a la secuencia de números $x(k)$. Si no se presenta confusión en el estudio al tratar con la transformada z, de manera ocasional se emplean $x(kT)$ y $x(k)$ intercambiadas. [Esto es, para simplificar la presentación, en ocasiones se omite la aparición explícita de T y se escribe $x(kT)$ como $x(k)$.]

Organización del capítulo. En la sección 2-1 se presentaron comentarios introductorios. En la sección 2-2 se expone la definición de la transformada z y los temas asociados con ésta. En la sección 2-3 se dan las transformadas z de funciones elementales. Las propiedades y teoremas importantes de la transformada z se presentan en la sección 2-4. En la sección 2-5 se estudian los métodos analíticos y computacionales para encontrar la transformada z inversa. En la sección 2-6 se presenta la solución de ecuaciones en diferencias mediante el método de la transformada z. Por último, en la sección 2-7 se dan los comentarios finales.

2-2 LA TRANSFORMADA z

El método de la transformada z es un método operacional muy poderoso cuando se trabaja con sistemas en tiempo discreto. A continuación se definirá la transformada z de una función del tiempo o de una secuencia de números.

Al considerar la transformada z de una función del tiempo $x(t)$, sólo se toman en cuenta los valores muestreados de $x(t)$, esto es, $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, . . . , donde T es el período de muestreo.

La transformada z de una función del tiempo $x(t)$, donde t es positivo, o de la secuencia de valores $x(kT)$, donde k adopta valores de cero o de enteros positivos y T es el período de muestreo, se define mediante la siguiente ecuación:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{2–1}$$

Para una secuencia de números $x(k)$, la transformada z se define como

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{2–2}$$

La transformada z definida mediante las ecuaciones (2-1) o (2-2) se conoce como *transformada z unilateral.*

El símbolo $\mathcal{Z}$ denota la "transformada z de". En la transformada z unilateral se supone que $x(t) = 0$ para $t < 0$ o $x(k) = 0$ para $k < 0$. Observe que z es una variable compleja.

Observe que, cuando se trata con una secuencia de tiempo $x(kT)$ que se obtuvo mediante el muestreo de una señal $x(t)$, la transformada z $X(z)$ involucra de manera explícita a T. Sin embargo, para una secuencia de tiempo $x(k)$, la transformada z $X(z)$ no lo incluye a T explícitamente.

La transformada z de $x(t)$, donde $-\infty < t < \infty$, o de $x(k)$, donde k adopta valores enteros ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), se define mediante

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{2–3}$$

o

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{2–4}$$

La transformada z definida mediante las ecuaciones (2-3) o (2-4) se denomina *transformada z bilateral*. En la transformada z bilateral, se supone que la función $x(t)$ es distinta de cero para $t < 0$ y se considera que la secuencia $x(k)$ tiene valores distintos de cero para $k < 0$. Ambas transformadas z, la unilateral y la bilateral, son series de potencias de z^{-1}. (La transformada bilateral incluye tanto potencias positivas como negativas de z^{-1}.) En este libro, sólo se considera de manera detallada la transformada z unilateral.

Para la mayoría de las aplicaciones en ingeniería, la transformada z unilateral tendrá una solución apropiada en forma cerrada en su región de convergencia. Observe que cuando $X(z)$, una serie infinita en z^{-1}, converge fuera del círculo $|z| = R$, donde R se conoce como *radio de convergencia absoluta*. Al utilizar el método de la transformada z para resolver problemas en tiempo discreto no es necesario especificar los valores de z para los cuales $X(z)$ converge.

Observe que la expansión del segundo miembro de la ecuación (2-1) da como resultado

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(kT)z^{-k} + \cdots \tag{2–5}$$

La ecuación (2-5) implica que la transformada z de cualquier función en tiempo continuo $x(t)$ se puede escribir, mediante inspección, en la forma de una serie. La z^{-k} en esta serie indica la posición en el tiempo en la que se presenta la amplitud $x(kT)$. De manera contraria, si $X(z)$ está dada en la forma de una serie como la que se indicó, la transformada z inversa se puede obtener por inspección como una secuencia de la función $x(kT)$ que corresponde a los valores de $x(t)$ en los valores de tiempo respectivos.

Si la transformada z está dada como el cociente de dos polinomios en z, entonces la transformada z inversa se puede obtener mediante varios métodos diferentes, tales como el método de la división directa, el método computacional, el método de expansión en fracciones parciales y el método de la integral de inversión (para mayores detalles véase la sección 2-5).

2-3 TRANSFORMADA z DE FUNCIONES ELEMENTALES

A continuación se presentará la transformada z de varias funciones elementales. Observe que en la teoría de la transformada z unilateral, al muestrear una señal discontinua $x(t)$, se supone que la función es continua por la derecha; esto es, si la discontinuidad se presenta en $t = 0$, entonces se supone que $x(0)$ es igual a $x(0+)$ en lugar del promedio en la discontinuidad, $[x(0–) + x(0+)]/2$.

Función escalón unitario. Encuentre la transformada z de la función escalón unitario

$$x(t) = \begin{cases} 1(t), & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, en el muestreo de la función escalón unitario se supone que esta función es continua por la derecha; esto es, $1(0) = 1$. Entonces, refiriéndose a la ecuación (2-1), se tiene

$$X(z) = \mathcal{Z}[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$
$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - 1}$$

Observe que la serie converge si $|z| > 1$. Al encontrar la transformada z, la variable z actúa como un operador mudo. No es necesario especificar la región de z en la que $X(z)$ converge. Es suficiente saber que dicha región existe. La transformada z $X(z)$ de una función del tiempo $x(t)$ que se obtiene de esta manera es válida en todo el plano z excepto en los polos de $X(z)$.

Se debe observar que $1(k)$ definida mediante

$$1(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

comúnmente se conoce como *secuencia escalón unitario.*

Función rampa unitaria. Considere la función rampa unitaria

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Observe que

$$x(kT) = kT, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

La figura 2-1 representa la señal rampa unitaria muestreada. Las magnitudes de los valores muestreados son proporcionales al período de muestreo T. La transformada z de la función rampa unitaria se puede escribir como

$$X(z) = \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots)$$

$$= T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$= \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

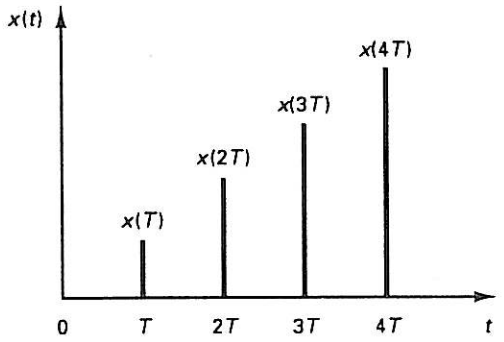


Figura 2-1 Señal rampa unitaria muestreada.

Observe que es una función del período de muestreo T.

Función polinomial a^k. Obtenga la transformada z de $x(k)$ definida como

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

donde a es una constante. Con referencia a la definición de la transformada z dada por la ecuación (2-2), se obtiene

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[a^k] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Función exponencial. Encuentre la transformada z de

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Puesto que

$$x(kT) = e^{-akT}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

se tiene que

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[e^{-at}] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Función senoidal. Considere la función senoidal

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \omega t, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Si observamos que

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

se tiene

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Como la transformada z de la función exponencial es

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

se tiene

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[\operatorname{sen} \omega t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \operatorname{sen} \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2-1

Obtenga la transformada z de la función coseno

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & 0 \le t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Si se procede de manera similar a la forma en la que se trató a la transformada z de la función seno, se tiene

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[\cos \omega t] &= \tfrac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1}\cos \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2-2

Obtenga la transformada z de

$$X(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Cuando se da una función en s, una manera de encontrar la transformada z correspondiente es convertir $X(s)$ en $x(t)$ y entonces encontrar la transformada z de $x(t)$. Otro enfoque es expandir $X(s)$ en fracciones parciales y utilizar la tabla de transformadas z para encontrar la transformada z de los términos expandidos. No obstante, se estudiarán otros enfoques en la sección 3-3.

La transformada inversa de Laplace de $X(s)$ es

$$x(t) = 1 - e^{-t}, \qquad 0 \leq t$$

Por consiguiente,

$$X(z) = \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

$$= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}$$

$$= \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

Comentarios. De la misma forma como se trabaja con la transformada de Laplace, una tabla de las transformadas z de las funciones comúnmente encontradas es muy útil en la resolución de problemas en el campo de los sistemas en tiempo discreto. La tabla 2-1 es de este tipo.

TABLA 2-1 TABLA DE TRANSFORMADAS z

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ o $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Delta de Kronecker $\delta_0(k)$ 1, $k = 0$ 0, $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n - k)$ 1, $n = k$ 0, $n \neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s + a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b - a}{(s + a)(s + b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})(1 - e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s + a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s + a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	$(1 - akT)e^{-akT}$	$\frac{1 - (1 + aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$

TABLA 2-1 (continuación)

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ o $x(k)$	$X(z)$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2 e^{-at}$	$(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2 e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$	$\operatorname{sen}\omega kT$	$\frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$e^{-akT}\operatorname{sen}\omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\operatorname{sen}\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
18.			a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.			a^{k-1} $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.			ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.			k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.			k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.			k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.			$a^k\cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$
25.			$\frac{k(k-1)}{2!}$	$\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
26.		$\frac{k(k-1)\cdots(k-m+2)}{(m-1)!}$		$\frac{z^{-m+1}}{(1-z^{-1})^m}$
27.			$\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}$	$\frac{z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$
23.	$\frac{k(k-1)\cdots(k-m+2)}{(m-1)!}a^{k-m+1}$			$\frac{z^{-m+1}}{(1-az^{-1})^m}$

$x(t)=0$, para $t<0$.

$x(kT)=x(k)=0$, for $k<0$.

A menos que se indique otra cosa, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$.

2-4 PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA z

El uso del método de la transformada z en el análisis de sistemas de control en tiempo discreto se puede facilitar si se hace referencia a los teoremas de la transformada z. En esta sección se presentan las propiedades importantes y los teoremas útiles de la transformada z. Se supone que la función del tiempo $x(t)$ tiene transformada z y que $x(t)$ es cero para $t < 0$.

Multiplicación por una constante. Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces

$$\mathcal{Z}[ax(t)] = a\,\mathcal{Z}[x(t)] = aX(z)$$

donde a es una constante.

Para probar esto, observe que, por definición

$$\mathcal{Z}[ax(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = aX(z)$$

Linealidad de la transformada z. La transformada z posee una propiedad importante: la linealidad. Esto significa que, si $f(k)$ y $g(k)$ tienen transformada z y α y β son escalares, entonces $x(k)$ formada por una combinación lineal

$$x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k)$$

tiene la transformada z

$$X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

donde $F(z)$ y $G(z)$ son las transformadas z de $f(k)$ y $g(k)$, respectivamente.

La propiedad de linealidad se puede probar refiriéndose a la ecuación (2-2) como sigue:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(k)] = \mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha f(k) + \beta g(k)]z^{-k} \\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + \beta\sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \\ &= \alpha\mathcal{Z}[f(k)] + \beta\mathcal{Z}[g(k)] \\ &= \alpha F(z) + \beta G(z) \end{aligned}$$

Multiplicación por a^k. Si $X(z)$ es la transformada z de $x(k)$, entonces la transformada z de $a^k x(k)$ está dada por $X(a^{-1}z)$:

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z) \tag{2–6}$$

Esto se puede probar como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

Teorema de corrimiento. El teorema de corrimiento que se presenta aquí se conoce también como teorema de translación real. Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ tiene la transformada z $X(z)$, entonces

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}X(z) \tag{2–7}$$

y

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \tag{2–8}$$

donde n es cero o un entero positivo.

Para probar la ecuación (2-7), observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \\ &= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-(k-n)}\end{aligned} \tag{2–9}$$

Al definir $m = k - n$, la ecuación (2-9) se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

Puesto que $x(mT) = 0$ para $m < 0$, se podría cambiar el límite inferior de la sumatoria de $m = -n$ por $m = 0$. Por tanto,

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z) \tag{2–10}$$

De este modo, la multiplicación de una transformada z por z^{-n} tiene el efecto de retrasar la función del tiempo $x(t)$ un tiempo nT. (Esto es, mover la función a la derecha un tiempo nT.)

Para probar la ecuación (2-8), se observa que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(t + nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-k} \\ &= z^n\sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} \\ &= z^n\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \\ &= z^n\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \\ &= z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]\end{aligned}$$

Para la secuencia de números $x(k)$, la ecuación (2-8) se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{Z}[x(k + n)] = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}\right]$$

A partir de esta última ecuación, se obtiene

$$\mathcal{Z}[x(k + 1)] = zX(z) - zx(0) \tag{2–11}$$

$$\mathcal{Z}[x(k + 2)] = z\mathcal{Z}[x(k + 1)] - zx(1) = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \tag{2–12}$$

De manera similar,

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1}x(1) - z^{n-2}x(2) - \cdots - zx(n-1) \qquad (2\text{–}13)$$

donde n es un entero positivo.

Recuerde que la multiplicación de $X(z)$ por z tiene el efecto de avanzar la señal $x(kT)$ un paso (un período de muestreo) y que la multiplicación de la transformada z $X(z)$ por z^{-1} tiene el efecto de retrasar la señal $x(kT)$ un paso (un período de muestreo).

Ejemplo 2-3

Encuentre las transformadas z de una función escalón unitario que está retrasada un período de muestreo y cuatro períodos de muestreo, respectivamente, como se muestra en las figuras 2-2*a*) y *b*).

Mediante el teorema de corrimiento dado por la ecuación (2-7), se tiene

$$\mathcal{Z}[1(t-T)] = z^{-1}\mathcal{Z}[1(t)] = z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

También,

$$\mathcal{Z}[1(t-4T)] = z^{-4}\mathcal{Z}[1(t)] = z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}$$

(Observe que z^{-1} representa el retardo de un período de muestreo T, sin tomar en cuenta el valor de T.)

Ejemplo 2-4

Obtenga la transformada z de

$$f(a) = \begin{cases} a^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

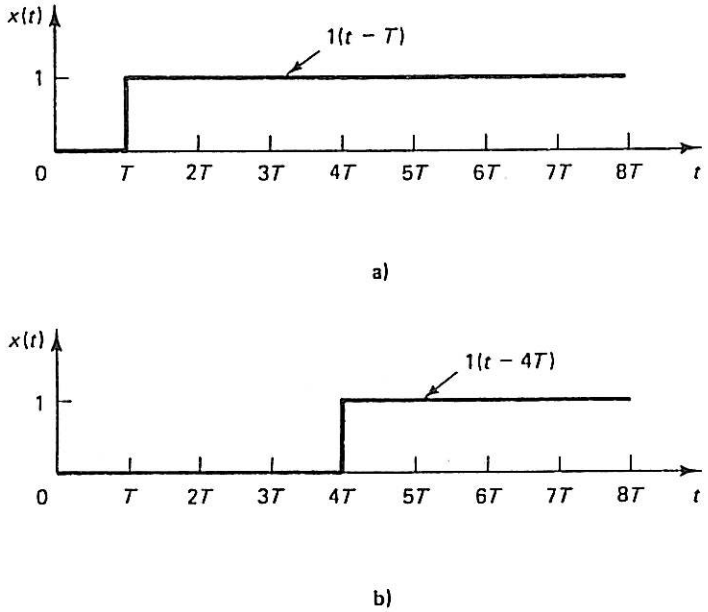


Figura 2-2 *a*) Función escalón unitario retardada 1 período de muestreo; *b*) función escalón unitario retardada 4 períodos de muestreo.

Si tomamos la ecuación (2-7) como referencia, se tiene

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1}X(z)$$

La transformada z de a^k es

$$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

y de este modo

$$\mathcal{Z}[f(a)] = \mathcal{Z}[a^{k-1}] = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 2-5

Considere la función $y(k)$, la cual es la suma de funciones $x(h)$, donde $h = 0, 1, 2, \ldots, k$, tal que

$$y(k) = \sum_{h=0}^{k} x(h), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $y(k) = 0$ para $k < 0$. Obtenga la transformada z de $y(k)$.

Primero observe que

$$y(k) = x(0) + x(1) + \cdots + x(k-1) + x(k)$$
$$y(k-1) = x(0) + x(1) + \cdots + x(k-1)$$

De aquí,

$$y(k) - y(k-1) = x(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{Z}[y(k) - y(k-1)] = \mathcal{Z}[x(k)]$$

o

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$$

lo cual da

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

donde $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$.

Teorema de traslación compleja. Si $x(t)$ tiene la transformada z $X(z)$, entonces la transformada z de $e^{-at}x(t)$ está dada por $X(ze^{aT})$. Esto se conoce como *teorema de traslación compleja.*

Para probar este teorema, observe que

$$\mathcal{Z}[e^{-at}x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X(ze^{aT}) \tag{2-14}$$

De esta manera, se ve que al reemplazar z en $X(z)$ por ze^{aT} da la transformada z de $e^{-at}x(t)$.

Ejemplo 2-6

Dadas las transformadas z de ωt y cos ωt, obtenga la transformada z de e^{-at} sen ωt y e^{-at} cos ωt, respectivamente, mediante el uso del teorema de traslación compleja.

Si observamos que

$$\mathcal{Z}[\operatorname{sen}\omega t] = \frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

sustituimos z por ze^{aT} para obtener la transformada z de e^{-at} sen ωt, como sigue:

$$\mathcal{Z}[e^{-at}\operatorname{sen}\omega t] = \frac{e^{-aT}z^{-1}\operatorname{sen}\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

De manera similar, para la función coseno, se tiene

$$\mathcal{Z}[\cos\omega t] = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

Mediante la sustitución de z por ze^{aT} en la transformada z de cos ωt, se obtiene

$$\mathcal{Z}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{1 - e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

Ejemplo 2-7

Obtenga la transformada z de te^{-at}.

Tenga en cuenta que

$$\mathcal{Z}[t] = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = X(z)$$

De este modo,

$$\mathcal{Z}[te^{-at}] = X(ze^{aT}) = \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$$

Teorema del valor inicial. Si $x(t)$ tiene la transformada z $X(z)$ y si el $\lim_{z\to\infty} X(z)$ existe, entonces el valor inicial $x(0)$ de $x(t)$ o $x(k)$ está dado por

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{2–15}$$

Para probar este teorema, observe que

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

Al hacer que $z \to \infty$ en esta última ecuación, se obtiene la ecuación (2-15). De esta forma, el comportamiento de la señal en la vecindad de $t = 0$ o $k = 0$ se puede determinar mediante el comportamiento de $X(z)$ cuando $z = \infty$.

El teorema del valor inicial es conveniente para verificar la incidencia de posibles errores en el cálculo de la transformada z. Debido a que $x(0)$ normalmente se conoce, una verificación del valor inicial mediante $\lim_{z\to\infty} X(z)$ puede facilitar descubrir errores en $X(z)$, si éstos existen.

Ejemplo 2-8

Determine el valor inicial $x(0)$ si la transformada z de $x(t)$ está dada por

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}$$

Mediante el uso del teorema del valor inicial, se encuentra

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = 0$$

En referencia al ejemplo 2-2, observe que esta $X(z)$ fue la transformada z de

$$x(t) = 1 - e^{-t}$$

y así $x(0) = 0$, lo cual concuerda con el resultado que se obtuvo al principio.

Teorema del valor final. Suponga que $x(k)$, donde $x(k) = 0$ para $k < 0$, tiene la transformada z $X(z)$ y que todos los polos de $X(z)$ están dentro del círculo unitario, con la posible excepción de un solo polo en $z = 1$. [Ésta es la condición para la estabilidad de $X(z)$, o la condición para que $x(k)$ ($k = 0$, 1, 2, . . .) permanezca finita.] Entonces el valor final de $x(k)$, esto es, el valor de $x(k)$ a medida que k tiende a infinito, puede darse mediante

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)] \tag{2–16}$$

Para probar el teorema del valor final, observe que

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z)$$

Si tomamos el límite cuando z tiende a la unidad, se tiene

$$\lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}\right] = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)]$$

Debido a la condición de estabilidad que se supuso y a la condición de que $x(k) = 0$ para $k < 0$, el primer miembro de esta última ecuación se convierte en

$$\sum_{k=0}^{\infty}[x(k) - x(k-1)] = [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)]$$
$$+ [x(2) - x(1)] + \cdots = x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k)$$

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)]$$

que es la ecuación (2-16). El teorema del valor final es muy útil para determinar el comportamiento de $x(k)$ a medida que $k \to \infty$ a partir de su transformada z $X(z)$.

Ejemplo 2-9

Determine el valor final $x(\infty)$ de

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}, \qquad a > 0$$

mediante el uso del teorema del valor final.

Al aplicar el teorema del valor final a la $X(z)$ dada, se obtiene

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{z \to 1} [(1 - z^{-1})X(z)] \\ &= \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) = 1 \end{aligned}$$

Se observa que la $X(z)$ dada es en realidad la transformada z de

$$x(t) = 1 - e^{-at}$$

Al sustituir $t = \infty$ en esta ecuación, se tiene

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-at}) = 1$$

Como era de esperarse, los dos resultados concuerdan.

Resumen. En esta sección se han presentado las propiedades y teoremas importantes de la transformada z que probarán ser de utilidad al resolver muchos problemas de la transformada z. Con el propósito de tener una referencia adecuada, estas propiedades y teoremas importantes se resumen en la tabla 2-2. (Muchos de los teoremas que se presentan en esta tabla se estudiaron en esta sección. Aquellos que no fueron estudiados aquí pero que se incluyen en la tabla se obtienen o prueban en el apéndice B.)

2-5 LA TRANSFORMADA z INVERSA

La transformada z en sistemas de control en tiempo discreto juega el mismo papel que la transformada de Laplace en sistemas de control en tiempo continuo. Para que la transformada z sea útil, debemos estar familiarizados con los métodos para encontrar la transformada z inversa.

La notación para la transformada z inversa es $\mathcal{Z}^{-1}$. La transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado la correspondiente secuencia de tiempo $x(k)$.

Se debe observar que a partir de la transformada z inversa sólo se obtiene la secuencia de tiempo en los instantes de muestreo. De esta manera, la transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado una única $x(k)$, pero no da una única $x(t)$. Esto significa que la transformada z inversa da como resultado una secuencia de tiempo que especifica los valores de $x(t)$ solamente en los valores discretos de tiempo, $t = 0, T, 2T, \ldots$, y no dice nada acerca de los valores de $x(t)$ en todos los otros tiempos. Esto es, muchas funciones del tiempo $x(t)$ diferentes pueden tener la misma $x(kT)$. Véase la figura 2-3.

Cuando $X(z)$, la transformada z de $x(kT)$ o $x(k)$, está dada, la operación que determina la $x(kT)$ o $x(k)$ correspondiente se denomina *transformación z inversa*. Un método obvio para encontrar la transformada z inversa es referirse a una tabla de transformadas z. Sin embargo, a menos que uno se refiera a una tabla de transformadas z muy extensa, no sería uno capaz de encontrar la transformada z inversa de una función de z complicada. (Si se utiliza una tabla de transformadas z no muy extensa, es necesario expresar una transformada z complicada como una suma de transformadas z más sencillas. Refiérase al método de expansión en fracciones parciales que se presenta en esta sección.)

Existen otros cuatro métodos para obtener la transformada z inversa que no implican el uso de tablas:

TABLA 2-2 TEOREMAS Y PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA z.

	$x(t)$ o $x(k)$	$\mathcal{Z}[x(t)]$ o $\mathcal{Z}[x(k)]$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t + T)$ or $x(k + 1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t + 2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k + 2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t + kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \cdots - zx(kT - T)$
7.	$x(t - kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n + k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \cdots - zx(k - 1)$
9.	$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz\dfrac{d}{dz}X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ si el límite existe
17.	$x(\infty)$	$\lim\limits_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)]$ if $(1 - z^{-1})X(z)$ es analítica sobre y fuera del círculo unitario
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k - 1)$	$(1 - z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k + 1) - x(k)$	$(z - 1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum\limits_{k=0}^{n} x(k)$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$
21.	$\dfrac{\partial}{\partial a}x(t, a)$	$\dfrac{\partial}{\partial a}X(z, a)$
22.	$k^mx(k)$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum\limits_{k=0}^{n} x(kT)y(nT - kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$

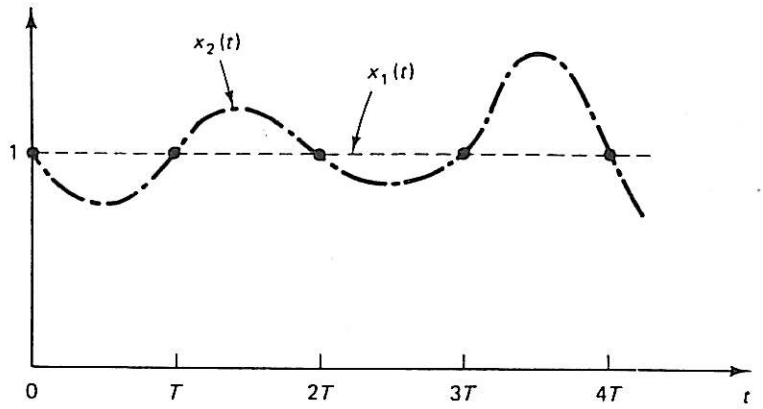


Figura 2-3 Dos funciones en tiempo continuo diferentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que tienen los mismos valores en $t = 0, T, 2T, \ldots$

1. Método de la división directa
2. Método computacional
3. Método de expansión en fracciones parciales
4. Método de la integral de inversión

Para obtener la transformada z inversa, se supone, por lo regular, que la secuencia de tiempo $x(kT)$ o $x(k)$ es cero para $k < 0$.

Antes de presentar los cuatro métodos, son convenientes algunos comentarios acerca de los polos y ceros de la función de transferencia pulso.

Polos y ceros en el plano z. En aplicaciones de ingeniería del método de la transformada z, $X(z)$ puede tener la forma

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (m \leq n) \tag{2-17}$$

o

$$X(z) = \frac{b_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)}$$

donde los $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ son los polos de $X(z)$ y los $z_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ son los ceros de $X(z)$.

La ubicación de los polos y los ceros de $X(z)$ determina las características de $x(k)$, la secuencia de valores o números. Como en el caso del análisis de sistemas de control lineales en tiempo continuo en el plano s, también se utiliza una representación gráfica de las localizaciones de los polos y ceros de $X(z)$ en el plano z.

Observe que en ingeniería de control y en procesamiento de señales, $X(z)$ a menudo se expresa como un cociente de polinomios en z^{-1}, como sigue:

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{2-18}$$

donde z^{-1} se interpreta como el operador retraso unitario. En este capítulo, donde se presentaron las propiedades y teoremas básicos del método de la transformada z, $X(z)$ se puede expresar en términos de las potencias de z, como se hace en la ecuación (2-17), o en términos de las potencias de z^{-1}, como en la ecuación (2-18), dependiendo de las circunstancias.

Al encontrar los polos y ceros de $X(z)$, es conveniente expresar $X(z)$ como un cociente de polinomios en z. Por ejemplo,

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

Es claro que $X(z)$ tiene polos en $z = -1$ y $z = -2$ y ceros en $z = 0$ y $z = -0.5$. Si $X(z)$ se escribe como un cociente de polinomios en z^{-1}, la $X(z)$ precedente se puede escribir como

$$X(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Aunque los polos en $z = -1$ y $z = -2$ y un cero en $z = -0.5$ se ven claramente a partir de la expresión, el cero en $z = 0$ no se muestra de manera explícita, y de esta forma el principiante puede fallar al ver la existencia del cero en $z = 0$. Por lo tanto, al tratar con los polos y ceros de $X(z)$, es preferible expresar $X(z)$ como un cociente de polinomios en z, en lugar de polinomios en z^{-1}. Además, en la obtención de la transformada z inversa que emplea el método de la integral de inversión, es deseable expresar $X(z)$ como un cociente de polinomios en z, en lugar de z^{-1}, para evitar cualquier posible error al determinar el número de polos en el origen de la función $X(z)z^{k-1}$.

Método de la división directa. En el método de la división directa, la transformada z inversa se obtiene mediante la expansión de $X(z)$ en una serie infinita de potencias de z^{-1}. Este método es útil cuando es difícil obtener una expresión en forma cerrada para la transformada z inversa o se desea encontrar sólo algunos de los primeros términos de $x(k)$.

El método de la división directa proviene del hecho de que si $X(z)$ está expandida en una serie de potencias de z^{-1}, esto es, si

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(kT)z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

entonces $x(kT)$ o $x(k)$ es el coeficiente del término z^{-k}. Por lo tanto, los valores de $x(kT)$ o $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ se pueden determinar por inspección.

Si $X(z)$ está dada en la forma de una función racional, la expansión en una serie de potencias infinita en potencias crecientes de z^{-1} se puede lograr sencillamente al dividir el numerador entre el denominador, donde tanto el numerador como el denominador de $X(z)$ se escriben en potencias

crecientes de z^{-1}. Si la serie resultante es convergente, los coeficientes de los términos z^{-k} son los valores $x(kT)$ de la secuencia del tiempo o los valores $x(k)$ de la secuencia de números.

Aunque este método da como resultado los valores de $x(0), x(T), x(2T), \ldots$ o los valores $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, . . . de una manera secuencial, por lo regular es difícil obtener una expresión para el término general a partir de un conjunto de valores de $x(kT)$ o $x(k)$.

Ejemplo 2-10

Encuentre $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, cuando $X(z)$ está dada por

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)}$$

Primero, $X(z)$ se rescribe como un cociente de polinomios en z^{-1}, como sigue:

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

Al dividir el numerador entre el denominador, se tiene

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4} + \cdots \\ 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}\overline{)\,10z^{-1} + 5z^{-2}} \\ \underline{10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3}} \\ 17z^{-2} - 2z^{-3} \\ \underline{17z^{-2} - 20.4z^{-3} + 3.4z^{-4}} \\ 18.4z^{-3} - 3.4z^{-4} \\ \underline{18.4z^{-3} - 22.08z^{-4} + 3.68z^{-5}} \\ 18.68z^{-4} - 3.68^{-5} \\ \underline{18.68z^{-4} - 22.416z^{-5} + 3.736z^{-6}} \end{array}$$

De este modo,

$$X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4} + \cdots$$

Al comparar esta expansión de $X(z)$ en una serie infinita con $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$, se obtiene

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 10$$

$$x(2) = 17$$

$$x(3) = 18.4$$

$$x(4) = 18.68$$

Como se ve a partir de este ejemplo, el método de la división directa se puede llevar a cabo mediante cálculos manuales si sólo se desean los primeros términos de la secuencia. En general, el método no produce una expresión en forma cerrada para $x(k)$, excepto en casos especiales.

Ejemplo 2-11

Encuentre $x(k)$ cuando $X(z)$ está dada mediante

$$X(z) = \frac{1}{z + 1} = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Al dividir el numerador entre el denominador, obtenemos

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + \cdots$$

Al comparar esta expansión de $X(z)$ en una serie infinita con $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$, se obtiene

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 1$$
$$x(2) = -1$$
$$x(3) = 1$$
$$x(4) = -1$$
$$\vdots$$

Ésta es una señal alternante entre 1 y −1, que empieza en $k = 1$. En la figura 2-4 se muestra una gráfica de esta señal.

Ejemplo 2-12

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

La transformada $X(z)$ ya está en la forma de una serie de potencias de z^{-1}. Puesto que $X(z)$ tiene un número finito de términos, corresponde a una señal de longitud finita. Por inspección se encuentra que

$$x(0) = 1$$
$$x(1) = 2$$
$$x(2) = 3$$
$$x(3) = 4$$

Todos los otros valores de $x(k)$ son cero.

Método computacional. A continuación se presentan dos enfoques de cálculo para obtener la transformada z inversa.

1. El enfoque de MATLAB
2. El enfoque de la ecuación en diferencias

Considere un sistema $G(z)$ definido mediante

$$G(z) = \frac{0.4673z^{-1} - 0.3393z^{-2}}{1 - 1.5327z^{-1} + 0.6607z^{-2}} \tag{2-19}$$

Para encontrar la transformada z inversa, se utiliza la función delta de Kronecker $\delta_0(kT)$, donde

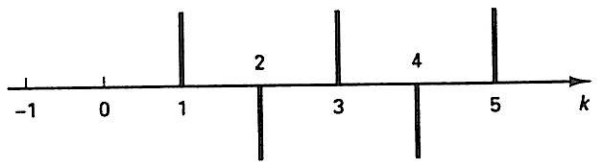


Figura 2-4 Señal alternante de 1 a −1 comenzando en $k = 1$.

$$\delta_0(kT) = 1, \quad \text{para } k = 0$$
$$= 0, \quad \text{para } k \neq 0$$

Suponga que $x(k)$, la entrada al sistema $G(z)$, es la entrada delta de Kronecker, o

$$x(k) = 1, \quad \text{para } k = 0$$
$$= 0, \quad \text{para } k \neq 0$$

La transformada z de la entrada delta de Kronecker es

$$X(z) = 1$$

Mediante la entrada delta de Kronecker, la ecuación (2-19) se puede rescribir como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.4673z^{-1} - 0.3393z^{-2}}{1 - 1.5327z^{-1} + 0.6607z^{-2}}$$
$$= \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607} \tag{2–20}$$

Enfoque de MATLAB. Se puede utilizar MATLAB para encontrar la transformada z inversa. A partir de la ecuación (2-20), la entrada $X(z)$ es la transformada z de la entrada delta de Kronecker. En MATLAB la entrada delta de Kronecker está dada por

```
x = [1   zeros(1,N)]
```

donde N corresponde al final de la duración del tiempo discreto del proceso considerado.

Puesto que la transformada z de la entrada delta de Kronecker $X(z)$ es igual a la unidad, la respuesta del sistema a esta entrada es

$$Y(z) = G(z) = \frac{0.4673z^{-1} - 0.3393z^{-2}}{1 - 1.5327z^{-1} + 0.6607z^{-2}} = \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607}$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $G(z)$ está dada por $y(0), y(1), y(2), \ldots$. Se obtendrá $y(k)$ hasta $k = 40$.

Para obtener la transformada z inversa de $G(z)$ con MATLAB, se procede como sigue: Introduzca el numerador y el denominador de la siguiente forma:

```
num = [0    0.4673   -0.3393]
den = [1   -1.5327    0.6607]
```

Introduzca la entrada delta de Kronecker.

```
x = [1   zeros(1,40)]
```

Luego introduzca el comando

```
y = filter(num,den,x)
```

para obtener la respuesta $y(k)$ desde $k = 0$ hasta $k = 40$.

En resumen, el programa para MATLAB que permite obtener la transformada z inversa o la respuesta a la entrada delta de Kronecker es como se muestra en el programa para MATLAB 2-1.

Programa para MATLAB 2-1

```
% ——— Para encontrar la transformada z inversa ———

% ***** Encontrar la transformada z inversa de G(z) es lo mismo que
% encontrar la respuesta del sistema Y(z)/X(z) = G(z) a la
% entrada delta de Kronecker *****

% ***** Introducir el numerador y denominador de G(z) *****

num = [0   0.4673   -0.3393];
den = [1   -1.5327   0.6607];

% ***** Introducir la entrada delta de Kronecker x y el comando de filtro
% y = filter (num, den, x) *****

x = [1   zeros(1,40)];
y = filter(num,den,x)
```

Si este programa se ejecuta, la pantalla mostrará la salida $y(k)$ desde $k = 0$ hasta 40 como sigue:

```
y =
  Columns 1 through 7
         0    0.4673    0.3769    0.2690    0.1632    0.0725    0.0032
  Columns 8 through 14
   -0.0429   -0.0679   -0.0758   -0.0712   -0.0591   -0.0436   -0.0277
  Columns 15 through 21
   -0.0137   -0.0027    0.0050    0.0094    0.0111    0.0108    0.0092
  Columns 22 through 28
    0.0070    0.0046    0.0025    0.0007   -0.0005   -0.0013   -0.0016
  Columns 29 through 35
   -0.0016   -0.0014   -0.0011   -0.0008   -0.0004   -0.0002    0.0000
  Columns 36 through 41
    0.0002    0.0002    0.0002    0.0002    0.0002    0.0001
```

(Observe que los cálculos en MATLAB comienzan a partir de la columna 1 y terminan en la columna 41, en lugar de comenzar en la columna 0 y terminar en la 40.) Estos valores dan la transformada z inversa de $G(z)$. Esto es,

$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0.4673$$
$$y(2) = 0.3769$$
$$y(3) = 0.2690$$

$$\vdots$$

$$y(40) = 0.0001$$

Para graficar los valores de la transformada z inversa de $G(z)$, se sigue el procedimiento siguiente.

Graficación de la respuesta a la entrada delta de Kronecker. Considere el sistema dado por la ecuación (2-20). Un posible programa para MATLAB que permite obtener la respuesta de este sistema a la entrada delta de Kronecker se muestra en el programa para MATLAB 2-2. La gráfica correspondiente se muestra en la figura 2-5.

Programa para MATLAB 2-2

```
% ——— Respuesta a la entrada delta de Kronecker ———

num = [0      0.4673   -0.3393];
den = [1   -1.5327   0.6607];
x = [1   zeros(1,40)];
v = [0   40   -1   1];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,x);
plot(k,y'o')
grid
title ('Respuesta a la entrada delta de Kronecker')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

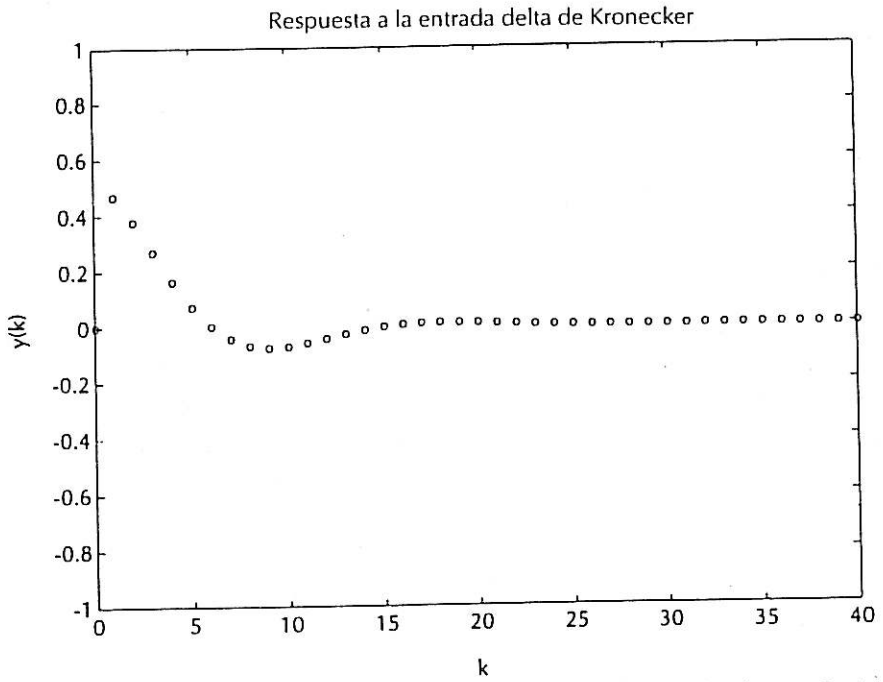


Figura 2-5 Respuesta del sistema definido por la ecuación (2-20) a la entrada delta de Kronecker.

Si se desea conectar los puntos consecutivos (abrir círculos, o) mediante líneas rectas, se necesita modificar el comando de graficación de (k, y, o) en el de (k, y, 'o', k, y, '-').

Enfoque de la ecuación en diferencias. Al observar que la ecuación (2-20) se puede escribir como

$$(z^2 - 1.5327z + 0.6607)Y(z) = (0.4673z - 0.3393)X(z)$$

esta ecuación se puede convertir en una ecuación en diferencias como sigue:

$$y(k + 2) - 1.5327y(k + 1) + 0.6607y(k) = 0.4673x(k + 1) - 0.3393x(k) \qquad (2\text{–}21)$$

donde $x(0) = 1$ y $x(k) = 0$ para $k \neq 0$, y $y(k) = 0$ para $k < 0$. [$x(k)$ es la entrada delta de Kronecker.]

Los datos iniciales $y(0)$ y $y(1)$ se pueden determinar como sigue: mediante la sustitución de $k = -2$ en la ecuación (2-21), se encuentra que

$$y(0) - 1.5327y(-1) + 0.6607y(-2) = 0.4673x(-1) - 0.3393x(-2)$$

a partir de la cual se tiene

$$y(0) = 0$$

Después, mediante la sustitución de $k = -1$ en la ecuación (2-21), se obtiene

$$y(1) - 1.5327y(0) + 0.6607y(-1) = 0.4673x(0) - 0.3393x(-1)$$

a partir de la cual se tiene

$$y(1) = 0.4673$$

Encontrar la transformada z inversa de $Y(z)$ se convierte ahora en el problema de resolver la siguiente ecuación en diferencias para $y(k)$:

$$y(k + 2) - 1.5327y(k + 1) + 0.6607y(k) = 0.4673x(k + 1) - 0.3393x(k) \qquad (2\text{–}22)$$

con los datos iniciales $y(0) = 0$, $y(1) = 0.4673$, $x(0) = 1$, y $x(k) = 0$ para $k \neq 0$. La ecuación (2-22) se puede resolver fácilmente a mano, o mediante el uso de BASIC, FORTRAN o algún otro lenguaje de programación.

Método de expansión en fracciones parciales. El método de expansión en fracciones parciales que se presenta aquí y que es idéntico al método de expansión en fracciones parciales que se utiliza en la transformada de Laplace, es muy empleado en problemas rutinarios que involucran transformadas z. El método requiere que todos los términos de la expansión en fracciones parciales se puedan reconocer fácilmente en la tabla de pares de transformadas z.

Para encontrar la transformada z inversa, si $X(z)$ tiene uno o más ceros en el origen ($z = 0$), entonces $X(z)/z$ o $X(z)$ se expande en la suma de términos sencillos de primero o segundo orden mediante la expansión en fracciones parciales y se emplea una tabla de transformadas z para encontrar la función del tiempo correspondiente para cada uno de los términos expandidos. Se debe observar que la única razón de que se expanda $X(z)/z$ en fracciones parciales es que cada uno de los términos expandidos tenga una forma que se pueda encontrar fácilmente a partir de las tablas de transformadas z de que se dispone comúnmente.

Ejemplo 2-13

Antes de estudiar el método de expansión en fracciones parciales se revisará el teorema de corrimiento. Considere la siguiente $X(z)$:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

Escribiendo $zX(z)$ como $Y(z)$, se obtiene

$$zX(z) = Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Con referencia a la tabla 2-1, la transformada z inversa de $Y(z)$ se puede obtener como sigue:

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = y(k) = a^k$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $X(z) = z^{-1}\,Y(z)$ está dada por

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(k) = y(k - 1)$$

Puesto que se supone que $y(k)$ es cero para toda $k < 0$, se tiene

$$x(k) = \begin{cases} y(k-1) = a^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Considere $X(z)$ como dada mediante

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}, \qquad m \leq n$$

Para expandir $X(z)$ en fracciones parciales, primero se factoriza el polinomio del denominador de $X(z)$ y se encuentran los polos de $X(z)$:

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)}$$

Luego se expande $X(z)/z$ en fracciones parciales, de manera que cada uno de los términos sea reconocido fácilmente en una tabla de transformadas z. Sin embargo, si se utiliza el teorema de corrimiento para tomar la transformada z inversa, se debe expandir $X(z)$ en fracciones parciales, en lugar de $X(z)/z$. La transformada z inversa de $X(z)$ se obtiene como la suma de las transformadas z inversas de las fracciones parciales.

Un procedimiento de uso muy común para los casos donde todos los polos son diferentes y hay por lo menos un cero en el origen (esto es, $b_m = 0$) es dividir ambos miembros de $X(z)$ entre z y entonces expandir $X(z)/z$ en fracciones parciales. Una vez que $X(z)/z$ se ha expandido, ésta será de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z - p_n}$$

El coeficiente a_i se puede determinar multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $z - p_i$ y haciendo que $z = p_i$. Esto dará como resultado que todos los términos del segundo miembro sean cero excepto el término a_i, en el cual el factor que está multiplicando $z - p_i$ ha sido cancelado por el denominador. Por lo tanto, se tiene

$$a_i = \left[(z - p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

Observe que dicha forma para determinar a_i es válida sólo para polos simples.

Si $X(z)/z$ involucra un polo múltiple, por ejemplo, un polo doble en $z = p_1$ y no tiene más polos, entonces $X(z)/z$ tendrá la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{(z - p_1)^2} + \frac{c_2}{z - p_1}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 se determinan a partir de

$$c_1 = \left[(z - p_1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

$$c_2 = \left\{\frac{d}{dz}\left[(z - p_1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=p_1}$$

Se debe observar que si $X(z)/z$ involucra un polo triple en $z = p_1$, entonces las fracciones parciales deben incluir un término $(z+p_1)/(z-p_1)^3$. (Véase el problema A-2-8.)

Ejemplo 2-14

Dada la transformada z

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

donde a es una constante y T es el período de muestreo, determine la transformada z inversa $x(kT)$ utilizando el método de expansión en fracciones parciales.

La expansión en fracciones parciales de $X(z)/z$ se tiene que es

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}$$

De este modo,

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

A partir de la tabla 2-1 se encuentra

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}}\right] = 1$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}\right] = e^{-akT}$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ es

$$x(kT) = 1 - e^{-akT}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 2-15

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^2 + z + 2}{(z - 1)(z^2 - z + 1)}$$

mediante el método de expansión en fracciones parciales.

Se puede expandir $X(z)$ en fracciones parciales como sigue:

$$X(z) = \frac{4}{z - 1} + \frac{-3z + 2}{z^2 - z + 1} = \frac{4z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{-3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Si observamos que los dos polos involucrados en el término cuadrático de esta última ecuación son complejos conjugados, $X(z)$ se rescribe como sigue:

$$X(z) = \frac{4z^{-1}}{1 - z^{-1}} - 3\left(\frac{z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right) + \frac{0.5z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= 4z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}} - 3z^{-1}\frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} + z^{-1}\frac{0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Puesto que

$$\mathcal{Z}[e^{-akT}\cos\omega kT] = \frac{1 - e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$\mathcal{Z}[e^{-akT}\operatorname{sen}\omega kT] = \frac{e^{-aT}z^{-1}\operatorname{sen}\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

al identificar $e^{-2aT} = 1$ y $\cos\omega T = \frac{1}{2}$ en este caso, se tiene $\omega T = \pi/3$ y $\operatorname{sen}\omega T = \sqrt{3}/2$. Por lo que se obtiene

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right] = 1^k\cos\frac{k\pi}{3}$$

y

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(\sqrt{3}/2)z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}1^k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{3}$$

De este modo, se tiene

$$x(k) = 4(1^{k-1}) - 3(1^{k-1})\cos\frac{(k-1)\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1^{k-1})\operatorname{sen}\frac{(k-1)\pi}{3}$$

Al rescribir, obtenemos

$$x(k) = \begin{cases} 4 - 3\cos\dfrac{(k-1)\pi}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\dfrac{(k-1)\pi}{3}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Los primeros valores de $x(k)$ están dados por

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 1$$
$$x(2) = 3$$
$$x(3) = 6$$
$$x(4) = 7$$
$$x(5) = 5$$
$$\vdots$$

Observe que la transformada z inversa de $X(z)$ también se puede obtener como sigue:

$$X(z) = 4z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}} - 3\left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right) + 2z^{-1}\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Puesto que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right] = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA OVIEDO

y

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}(1^k)\ \text{sen}\frac{k\pi}{3}$$

se tiene

$$x(k) = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{3}\ \text{sen}\dfrac{k\pi}{3} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\ \text{sen}\dfrac{(k-1)\pi}{3}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

Aunque esta solución se podría ver diferente a la que se obtuvo en un principio, ambas soluciones son correctas y dan los mismos valores para $x(k)$.

Método de la integral de inversión. Ésta es una técnica útil para la obtención de la transformada z inversa. La integral de inversión de la transformada $zX(z)$ está dada por

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(kT) = x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}\,dz \tag{2–23}$$

donde C es un círculo con centro en el origen del plano z tal que todos los polos de $X(z)z^{k-1}$ están dentro de él. [Para obtener la ecuación (2-23), véase el apéndice B.]

La ecuación que da la transformada z inversa en términos de los residuos se puede obtener si se utiliza la teoría de la variable compleja. Ésta se puede obtener como sigue:

$$\begin{aligned} x(kT) = x(k) &= K_1 + K_2 + \cdots + K_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\text{residuo de } X(z)^{k-1} \text{ en el polo } z = z_i \text{ de } X(z)z^{k-1}] \end{aligned} \tag{2–24}$$

donde $K_1, K_2, \ldots K_m$ denotan los residuos de $X(z)z^{k-1}$ en los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, respectivamente. (Para obtener esta ecuación, véase el apéndice B.) Al evaluar los residuos, observe que si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ contiene un polo simple en $z = z_i$ entonces el residuo K correspondiente está dado por

$$K = \lim_{z \to z_i}[(z - z_i)X(z)z^{k-1}] \tag{2–25}$$

Si $X(z)z^{k-1}$ contiene un polo múltiple z_j de orden q, entonces el residuo K está dado por

$$K = \frac{1}{(q-1)!}\lim_{z \to z_j}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}[(z - z_j)^q X(z)z^{k-1}] \tag{2–26}$$

Observe que los valores de k en las ecuaciones (2-24), (2-25) y (2-26) son enteros positivos.

Si $X(z)$ tiene un cero de orden r en el origen, entonces $X(z)z^{k-1}$ en la ecuación (2-24) involucrará un cero de orden $r + k - 1$ en el origen. Si $r \geq 1$, entonces $r + k - 1 \geq 0$ para $k \geq 0$, y no hay polo en $z = 0$ en $X(z)z^{k-1}$. Sin embargo, si $r \leq 0$, entonces habrá un polo en $z = 0$ para uno o más valores positivos (no negativos) de k. En tal caso, es necesaria la inversión por separado de la ecuación (2-24) para cada valor de k. (Véase el problema A-2-9.)

Debe observarse que el método de la integral de inversión, cuando se evalúa por residuos, es una técnica muy sencilla para obtener la transformada z inversa, siempre que $X(z)z^{k-1}$, no tenga polos en el origen, $z = 0$. Sin embargo, si $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo simple o uno múltiple en $z = 0$, el cálculo se puede tornar tedioso y el método de expansión en fracciones parciales podría ser más sencillo de

aplicar. Por otro lado, en ciertos problemas el enfoque de expansión en fracciones parciales puede ser muy laborioso. En esos casos es más conveniente el método de la integral de inversión.

Ejemplo 2-16

Obtenga $x(kT)$ empleando el método de la integral de inversión cuando $X(z)$ está dada por

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

Observe que

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $X(z)z^{k-1}$ tiene dos polos simples en $z = z_1 = 1$ y $z = z_2 = e^{-aT}$. Por lo tanto, a partir de la ecuación (2-24), se tiene

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo de } \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \text{ en el polo } z = z_i \right]$$
$$= K_1 + K_2$$

donde

$$K_1 = [\text{residuo en el polo simple } z = 1]$$
$$= \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = 1$$
$$K_2 = [\text{residuo en el polo simple } z = e^{-aT}]$$
$$= \lim_{z \to e^{-aT}} \left[(z - e^{-aT}) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = -e^{-akT}$$

Por lo tanto,

$$x(kT) = K_1 + K_2 = 1 - e^{-akT}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 2-17

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})}$$

empleando el método de la integral de inversión.

Observe que

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})}$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo simple en $z = z_1 = e^{-aT}$ y un polo doble en $z = z_2 = 1$. Por lo tanto, a partir de la ecuación (2-24), se obtiene

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo de } \frac{z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})} \text{ en el polo } z = z_i \right]$$
$$= K_1 + K_2$$

donde

$$K_1 = [\text{residuo en el polo simple } z = e^{-aT}]$$

$$= \lim_{z \to e^{-aT}} \left[(z - e^{-aT}) \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z - e^{-aT})} \right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1 - e^{-aT})^2}$$

$$K_2 = [\text{residuo en el polo doble } z = 1]$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z - e^{-aT})} \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{k+1}}{z - e^{-aT}} \right)$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{(k+1)z^k(z - e^{-aT}) - z^{k+1}}{(z - e^{-aT})^2}$$

$$= \frac{k}{1 - e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1 - e^{-aT})^2}$$

Por lo tanto,

$$x(kT) = K_1 + K_2 = \frac{e^{-aT}e^{-akT}}{(1 - e^{-aT})^2} + \frac{k}{1 - e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1 - e^{-aT})^2}$$

$$= \frac{kT}{T(1 - e^{-aT})} - \frac{e^{-aT}(1 - e^{-akT})}{(1 - e^{-aT})^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2-6 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA z PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Las ecuaciones en diferencias se pueden solucionar fácilmente mediante el uso de una computadora digital, siempre que se proporcionen los valores numéricos de todos los coeficientes y los parámetros. Sin embargo, las expresiones en forma cerrada para $x(k)$ no se pueden obtener a partir de la solución por computadora, excepto para casos muy especiales. La utilidad del método de la transformada z es que permite obtener la expresión en forma cerrada para $x(k)$.

Considere un sistema en tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \cdots + a_n x(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \qquad (2\text{–}27)$$

donde $u(k)$ y $x(k)$ son la entrada y salida del sistema, respectivamente, en la k-ésima iteración. Al describir dicha ecuación en diferencias en el plano z, se toma la transformada z de cada uno de los términos en la ecuación.

Defínase

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$$

Entonces $x(k+1)$, $x(k+2)$, $x(k+3)$, . . . y $x(k-1)$, $x(k-2)$, $x(k-3)$, . . . se pueden expresar en términos de $X(z)$ y de las condiciones iniciales. Sus transformadas z exactas se obtuvieron en la sección 2-4 y se resumieron en la tabla 2-3 por conveniencia.

A continuación se presentan dos problemas como ejemplo de la solución de ecuaciones en diferencias mediante el método de la transformada z.

TABLA 2-3 TRANSFORMADAS z DE $x(k + m)$ Y $x(k - m)$

Función discreta	Transformada z
$x(k + 4)$	$z^4X(z) - z^4x(0) - z^3x(1) - z^2x(2) - zx(3)$
$x(k + 3)$	$z^3X(z) - z^3x(0) - z^2x(1) - zx(2)$
$x(k + 2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
$x(k + 1)$	$zX(z) - zx(0)$
$x(k)$	$X(z)$
$x(k - 1)$	$z^{-1}X(z)$
$x(k - 2)$	$z^{-2}X(z)$
$x(k - 3)$	$z^{-3}X(z)$
$x(k - 4)$	$z^{-4}X(z)$

Ejemplo 2-18

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias empleando el método de la transformada z:

$$x(k + 2) + 3x(k + 1) + 2x(k) = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 1$$

Observe primero que las transformadas z de $x(k + 2)$, $x(k + 1)$ y $x(k)$ están dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{Z}[x(k + 2)] = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$

$$\mathcal{Z}[x(k + 1)] = zX(z) - zx(0)$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$$

Al tomar las transformadas z de ambos miembros de la ecuación en diferencias dada, se obtiene

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) + 3zX(z) - 3zx(0) + 2X(z) = 0$$

Al sustituir las condiciones iniciales y simplificar, se obtiene

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{z}{z + 1} - \frac{z}{z + 2}$$

$$= \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

Si se observa que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 + z^{-1}}\right] = (-1)^k, \qquad \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 + 2z^{-1}}\right] = (-2)^k$$

se tiene

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 2-19

Obtenga la solución de la siguiente ecuación en diferencias en términos de $x(0)$ y $x(1)$:

$$x(k + 2) + (a + b)x(k + 1) + abx(k) = 0$$

donde a y b son constantes y $k = 0, 1, 2, \ldots$.

La transformada z de esta ecuación en diferencias está dada por

$$[z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)] + (a + b)[zX(z) - zx(0)] + abX(z) = 0$$

o

$$[z^2 + (a + b)z + ab]X(z) = [z^2 + (a + b)z]x(0) + zx(1)$$

Al resolver esta última ecuación para $X(z)$ se obtiene

$$X(z) = \frac{[z^2 + (a + b)z]x(0) + zx(1)}{z^2 + (a + b)z + ab}$$

Nótese que las constantes a y b son los negativos de las dos raíces de la ecuación característica. Ahora se considerarán dos casos por separado: **a)** $a \neq b$ y **b)** $a = b$.

a) Para el caso donde $a \neq b$, al expandir $X(z)/z$ en fracciones parciales, se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{bx(0) + x(1)}{b - a}\frac{1}{z + a} + \frac{ax(0) + x(1)}{a - b}\frac{1}{z + b}, \qquad a \neq b$$

a partir de lo cual se obtiene

$$X(z) = \frac{bx(0) + x(1)}{b - a}\frac{1}{1 + az^{-1}} + \frac{ax(0) + x(1)}{a - b}\frac{1}{1 + bz^{-1}}$$

La transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado

$$x(k) = \frac{bx(0) + x(1)}{b - a}(-a)^k + \frac{ax(0) + x(1)}{a - b}(-b)^k, \qquad a \neq b$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Para el caso donde $a = b$, la transformada z de $X(z)$ se convierte en

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{(z^2 + 2az)x(0) + zx(1)}{z^2 + 2az + a^2} \\ &= \frac{zx(0)}{z + a} + \frac{z[ax(0) + x(1)]}{(z + a)^2} \\ &= \frac{x(0)}{1 + az^{-1}} + \frac{[ax(0) + x(1)]z^{-1}}{(1 + az^{-1})^2} \end{aligned}$$

La transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado

$$x(k) = x(0)(-a)^k + [ax(0) + x(1)]k(-a)^{k-1}, \qquad a = b$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2-7 COMENTARIOS FINALES

En este capítulo se ha presentado la teoría básica del método de la transformada z. La transformada z tiene el mismo propósito para sistemas en tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo que la transformada de Laplace para sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes en el tiempo.

El método por computadora para el análisis de datos en tiempo discreto da como resultado ecuaciones en diferencias. Con el método de la transformada z, las ecuaciones en diferencias lineales e invariantes en el tiempo se pueden transformar en ecuaciones algebraicas. Esto facilita el análisis de la respuesta transitoria de los sistema de control digital. También, el método de la transformada z

permite el uso de las técnicas convencionales de análisis y diseño disponibles para sistemas de control analógicos (en tiempo continuo), tales como la técnica del lugar geométrico de las raíces. El análisis y diseño mediante la respuesta en frecuencia se puede llevar a cabo si se convierte el plano z en el plano w. Asimismo, la ecuación característica transformada en el dominio de z permite aplicar una prueba sencilla de estabilidad, tal como el criterio de estabilidad de Jury. Estos temas se estudiarán con detalle en los capítulos 3 y 4.

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Ejemplo A-2-1

Obtenga la transformada z de $\mathbf{G}^k$, donde $\mathbf{G}$ es una matriz constante de $n \times n$.

Solución Por definición, la transformada z de $\mathbf{G}^k$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\mathbf{G}^k] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^k z^{-k} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{G}z^{-1} + \mathbf{G}^2 z^{-2} + \mathbf{G}^3 z^{-3} + \cdots \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})^{-1} \\ &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z\end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{G}^k$ se puede obtener tomando la transformada z inversa de $(\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})^{-1}$ o $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z$. Esto es,

$$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})^{-1}] = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z]$$

Ejemplo A-2-2

Obtenga la transformada z de k^2.

Solución Por definición, la transformada z de k^2 es

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[k^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = z^{-1} + 4z^{-2} + 9z^{-3} + 16z^{-4} + \cdots \\ &= z^{-1}(1 + z^{-1})(1 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 10z^{-3} + 15z^{-4} + \cdots) \\ &= \frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}\end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la expresión en forma cerrada $(1 - z^{-1})^{-3}$ para la serie infinita involucrada en el problema. (Véase el apéndice B.)

Ejemplo A-2-3

Obtenga la transformada z de ka^{k-1} mediante dos métodos.

Solución

Método 1. Por definición, la transformada z de ka^{k-1} está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[ka^{k-1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} ka^{k-1} z^{-k} \\ &= z^{-1} + 2az^{-2} + 3a^2 z^{-3} + 4a^3 z^{-4} + \cdots \\ &= z^{-1}(1 + 2az^{-1} + 3a^2 z^{-2} + 4a^3 z^{-3} + \cdots) \\ &= \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}\end{aligned}$$

Método 2. La expresión mediante la sumatoria para la transformada z de ka^{k-1} también se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{Z}[ka^{k-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} ka^{k-1}z^{-k} = a^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} ka^{k}z^{-k} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{z}{a}\right)^{-k}$$
$$= \frac{1}{a}\frac{(z/a)^{-1}}{[1-(z/a)^{-1}]^2} = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

Ejemplo A-2-4

Muestre que

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x(h)\right] = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k-1} x(h)\right] = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z)$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} X(z) \tag{2-28}$$

También muestre que

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=i}^{k} x(h)\right] = \frac{1}{1-z^{-1}}\left[X(z) - \sum_{h=0}^{i-1} x(h)z^{-h}\right] \tag{2-29}$$

donde $1 \le i \le k-1$.

Solución Defina

$$y(k) = \sum_{h=0}^{k} x(h), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

de modo que

$$y(0) = x(0)$$
$$y(1) = x(0) + x(1)$$
$$y(2) = x(0) + x(1) + x(2)$$
$$\vdots$$
$$y(k) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots + x(k)$$

Entonces, es claro que

$$y(k) - y(k-1) = x(k)$$

Si escribimos las transformadas z de $x(k)$ y $y(k)$ como $X(z)$ y $Y(z)$, respectivamente, y tomamos la transformada z de esta última ecuación, se tiene

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$$

Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

o

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x(h)\right] = \mathcal{Z}[y(k)] = Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

y

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k-1} x(h)\right] = \mathcal{Z}[y(k-1)] = z^{-1} Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Al emplear el teorema del valor final, se encuentra que

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{k \to \infty} \left[\sum_{h=0}^{k} x(h)\right] = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)\right]$$

o

$$\sum_{h=0}^{\infty} x(h) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{z \to 1} X(z)$$

Después, para probar la ecuación (2-29), primero se define

$$\tilde{y}(k) = \sum_{h=i}^{k} x(h) = x(i) + x(i+1) + \cdots + x(k)$$

donde $1 \leq i \leq k - 1$. Defina también

$$\tilde{X}(z) = x(i)z^{-i} + x(i+1)z^{-(i+1)} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots$$

Entonces, al observar que

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

se obtiene

$$\tilde{X}(z) = X(z) - \sum_{h=0}^{i-1} x(h)z^{-h}$$

Puesto que

$$\tilde{y}(k) - \tilde{y}(k-1) = x(k), \qquad k = i, i+1, i+2, \ldots$$

la transformada z de esta última ecuación se convierte en

$$\tilde{Y}(z) - z^{-1}\tilde{Y}(z) = \tilde{X}(z)$$

[Observe que la transformada z de $x(k)$, que empieza con $k = i$, es $\tilde{X}(z)$, no $X(z)$.] Así,

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=i}^{k} x(h)\right] = \tilde{Y}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tilde{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \left[X(z) - \sum_{h=0}^{i-1} x(h)z^{-h}\right]$$

Ejemplo A-2-5

Obtenga la transformada z de la curva $x(t)$ que se muestra en la figura 2-6. Suponga que el período de muestreo T es 1 seg.

Solución A partir de la figura 2-6 se obtiene

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 0.25$$
$$x(2) = 0.50$$
$$x(3) = 0.75$$
$$x(k) = 1, \qquad k = 4, 5, 6, \ldots$$

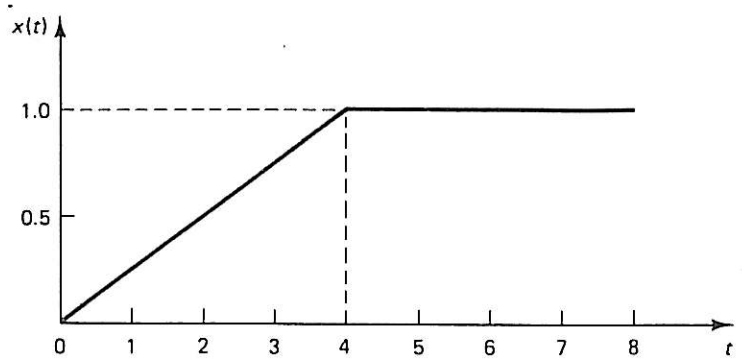


Figura 2-6 Curva $x(t)$.

Entonces la transformada z de $x(k)$ se puede dar mediante

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= 0.25z^{-1} + 0.50z^{-2} + 0.75z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \cdots \\ &= 0.25(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}) + z^{-4}\frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{4(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{1}{4}\frac{z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{z^{-1}(1 - z^{-4})}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Nótese que la curva $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{4}(t - 4)1(t - 4)$$

donde $1(t-4)$ es la función escalón unitario que se presenta en $t = 4$. Puesto que el período de muestreo es $T = 1$ seg, la transformada z de $x(t)$ también se puede obtener como sigue:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[\tfrac{1}{4}t] - \mathcal{Z}[\tfrac{1}{4}(t - 4)1(t - 4)] \\ &= \frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{4}\frac{z^{-4}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{z^{-1}(1 - z^{-4})}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Ejemplo A-2-6

Considere $X(z)$, donde

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z - 2)^2(z - 1)}$$

Obtenga la transformada z inversa de $X(z)$.

Solución Se expandirá $X(z)/z$ en fracciones parciales como sigue:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{(z - 2)^2(z - 1)} = \frac{9}{(z - 2)^2} - \frac{1}{z - 2} + \frac{3}{z - 1}$$

Entonces

$$X(z) = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-z^{-1}}$$

Las transformadas z inversas de los términos individuales dan

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}\right] = k(2^{k-1}), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-2z^{-1}}\right] = 2^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = 1$$

y por tanto

$$x(k) = 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Ejemplo A-2-7

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2}$$

Solución Al expandir $X(z)$ en fracciones parciales, se obtiene

$$X(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - z^{-2} - z^{-1}$$

[Observe que en este ejemplo, $X(z)$ involucra un polo doble en $z = 0$. Por lo que la expansión en fracciones parciales debe incluir los términos $1/(z^2)$ y $1/z$.] Refiriéndose a la tabla 2-1, se encuentra la transformada z inversa de cada uno de los términos de esta última ecuación. Esto es,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right] = \begin{cases} 2^{k-1}, & k = 1,2,3,\ldots \\ 0, & k \le 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^{-2}] = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ puede darse mediante

$$x(k) = \begin{cases} 0-0-0=0, & k = 0 \\ 1-0-1=0, & k = 1 \\ 2-1-0=1, & k = 2 \\ 2^{k-1}-0-0=2^{k-1}, & k = 3,4,5,\ldots \end{cases}$$

Al reescribir, se tiene

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0,1 \\ 1, & k = 2 \\ 2^{k-1}, & k = 3,4,5,\ldots \end{cases}$$

Para verificar este resultado, se podría aplicar el método de la división directa a este problema. Notando que

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} = \frac{z^{-2}+2z^{-3}}{1-2z^{-1}}$$
$$= z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + 16z^{-5} + 32z^{-6} + \cdots$$
$$= z^{-2} + (2^{3-1})z^{-3} + (2^{4-1})z^{-4} + (2^{5-1})z^{-5} + (2^{6-1})z^{-6} + \cdots$$

se encuentra que

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1 \\ 1, & k = 2 \\ 2^{k-1}, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

Ejemplo A-2-8

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

Solución La transformada z inversa de $z^{-2}/(1-z^{-1})^3$ no está disponible en la mayoría de la tablas de transformadas z. Sin embargo, es posible escribir la $X(z)$ dada como una suma de transformadas z que, por lo regular, se encuentran en las tablas de transformadas z. Puesto que el denominador de $X(z)$ es $(1-z^{-1})^3$ y la transformada z de k^2 es $z^{-1}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})^3$, rescríbase $X(z)$ como

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^3}$$
$$= \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}-z^{-2}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

o

$$\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$$

a partir de lo cual se obtiene la siguiente expansión en fracciones parciales:

$$\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

Las transformadas z de los dos términos del segundo miembro de esta última ecuación se pueden encontrar en la tabla 2-1. Así,

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}\right] = \frac{1}{2}(k^2-k) = \frac{1}{2}k(k-1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se debe observar que si la $X(z)$ dada se expande en otras fracciones parciales, entonces la transformada z inversa no se podrá obtener.

Como un enfoque alternativo, la transformada z inversa de $X(z)$ podrá obtenerse mediante el método de la integral de inversión. Primero, observe que

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^k}{(z-1)^3}$$

Por lo tanto, para $k = 0, 1, 2, \ldots, X(z)z^{k-1}$, tiene un polo triple en $z = 1$. Con referencia a la ecuación (2-24), se tiene

$$x(k) = \left[\text{residuo de } \frac{z^k}{(z-1)^3} \text{ en el polo triple } z = z_1\right]$$

$$= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\frac{z^k}{(z-1)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z^k)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(kz^{k-1})$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}[k(k-1)z^{k-2}]$$

$$= \frac{1}{2}k(k-1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo A-2-9

Con el método de la integral de inversión, obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

Solución Observe que

$$X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Para $k = 0$, nótese que $X(z)z^{k-1}$ se convierte en

$$X(z)z^{k-1} = \frac{10}{(z-1)(z-2)z}, \qquad k = 0$$

Por lo tanto, para $k = 0$, $X(z)z^{k-1}$ tiene tres polos simples, $z = z_1 = 1$, $z = z_2 = 2$ y $z = z_3 = 0$. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$; sin embargo, $X(z)z^{k-1}$ tiene sólo dos polos simples, $z = z_1 = 1$ y $z = z_2 = 2$. Por lo tanto, se debe considerar $x(0)$ y $x(k)$ (donde $k = 1, 2, 3, \ldots$) por separado.

Para $k = 0$. Para este caso, con referencia a la ecuación (2-24), se tiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^{3}\left[\text{residuo de } \frac{10}{(z-1)(z-2)z} \text{ en el polo } z = z_i\right]$$

$$= K_1 + K_2 + K_3$$

donde

$$K_1 = [\text{residuo en el polo simple } z = 1]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{10}{(z-1)(z-2)z}\right] = -10$$

$$K_2 = [\text{residuo en el polo simple } z = 2]$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{10}{(z-1)(z-2)z}\right] = 5$$

$$K_3 = [\text{residuo en el polo simple } z = 0]$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[z\frac{10}{(z-1)(z-2)z}\right] = 5$$

Por lo tanto,

$$x(0) = K_1 + K_2 + K_3 = -10 + 5 + 5 = 0$$

Para k = 1, 2, 3, ... Para este caso, la ecuación (2-24) se convierte en

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo de} \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \text{ en el polo } z = z_i \right]$$
$$= K_1 + K_2$$

donde

$$K_1 = [\text{residuo en el polo simple } z = 1]$$
$$= \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = -10$$
$$K_2 = [\text{residuo en el polo simple } z = 2]$$
$$= \lim_{z \to 2} \left[(z-2) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = 10(2^{k-1})$$

Así,

$$x(k) = K_1 + K_2 = -10 + 10(2^{k-1}) = 10(2^{k-1} - 1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de la $X(z)$ dada se puede escribir como

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 10(2^{k-1} - 1), & k = 1, 2, 3, \ldots . \end{cases}$$

Una forma alterna para escribir $x(k)$ para $k \geq 0$ es

$$x(k) = 5\delta_0(k) + 10(2^{k-1} - 1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\delta_0(k)$ es la función delta de Kronecker y está dada por

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo A-2-10

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-1)^2} \tag{2-30}$$

empleando los cuatro métodos que se presentaron en la sección 2-5.

Solución

Método 1: método de la división directa. Primero se rescribe $X(z)$ como un cociente de dos polinomios en z^{-1}:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Al dividir el numerador entre el denominador, se obtiene

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 10z^{-3} + \cdots$$

Por lo tanto,

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 4$$
$$x(2) = 7$$
$$x(3) = 10$$
$$\vdots$$

Método 2: método computacional (enfoque de MATLAB). La $X(z)$ se puede escribir como

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 2z + 1}$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ se puede obtener con MATLAB como sigue: Defina

```
num = [1   2   0]
den = [1   -2   1]
```

Si se desean los valores de $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 30$, entonces introduzca la entrada delta de Kronecker como sigue:

```
u = [1   zeros(1,30)]
```

Luego introduzca el comando

```
x = filter(num,den,u)
```

Véase el programa para MATLAB 2-3. [La pantalla mostrará la salida $x(k)$ desde $k = 0$ hasta $k = 30$.] (Los cálculos de MATLAB comienzan desde la columna 1 y terminan hasta la columna 31, en lugar de empe-

Programa para MATLAB 2-3

```
num = [1   2   0];
den = [1   -2   1];
u = [1 zeros(1,30)];
x = filter(num,den,u)


x =

  columns 1 through 12

     1     4     7    10    13    16    19    22    25    28    31    34

Columns 13 through 24

    37    40    43    46    49    52    55    58    61    64    67    70

Columns 25 through 31

    73    76    79    82    85    88    91
```

zar en la columna 0 y terminar en la 30.) Los valores de $x(k)$ dan la transformada z inversa de $X(z)$. Esto es,

$$x(0) = 1$$
$$x(1) = 4$$
$$x(2) = 7$$
$$\vdots$$
$$x(30) = 91$$

Método 3: método de la expansión en fracciones parciales. Se expande $X(z)$ en las siguientes fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} = 1 + \frac{3z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Entonces, si advertimos que

$$\mathcal{Z}^{-1}[1] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right] = \begin{cases} 1, & k = 1,2,3,\ldots \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$x(0) = 1$$
$$x(k) = 3k + 1, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

que se pueden combinar en una ecuación en la siguiente forma:

$$x(k) = 3k + 1, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Observe que si se expande $X(z)$ en las siguientes fracciones parciales

$$X(z) = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{3z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

entonces la transformada z inversa de $X(z)$ se convierte en

$$x(0) = 1$$
$$x(k) = 4 + 3(k-1) = 3k + 1, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

o

$$x(k) = 3k + 1, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

que es el mismo resultado que se obtuvo mediante la expansión de $X(z)$ en otras fracciones parciales. [Recuerde que $X(z)$ se puede expandir en diferentes fracciones parciales, pero el resultado final para la transformada z inversa es el mismo.]

Método 4: método de la integral de inversión. Primero, observe que

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(z+2)z^k}{(z-1)^2}$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo doble en $z = 1$. Por lo tanto, con referencia a la ecuación (2-24),

se tiene

$$x(k) = \left[\text{residuo de } \frac{(z+2)z^k}{(z-1)^2} \text{ en el polo doble } z = 1\right]$$

Así,

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{(z+2)z^k}{(z-1)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z+2)z^k] \\ &= 3k+1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo A-2-11

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias:

$$2x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) = u(k)$$

donde $x(k) = 0$ para $k < 0$ y

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Solución Al tomar la transformada z de la ecuación en diferencias dada,

$$2X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Al resolver esta última ecuación para $X(z)$, se obtiene

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{2-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z^3}{(z-1)(2z^2-2z+1)}$$

Al expandir $X(z)$ en fracciones parciales, se tiene

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z^2+z}{2z^2-2z+1} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-1+z^{-1}}{2-2z^{-1}+z^{-2}}$$

Nótese que los dos polos involucrados en el término cuadrático en esta última ecuación son complejos conjugados. Por lo tanto, $X(z)$ se rescribe como sigue:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1-0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{1}{2}\frac{0.5z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Refiriéndose a la fórmula de las transformadas z de las funciones coseno y seno amortiguados, se identifica $e^{-2aT} = 0.5$ y $\cos \omega T = 1/\sqrt{2}$ para este problema. Por lo tanto, se obtiene que $\omega T = \pi/4$, $\operatorname{sen} \omega T = 1/\sqrt{2}$, y $e^{-aT} = 1/\sqrt{2}$. Entonces la transformada z inversa de $X(z)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(k) &= 1 - \tfrac{1}{2}e^{-akT}\cos \omega kT + \tfrac{1}{2}e^{-akT}\operatorname{sen} \omega kT \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos\frac{k\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

a partir de la cual se obtiene

$$x(0) = 0.5$$

$$x(1) = 1$$

$$x(2) = 1.25$$
$$x(3) = 1.25$$
$$x(4) = 1.125$$
$$\vdots$$

Ejemplo A-2-12

Considere la ecuación en diferencias

$$x(k + 2) - 1.3679x(k + 1) + 0.3679x(k) = 0.3679u(k + 1) + 0.2642u(k)$$

donde $x(k)$ es la salida y $x(k) = 0$ para $k \leq 0$ y donde $u(k)$ es la entrada y está dada por

$$u(k) = 0, \quad k < 0$$
$$u(0) = 1$$
$$u(1) = 0.2142$$
$$u(2) = -0.2142$$
$$u(k) = 0, \quad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Determine la salida $x(k)$.

Solución Al tomar la transformada z de la ecuación en diferencias dada, se obtiene

$$[z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)] - 1.3679[zX(z) - zx(0)] + 0.3679X(z)$$
$$= 0.3679[zU(z) - zu(0)] + 0.2642U(z) \qquad (2\text{–}31)$$

Al sustituir $k = -1$ en la ecuación en diferencias dada, se encuentra que

$$x(1) - 1.3679x(0) + 0.3679x(-1) = 0.3679u(0) + 0.2642u(-1)$$

Puesto que $x(0) = x(-1) = 0$ y debido a que $u(-1) = 0$ y $u(0) = 1$, se obtiene

$$x(1) = 0.3679u(0) = 0.3679$$

Al sustituir los datos iniciales

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.3679, \quad u(0) = 1$$

en la ecuación (2-31), se tiene que

$$z^2X(z) - 0.3679z - 1.3679zX(z) + 0.3679X(z)$$
$$= 0.3679zU(z) - 0.3679z + 0.2642U(z)$$

Al resolver para $X(z)$, se encuentra que

$$X(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}U(z)$$

La transformada z de la entrada $u(k)$ es

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = 1 + 0.2142z^{-1} - 0.2142z^{-2}$$

Por tanto,

$$X(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}(1 + 0.2142z^{-1} - 0.2142z^{-2})$$
$$= \frac{0.3679z^{-1} + 0.3430z^{-2} - 0.02221z^{-3} - 0.05659z^{-4}}{1 - 1.3679z^{-1} + 0.3679z^{-2}}$$
$$= 0.3679z^{-1} + 0.8463z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots$$

Así, la transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 0.3679$$
$$x(2) = 0.8463$$
$$x(k) = 1, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Ejemplo A-2-13

Considere la ecuación en diferencias

$$x(k + 2) = x(k + 1) + x(k)$$

donde $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$. Observe que $x(2) = 1$, $x(3) = 2$, $x(4) = 3$, ... La serie 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . se conoce como serie de Fibonacci. Obtenga la solución general $x(k)$ en una forma cerrada. Muestre que el valor límite de $x(k + 1)/x(k)$, a medida que k se aproxima a infinito es $(1 + \sqrt{5})/2$, o aproximadamente 1.6180.

Solución Al tomar la transformada z de esta ecuación en diferencias, se obtiene

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) = zX(z) - zx(0) + X(z)$$

Resolver para $X(z)$ da como resultado

$$X(z) = \frac{z^2x(0) + zx(1) - zx(0)}{z^2 - z - 1}$$

Al sustitur los datos iniciales $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$ en esta última ecuación, se tiene

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z^{-1}}\right)$$

La transformada z inversa de $X(z)$ es

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Observe que aunque esta última ecuación involucra a $\sqrt{5}$, las raíces cuadradas del segundo miembro de esta última ecuación se cancelan, y los valores de $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ resultan ser enteros positivos.

El valor límite de $x(k+1)/x(k)$ a medida que k tiende a infinito se obtiene como sigue:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(k+1)}{x(k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}$$

Puesto que $|(1-\sqrt{5})/2|<1$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\to 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(k+1)}{x(k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180$$

Ejemplo A-2-14

Con referencia al problema A-2-13, escriba un programa para MATLAB a fin de generar la serie de Fibonacci. Desarrolle la serie de Fibonacci hasta $k=30$.

Solución La transformada z de la ecuación en diferencias

$$x(k+2)=x(k+1)+x(k)$$

está dada por

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)=zX(z)-zx(0)+X(z)$$

Al resolver para $X(z)$ y sustituir los datos iniciales $x(0)=0$ y $x(1)=1$, se tiene que

$$X(z)=\frac{z}{z^2-z-1}$$

La transformada z inversa de $X(z)$ dará la serie de Fibonacci.

Para obtener la transformada z inversa de $X(z)$, obtenga la respuesta de este sistema a la entrada delta de Kronecker. El programa para MATLAB 2-4 dará como resultado la serie de Fibonacci.

Programa para MATLAB 2-4

```
% ——— Serie de Fibonacci ———

% ***** La serie de Fibonacci se puede generar como la
% respuesta de X(z) a la entrada delta de Kronecker, donde
% X(z) = z/(z^2 - z - 1) *****

num = [0   1   0];
den = [1   -1   -1];
u = [1   zeros(1,30)];
x = filter(num,den,u)
```

La salida filtrada y que se muestra a continuación da la serie de Fibonacci.

```
x =

  Columns 1 through 6

     0     1     1     2     3     5

  Columns 7 through 12

     8    13    21    34    55    89

  Columns 13 through 18

   144   233   377   610   987  1597

  Columns 19 through 24

  2584  4181  6765 10946 17711 28657

  Columns 25 through 30

 46368 75025 121393 196418 317811 514229

  Column 31

832040
```

Observe que la columna 1 corresponde a $k = 0$ y la columna 31 corresponde a $k = 30$. La serie de Fibonacci está dada por

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \\ x(2) &= 1 \\ x(3) &= 2 \\ x(4) &= 3 \\ x(5) &= 5 \\ &\vdots \\ x(29) &= 514{,}229 \\ x(30) &= 832{,}040 \end{aligned}$$

Ejemplo A-2-15

Considere la ecuación en diferencias

$$x(k + 2) + \alpha x(k + 1) + \beta x(k) = 0 \qquad (2\text{–}32)$$

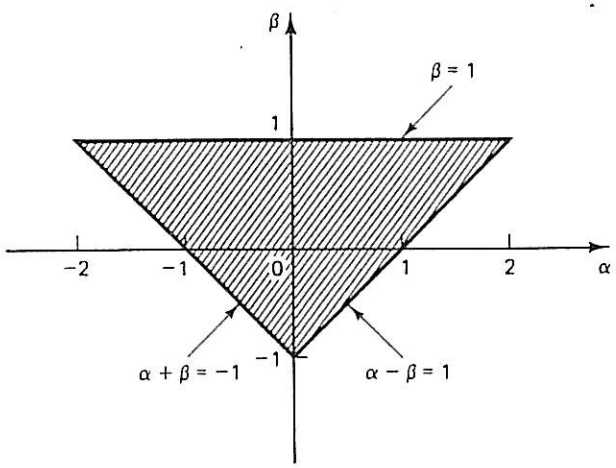


Figura 2-7 Región del plano $\alpha\beta$ en la que la serie solución de la ecuación (2-32), sujeta a las condiciones iniciales, es finita.

Encuentre las condiciones sobre α y β para las cuales la serie solución de $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, sujeta a las condiciones iniciales, es finita.

Solución. Defínase

$$\alpha = a + b, \qquad \beta = ab$$

Entonces, con referencia al ejemplo 2-19, la solución $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ puede darse mediante

$$x(k) = \begin{cases} \dfrac{bx(0) + x(1)}{b - a}(-a)^k + \dfrac{ax(0) + x(1)}{a - b}(-b)^k, & a \neq b \\ x(0)(-a)^k + [ax(0) + x(1)]k(-a)^{k-1}, & a = b \end{cases}$$

La serie solución $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0)$ y $x(1)$, es finita si los valores absolutos de a y b son menores que la unidad. Así, sobre el plano $\alpha\beta$, se pueden localizar tres puntos críticos:

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1$$
$$\alpha = -2, \qquad \beta = 1$$
$$\alpha = 0, \qquad \beta = -1$$

El interior de la región limitada por las líneas que conectan a estos puntos satisface la condición $|a| < 1$, $|b| < 1$. Las líneas de la frontera pueden darse por $\beta = 1$, $\alpha - \beta = 1$ y $\alpha + \beta = -1$. Véase la figura 2-7. Si el punto (α, β) cae dentro de la región triangular sombreada, entonces la serie solución $x(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0)$ y $x(1)$, es finita.

PROBLEMAS

Problema B-2-1

Obtenga la transformada z de

$$x(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

donde a es una constante.

Problema B-2-2

Obtenga la transformada z de k^3.

Problema B-2-3

Obtenga la transformada z de t^2e^{-at}.

Problema B-2-4

Obtenga la transformada z de la siguiente $x(k)$:

$$x(k) = 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Suponga que $x(k) = 0$ para $k < 0$.

Problema B-2-5

Encuentre la transformada z de

$$x(k) = \sum_{h=0}^{k} a^h$$

donde a es una constante.

Problema B-2-6

Muestre que

$$\mathcal{Z}[k(k-1)a^{k-2}] = \frac{(2!)z}{(z-a)^3}$$

$$\mathcal{Z}[k(k-1)\cdots(k-h+1)a^{k-h}] = \frac{(h!)z}{(z-a)^{h+1}}$$

Problema B-2-7

Obtenga la transformada z de la curva $x(t)$ que se muestra en la figura 2-8.

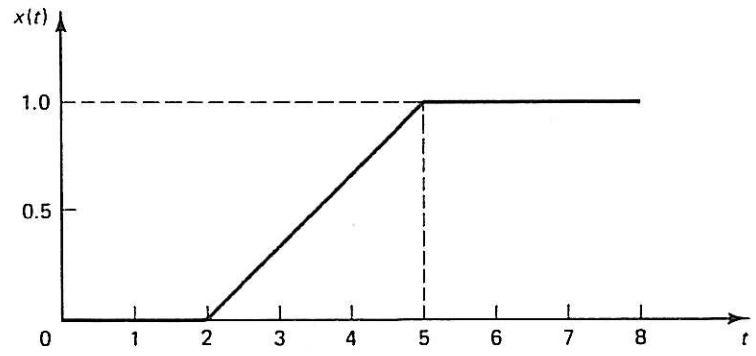


Figura 2-8 Curva $x(t)$.

Problema B-2-8

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4}{z^4}$$

Problema B-2-9

Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-1}(0.5 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})^2}$$

Use 1) el método de expansión en fracciones parciales y 2) el método de MATLAB. Escriba un programa para MATLAB para encontrar $x(k)$, la transformada z inversa de $X(z)$.

Problema B-2-10

Dada la transformada z

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2})}$$

determine los valores inicial y final de $x(k)$. También encuentre $x(k)$, la transformada z inversa de $X(z)$, en una forma cerrada.

Problema B-2-11

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Use 1) el método de la integral de inversión y 2) el método de MATLAB.

Problema B-2-12

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

en una forma cerrada.

Problema B-2-13

Utilizando el método de la integral de inversión, obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 + 6z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

Problema B-2-14

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-1}(1 - z^{-2})}{(1 + z^{-2})^2}$$

Use 1) el método de la división directa y 2) el método de MATLAB.

Problema B-2-15

Obtenga la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{0.368z^2 + 0.478z + 0.154}{(z - 1)z^2}$$

mediante el uso del método de la integral de inversión.

Problema B-2-16

Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(k+2) - 1.3x(k+1) + 0.4x(k) = u(k)$$

donde $x(0) = x(1) = 0$ y $x(k) = 0$ para $k < 0$. Para la función de entrada $u(k)$, considere los siguientes dos casos:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

y

$$u(0) = 1$$
$$u(k) = 0, \qquad k \neq 0$$

Resuelva este problema tanto de manera analítica como por computadora con MATLAB.

Problema B-2-17

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(k+2) - x(k+1) + 0.25x(k) = u(k+2)$$

donde $x(0) = 1$ y $x(1) = 2$. La función de entrada $u(k)$ está dada por

$$u(k) = 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Resuelva este problema tanto de manera analítica como por computadora con MATLAB.

Problema B-2-18

Considere la ecuación en diferencias:

$$x(k+2) - 1.3679x(k+1) + 0.3679x(k) = 0.3679u(k+1) + 0.2642u(k)$$

donde $x(k) = 0$ para $k \leq 0$. La entrada $u(k)$ está dada por

$$u(k) = 0, \qquad k < 0$$
$$u(0) = 1.5820$$
$$u(1) = -0.5820$$
$$u(k) = 0, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Determine la salida $x(k)$. Resuelva este problema tanto de manera analítica como por computadora con MATLAB.

3

Análisis en el plano z de sistemas de control en tiempo discreto

3-1 INTRODUCCIÓN

El método de la transformada z es particularmente útil para analizar y diseñar sistemas de control en tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo, de una entrada y una salida. En este capítulo se presenta el material introductorio necesario para el análisis y diseño de sistemas de control en tiempo discreto en el plano z. La principal ventaja del método de la transformada z es que ésta habilita al ingeniero para aplicar los métodos de diseño convencionales de sistemas en tiempo continuo a sistemas en tiempo discreto que pueden ser en parte en tiempo discreto y en parte en tiempo continuo.

A lo largo de este libro se supone que la operación de muestreo es uniforme; esto es, sólo existe una tasa de muestreo en el sistema y el período de muestreo es constante. Si un sistema de control en tiempo discreto incluye dos o más muestreadores en el sistema, se supone que los muestreadores están sincronizados y tienen la misma tasa de muestreo o frecuencia de muestreo.

Organización del capítulo. La organización de este capítulo es la siguiente. En la sección 3-1 se dan los comentarios introductorios. La sección 3-2 presenta un método para tratar la operación de muestreo como una representación matemática de la operación de tomar muestras $x(kT)$ a partir de una señal en tiempo continuo $x(t)$ mediante modulación con impulsos. Esta sección incluye el cálculo de las funciones de transferencia del retenedor de orden cero y del retenedor de primer orden.

En la sección 3-3 se trata el método de la integral de convolución para obtener la transformada z. El tema principal de la sección 3-4 es la reconstrucción de la señal original en tiempo continuo a partir de la señal muestreada. Basándose en el hecho de que la transformada de Laplace de la señal muestreada es periódica, se presenta el teorema de muestreo. En la sección 3-5 se estudia la función de transferencia pulso. También se analiza el modelado matemático de los controladores digitales en términos de las funciones de transferencia pulso. La sección 3-6 trata la realización de controladores y filtros digitales.

3-2 MUESTREO MEDIANTE IMPULSOS Y RETENCIÓN DE DATOS

Los sistemas de control en tiempo discreto pueden operar en parte en tiempo discreto y en parte en tiempo continuo. De esta manera, en dichos sistemas de control algunas señales aparecen como funciones en tiempo discreto (a menudo en la forma de una secuencia de números o un código numérico) y otras señales como funciones en tiempo continuo. Al analizar sistemas de control en tiempo discreto, la teoría de la transformada z juega un papel importante. Para demostrar por qué el método de la transformada z es útil en el análisis de sistemas de control en tiempo discreto, primero se presenta el concepto de muestreo mediante impulsos y luego se estudia la retención de datos.

Muestreo mediante impulsos. Se considerará un muestreador ficticio comúnmente llamado muestreador mediante impulsos. La salida de este muestreador se considera como un tren de impulsos que comienza en $t = 0$, con el período de muestreo igual a T y la magnitud de cada impulso igual al valor muestreado de la señal en tiempo continuo en el instante de muestreo correspondiente. En la figura 3-1 se muestra un diagrama de un muestreador mediante impulsos. [Se supone que $x(t) = 0$ para $t < 0$.] (Puesto que, en forma matemática, un impulso está definido como una función que tiene una amplitud infinita con duración cero, esto se representa gráficamente mediante una flecha con una amplitud que representa la magnitud del impulso.)

La salida muestreada mediante impulsos es una secuencia de impulsos, con la magnitud de cada impulso igual al valor de $x(t)$ en el instante de tiempo correspondiente. [Esto es, en el tiempo $t = kT$, el impulso es $x(kT)\delta(t - kT)$. Observe que $\delta(t - kT) = 0$ a menos que $t = kT$.] Se empleará la notación $x^*(t)$ para representar la salida muestreada mediante impulsos. La señal muestreada $x^*(t)$, un tren de impulsos, se puede representar mediante una sumatoria infinita

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

o

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + \cdots + x(kT)\delta(t - kT) + \cdots \tag{3-1}$$

Se definirá un tren de impulsos unitarios como $\delta_T(t)$, o

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

La salida del muestreador es igual al producto de la señal en tiempo continuo de entrada $x(t)$ por el tren de impulsos unitarios $\delta_T(t)$. En consecuencia, el muestreador se puede considerar como un modulador con la entrada $x(t)$ como la señal moduladora y el tren de impulsos $\delta_T(t)$ como la portadora, como se muestra en la figura 3-2.

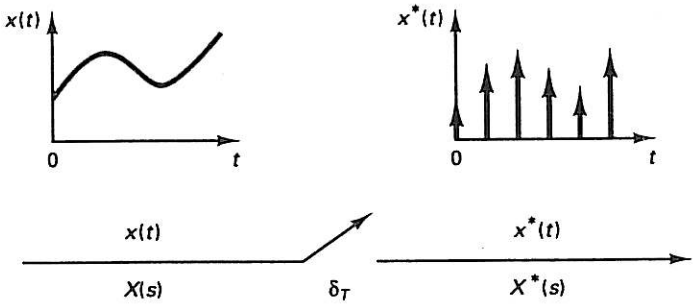


Figura 3-1 Muestreador mediante impulsos.

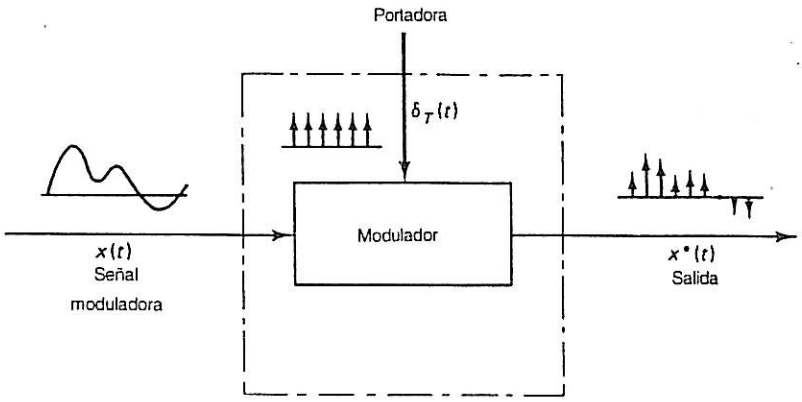


Figura 3-2 Muestreador mediante impulsos como modulador.

Después, considere la transformada de Laplace de la ecuación (3-1)

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t-T)] \\ &\quad + x(2T)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \cdots \\ &= x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \end{aligned} \tag{3–2}$$

Nótese que si se define

$$e^{Ts} = z$$

o

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

entonces la ecuación (3-2) se convierte en

$$X^*(s)\Big|_{s=(1/T)\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{3–3}$$

El segundo miembro de la ecuación (3-3) es exactamente el mismo que el segundo miembro de la ecuación (2-1): es la transformada z de la secuencia $x(0), x(T), x(2T), \ldots$, generada a partir de $x(t)$ en $t = kT$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Por tanto se puede escribir

$$X^*(s)\Big|_{s=(1/T)\ln z} = X(z)$$

y la ecuación (3-3) se convierte en

$$X^*(s)\Big|_{s=(1/T)\ln z} = X^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right) = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{3–4}$$

Observe que la variable z es una variable compleja y T es el período de muestreo. [Se debe enfatizar que la notación $X(z)$ no significa $X(s)$ reemplazando s por z, sino que $X^*(s = T^{-1}\ln z)$.]

Resumen. Se resumirá justamente lo que se acaba de establecer. Si la señal en tiempo continuo $x(t)$ se muestrea mediante impulsos en forma periódica, la señal muestreada se puede representar de manera matemática mediante

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT)$$

En el muestreador mediante impulsos se puede pensar que el interruptor se cierra instantáneamente cada período de muestreo T y genera impulsos $x(kT)\delta(t - kT)$. Dicho proceso de muestreo se conoce como *muestreo mediante impulsos*. El muestreador mediante impulsos se presenta por conveniencia matemática; éste es un muestreador ficticio que no existe en el mundo real.

La transformada de Laplace de la señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$ ha mostrado ser la misma que la transformada z de la señal $x(t)$ si e^{Ts} se define como z, o $e^{Ts} = z$.

Circuitos para la retención de datos. En un muestreador convencional, un interruptor se cierra cada período de muestreo T para admitir una señal de entrada. En la práctica, la duración del muestreo es muy corta en comparación con la constante de tiempo más significativa de la planta. Un muestreador convierte una señal en tiempo continuo en un tren de pulsos que se presenta en los instantes de muestreo $t = 0, T, 2T, \ldots$, donde T es el período de muestreo. (Observe que entre dos instantes de muestreo consecutivos el muestreador no transfiere información. Dos señales cuyos respectivos valores en los instantes de muestreo son iguales darán como resultado la misma señal muestreada.)

La retención de datos es un proceso de generación de una señal en tiempo continuo $h(t)$ a partir de una secuencia en tiempo discreto $x(kT)$. Un circuito de retención convierte la señal muestreada en una señal en tiempo continuo, que reproduce aproximadamente la señal aplicada al muestreador. La señal $h(t)$ durante el intervalo de tiempo $kT \leq t < (k + 1)T$ se puede aproximar mediante un polinomio en τ como sigue:

$$h(kT + \tau) = a_n\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + a_0 \tag{3–5}$$

donde $0 \leq \tau < T$. Observe que la señal $h(kT)$ debe ser igual a $x(kT)$, o

$$h(kT) = x(kT)$$

Por tanto, la ecuación (3-5) se puede escribir como sigue:

$$h(kT + \tau) = a_n\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + x(kT) \tag{3–6}$$

Si el circuito de retención de datos es un extrapolador polinomial de n-ésimo orden, se conoce como retenedor de n-ésimo orden. De este modo, si $n = 1$, se denomina retenedor de primer orden. [El retenedor de n-ésimo orden emplea los $n + 1$ datos discretos anteriores $x((k-n)T), x((k-n+1)T), \ldots, x(kT)$ para generar una señal $h(kT + \tau)$.]

Debido a que un retenedor de alto orden utiliza las muestras anteriores para extrapolar una señal en tiempo continuo entre el instante de muestreo presente y el siguiente, la exactitud en la aproximación de la señal en tiempo continuo se mejora a medida que el número de muestras anteriores utilizadas se incrementa. Sin embargo, esta mejoría en la exactitud se obtiene a costa de un tiempo de retraso mayor. En sistemas de control en lazo cerrado, cualquier tiempo de retardo adicional en el lazo decrementará la estabilidad del sistema y en algunos casos podría aun causar la inestabilidad del mismo.

El retenedor de datos más sencillo se obtiene cuando $n = 0$ en la ecuación (3-6), esto es, cuando

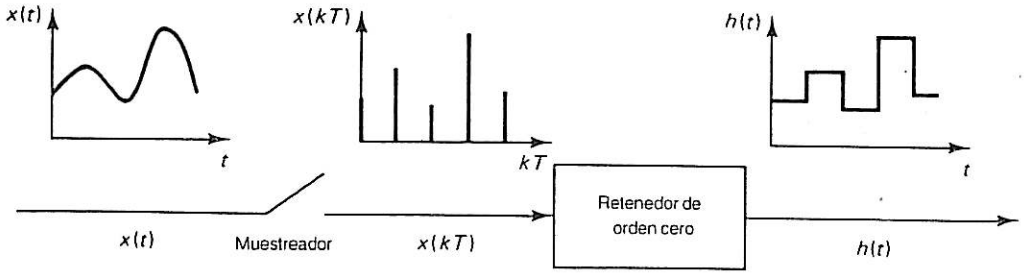


Figura 3-3 Muestreador y retenedor de orden cero.

$$h(kT + \tau) = x(kT) \tag{3–7}$$

donde $0 \leq \tau < T$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$. La ecuación (3-7) implica que el circuito retiene la amplitud de la muestra de un instante de muestreo al siguiente. Dicho retenedor de datos se conoce como *retenedor de orden cero*, o sujetador, o generador de la señal de escalera. La salida del retenedor de orden cero es una función escalonada. En este libro, a menos de que se indique otra cosa, se supone que el circuito de retención es de orden cero.

Se verá posteriormente que la función de transferencia G_h del retenedor de orden cero está dada mediante

$$G_h = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Retenedor de orden cero. En la figura 3-3 se muestra un muestreador y retenedor de orden cero. La señal de entrada $x(t)$ se muestrea en instantes discretos y la señal muestreada se pasa a través del retenedor de orden cero. El circuito del retenedor de orden cero suaviza la señal muestreada para producir la señal $h(t)$, la cual es constante desde el último valor muestreado hasta que se puede disponer de la siguiente muestra. Esto es,

$$h(kT + t) = x(kT), \quad \text{para } 0 \leq t < T \tag{3–8}$$

Se obtendrá un modelo matemático de la combinación de un muestreador real y de un circuito de retención de orden cero, como el que se muestra en la figura 3-4*a*). A partir del hecho de que la integral de una función impulso es una constante, se puede suponer que el retenedor de orden cero es un integrador, y la entrada al circuito de retención de orden cero es un tren de impulsos. Entonces un modelo matemático para el muestreador real y el retenedor de orden cero se puede construir como se muestra en la figura 3-4*b*), donde $G_{h0}(s)$ es la función de transferencia del retenedor de orden cero y $x^*(t)$ es la señal muestreada mediante impulsos de $x(t)$.

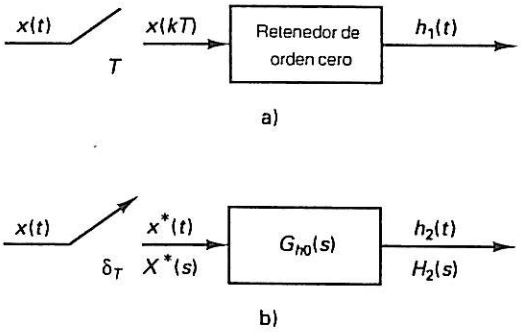


Figura 3-4 *a*) Muestreador real y retenedor de orden cero; *b*) modelo matemático que consiste en un muestreador mediante impulsos y una función de transferencia $G_{h1}(s)$.

Considere el muestreador y el retenedor de orden cero que se muestra en la figura 3-4*a*). Suponga que la señal $x(t)$ es cero para $t < 0$. Entonces la salida $h_1(t)$ está relacionada con $x(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= x(0)[1(t) - 1(t - T)] + x(T)[1(t - T) - 1(t - 2T)] \\ &\quad + x(2T)[1(t - 2T) - 1(t - 3T)] + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[1(t - kT) - 1(t - (k + 1)T)] \end{aligned} \tag{3–9}$$

Puesto que

$$\mathcal{L}[1(t - kT)] = \frac{e^{-kTs}}{s}$$

la transformada de Laplace de la ecuación (3-9) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_1(t)] = H_1(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \end{aligned} \tag{3–10}$$

Después, considere el modelo matemático que se muestra en la figura 3-4*b*). La salida de este modelo debe ser la misma que la del retenedor de orden cero real, o

$$\mathcal{L}[h_2(t)] = H_2(s) = H_1(s)$$

De este modo,

$$H_2(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \tag{3–11}$$

A partir de la figura 3-4*b*), se tiene

$$H_2(s) = G_{h0}(s)X^*(s) \tag{3–12}$$

Debido a que

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

la ecuación (3-11) se puede escribir como

$$H_2(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}X^*(s) \tag{3–13}$$

Al comparar las ecuaciones (3-12) y (3-13), se ve que la función de transferencia del retenedor de orden cero está dada por

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Observe que, de forma matemática, el sistema que se muestra en la figura 3-4*a*) es equivalente al que se muestra en la figura 3-4*b*) desde el punto de vista de la relación entrada-salida. Esto es, un muestreador real y retenedor de orden cero se puede reemplazar por un sistema en tiempo continuo

matemáticamente equivalente, que consiste de un muestreador mediante impulsos y una función de transferencia $(1 - e^{-Ts})/s$. Los dos procesos de muestreo se distinguirán (como se aprecia en la figura 3-4) por la manera en la que se dibujan los interruptores para el muestreo.

Función de transferencia de un retenedor de primer orden. Aunque los retenedores de primer orden no se utilizan en sistemas de control, vale la pena ver cuál podría ser su función de transferencia. Se mostrará que la función de transferencia del retenedor de primer orden está dada por

$$G_{h1}(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts + 1}{T} \tag{3–14}$$

Ahora se obtendrá la ecuación (3-14).

Se ha establecido que la ecuación (3-6) describe la salida de un circuito de retención de n-ésimo orden. Para el retenedor de primer orden, $n = 1$. Sustitúyase $n = 1$ en la ecuación (3-6). Entonces se tiene

$$h(kT + \tau) = a_1 \tau + x(kT) \tag{3–15}$$

donde $0 \leq \tau < T$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$. Al aplicar la condición que establece

$$h((k - 1)T) = x((k - 1)T)$$

la constante a_1 se puede determinar como sigue:

$$h((k - 1)T) = -a_1 T + x(kT) = x((k - 1)T)$$

o

$$a_1 = \frac{x(kT) - x((k - 1)T)}{T}$$

Por tanto, la ecuación (3-15) se convierte en

$$h(kT + \tau) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k - 1)T)}{T}\tau \tag{3–16}$$

donde $0 \leq \tau < T$. El proceso de extrapolación del retenedor de primer orden está basado en la ecuación (3-16). La señal de salida en tiempo continuo $h(t)$ que se obtiene al utilizar el retenedor de primer orden es una señal lineal por secciones, como se muestra en la figura 3-5.

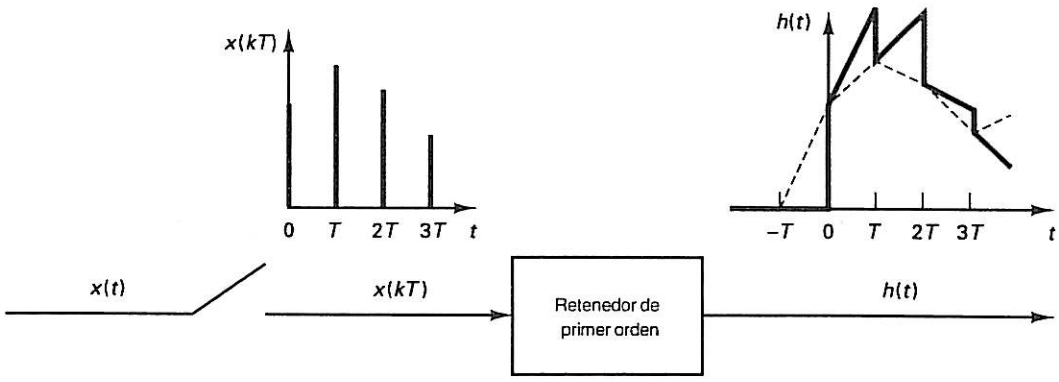


Figura 3-5 Entrada y salida de un retenedor de primer orden.

Para obtener la función de transferencia del circuito de retención de primer orden, es conveniente suponer una función sencilla para $x(t)$. Por ejemplo, una función escalón unitario, una función impulso unitario o una función rampa unitaria serían buenas elecciones para $x(t)$.

Suponga que se elige una función escalón unitario como $x(t)$. Entonces, para el muestreador real y retenedor de primer orden que se muestra en la figura 3-6*a*), la salida $h(t)$ del retenedor de primer orden consiste en líneas rectas que son extrapolaciones de los dos valores muestreados precedentes. La salida $h(t)$ se muestra en el diagrama. La curva de salida $h(t)$ se puede escribir como sigue:

$$h(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)1(t) - \frac{t - T}{T}1(t - T) - 1(t - T)$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación es

$$\begin{aligned} H(s) &= \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2}\right) - \frac{1}{Ts^2}e^{-Ts} - \frac{1}{s}e^{-Ts} \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} + \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts^2} \\ &= (1 - e^{-Ts})\frac{Ts + 1}{Ts^2} \end{aligned} \tag{3–17}$$

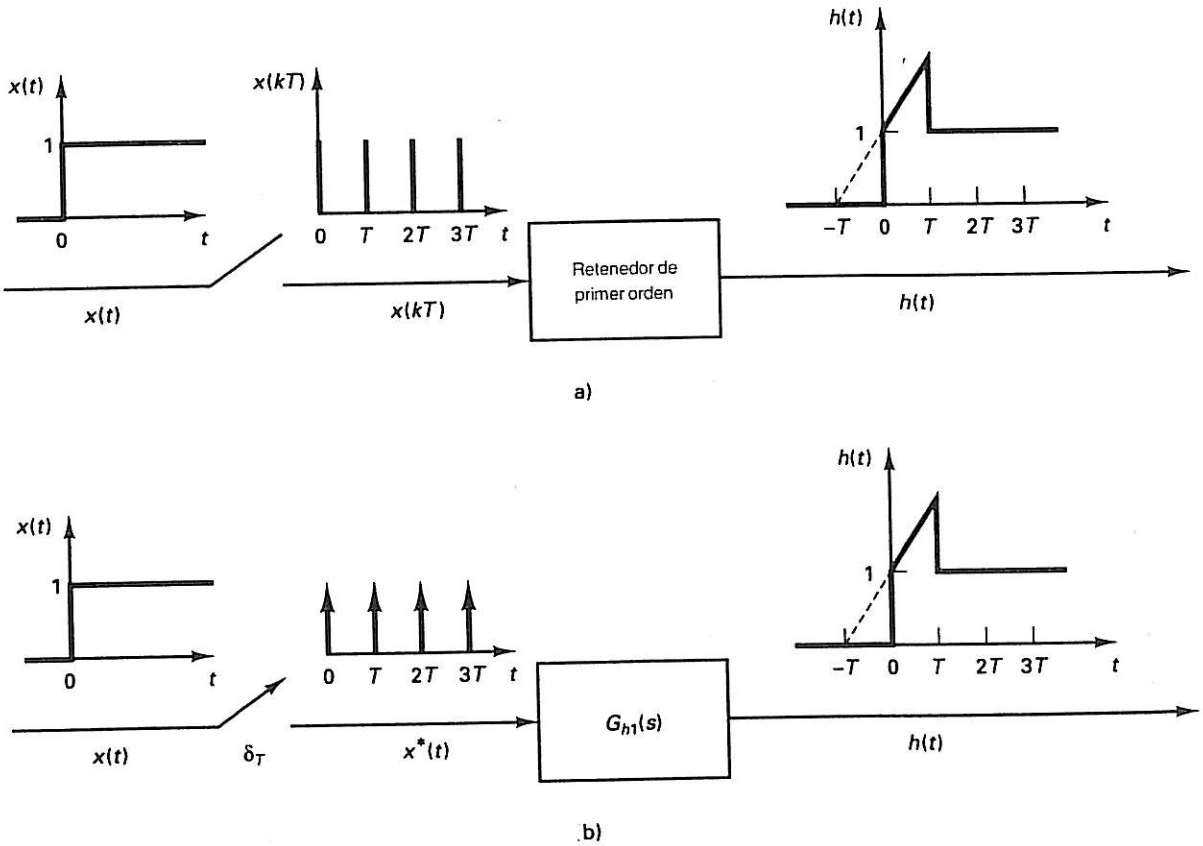


Figura 3-6 *a*) Muestreador real en cascada con un retenedor de primero orden; *b*) modelo matemático que consiste en un muestreador mediante impulsos y $G_{h1}(s)$.

En la figura 3-6*b*) se muestra un modelo matemático del muestreador real en cascada con el retenedor de primer orden que se observa en la figura 3-6*a*). El modelo matemático consiste en un muestreador mediante impulsos y $G_{h1}(s)$, la función de transferencia del retenedor de primer orden. La señal de salida de este modelo es la misma que la salida del sistema real. Por tanto, la salida $H(s)$ está dada también por la ecuación (3-17).

La transformada de Laplace de la entrada $x^*(t)$ al retenedor de primer orden $G_{h1}(s)$ es

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Por tanto, la función de transferencia $G_{h1}(s)$ del retenedor de primer orden está dada por

$$G_{h1}(s) = \frac{H(s)}{X^*(s)} = (1 - e^{-Ts})^2 \frac{Ts + 1}{Ts^2}$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts + 1}{T}$$

Observe que un muestreador real en combinación con un retenedor de primer orden es equivalente a un muestreador mediante impulsos con una función de transferencia $(1 - e^{-Ts})^2(Ts + 1)/(Ts^2)$.

De manera similar, se pueden obtener las funciones de transferencia de retenedores de alto orden mediante el procedimiento presentado. Sin embargo, puesto que los circuitos de retención de alto orden ($n \geq 2$) no son prácticos desde el punto de vista del retraso (el cual puede causar la inestabilidad del sistema) y los efectos de ruido, no se obtendrán sus funciones de transferencia. (El retenedor de orden cero es el más sencillo y el que se utiliza con mayor frecuencia en la práctica.)

Resumen. Se resumirá lo que se ha presentado hasta ahora acerca del muestreo mediante impulsos.

1. Un muestreador real toma periódicamente muestras de la señal de entrada y produce una secuencia de pulsos como salida. Mientras que la duración del muestreo (ancho del pulso) del muestreador real es muy pequeña (pero nunca llegará a ser cero), la suposición de que el ancho es cero, lo cual implica que la secuencia de pulsos se convierta en una secuencia de impulsos cuyas magnitudes son iguales a la señal en tiempo continuo en los instantes de muestreo, simplifica el análisis de los sistemas en tiempo discreto. Dicha suposición es válida si la duración del muestreo es muy pequeña comparada con la constante de tiempo más significativa del sistema y si un circuito de retención se conecta a la salida del muestreador.
2. Cuando e^{Ts} se transforma en z, el concepto de muestreo mediante impulsos (el cual es un proceso puramente matemático) nos posibilita realizar el análisis de sistemas de control en tiempo discreto que involucran muestreadores y circuitos de retención mediante el método de la transformada z. Esto significa que mediante el empleo de la variable compleja z se puede aplicar de manera directa las técnicas desarrolladas para los métodos de la transformada de Laplace para el análisis de sistemas en tiempo discreto que incluyen la operación de muestreo.
3. Como se puntualizó al principio, una vez que el muestreador real y el retenedor de orden cero se han reemplazado de manera matemática por un muestreador mediante impulsos y la función de transferencia $(1 - e^{-Ts})/s$, el sistema se convierte en un sistema en tiempo continuo. Esto simplifica el análisis de los sistemas de control en tiempo discreto, puesto que se puede aplicar las técnicas disponibles para sistemas de control en tiempo continuo.

4. Se reitera que el muestreador mediante impulsos es un muestreador ficticio que se introduce sólo para propósitos de análisis matemático. No es posible implantar físicamente tal muestreador que genere impulsos.

3-3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA Z MEDIANTE EL MÉTODO DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

En esta sección se obtendrá la transformada z de $x(t)$ mediante el método de la integral de convolución.

Considere el muestreador mediante impulsos que se presenta en la figura 3-7. La salida del muestreador mediante impulsos es

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{3–18}$$

Si se observan que

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT)] = e^{-kTs}$$

se tiene

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right] = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Puesto que

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right]$$

se ve que $X^*(s)$ es la transformada de Laplace del producto de dos funciones, $x(t)$ y $\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t - kT)$. Observe que esto no es igual al producto de las dos transformadas de Laplace correspondientes.

La transformada de Laplace del producto de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ se puede dar mediante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)g(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s - p)\,dp\end{aligned} \tag{3–19}$$

[Para obtener la ecuación (3-19), véase el problema A-3-4.]

Sustituyamos $f(t)$ y $g(t)$ por $x(t)$ y $\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$, respectivamente. Entonces la transformada de Laplace de $X^*(s)$, donde

$$X^*(s) = \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right]$$

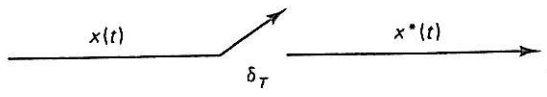


Figura 3-7 Muestreador mediante impulsos.

puede darse mediante

$$X^*(s) = \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}dp \qquad (3\text{–}20)$$

donde la integración se hace a lo largo de la línea que corre desde $c-j\infty$ hasta $c+j\infty$ paralela al eje imaginario en el plano p y separa los polos de $X(p)$ de los polos de $1/[1-e^{-T(s-p)}]$. La ecuación (3-20) es la integral de convolución. Es un hecho bien conocido que dicha integral se puede evaluar en términos de los residuos formando un contorno cerrado que consiste en una línea desde $c-j\infty$ hasta $c+j\infty$ y un semicírculo de radio infinito en el semiplano izquierdo o derecho, ya que la integral a lo largo del semicírculo que se añadió es una constante (ya sea cero o diferente de cero). Esto es, la ecuación (3-20) se rescribe como sigue:

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp - \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp \qquad (3\text{–}21)$$

donde Γ es un semicírculo de radio infinito en el semiplano izquierdo o derecho del plano p.

Existen dos formas de evaluar esta integral (una es emplear un semicírculo infinito en el semiplano izquierdo y la otra es emplear un semicírculo infinito en el semiplano derecho); se describirán los resultados que se obtienen para los dos casos por separado.

En el análisis que se presenta, se supone que los polos de $X(s)$ están en el semiplano izquierdo y que $X(s)$ se puede expresar como el cociente de polinomios en s, o

$$X(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde $q(s)$ y $p(s)$ son polinomios en s. También se supone que $p(s)$ es de mayor grado en s que $q(s)$, lo cual significa que

$$\lim_{s\to\infty} X(s) = 0$$

Evaluación de la integral de convolución en el semiplano izquierdo. Se evalúa la integral de convolución dada por la ecuación (3-21) utilizando un contorno cerrado en el semiplano izquierdo del plano p como se muestra en la figura 3-8. Empleando este contorno cerrado, la ecuación (3-21) se puede evaluar como sigue: Si observamos que el denominador de $X(s)$ es de mayor grado en s que el numerador, la integral a lo largo de Γ_L se desvanece. Por lo tanto,

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$

La integral es igual a la suma de los residuos de $X(p)$ en el contorno cerrado.

$$X^*(s) = \sum\left[\text{residue of } \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}} \text{ at pole of } X(p)\right] \qquad (3\text{–}22)$$

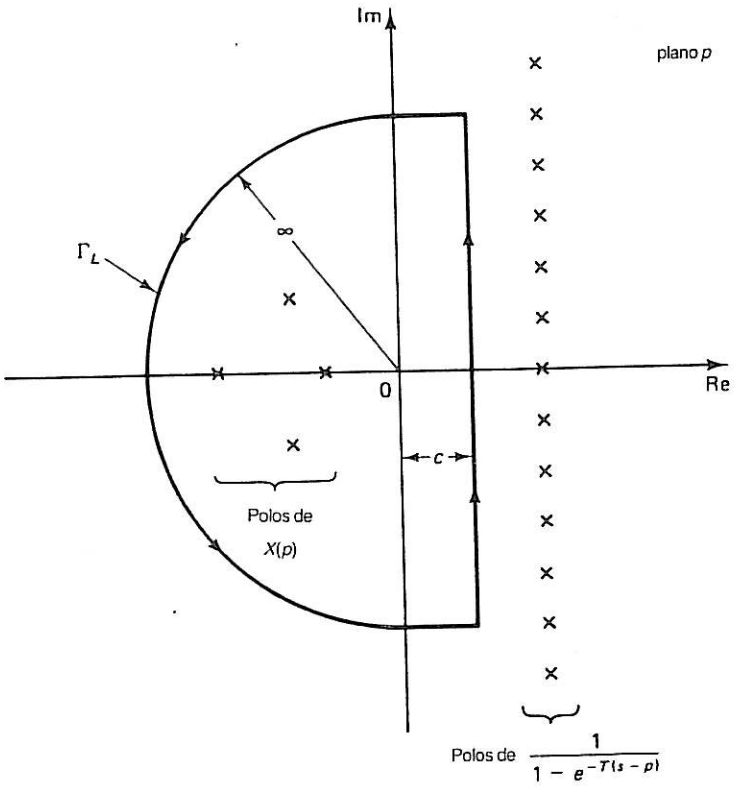


Figura 3-8 Contorno cerrado en el semiplano izquierdo del plano p.

[Remítase al problema A-3-6 para obtener la ecuación (3-22).] Al sustituir e^{Ts} por z en la ecuación (3-22), se tiene

$$X(z) = \Sigma\left[\text{residuo de}\frac{X(p)z}{z - e^{Tp}}\text{en un polo de } X(p)\right]$$

Al cambiar la notación de la variable compleja de p a s, se obtiene

$$X(z) = \Sigma\left[\text{residuo de}\frac{X(s)z}{z - e^{Ts}}\text{en un polo de } X(s)\right] \tag{3-23}$$

Suponga que $X(s)$ tiene los polos $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Si un polo en $s = s_j$ es un polo simple, entonces el residuo correspondiente K_j es

$$K_j = \lim_{s \to s_j}\left[(s - s_j)\frac{X(s)z}{z - e^{Ts}}\right] \tag{3-24}$$

Si el polo en $s = s_i$ es un polo múltiple de orden n_i, entonces el residuo K_i es

$$K_i = \frac{1}{(n_i - 1)!}\lim_{s \to s_i}\frac{d^{n_i - 1}}{ds^{n_i - 1}}\left[(s - s_i)^{n_i}\frac{X(s)z}{z - e^{Ts}}\right] \tag{3-25}$$

Ejemplo 3-1

Dada

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s + 1)}$$

obtenga $X(z)$ empleando la integral de convolución en el semiplano izquierdo.

Observe que $X(s)$ tiene un polo doble en $s = 0$ y un polo simple en $s = -1$. Por tanto, la ecuación (3-23) se convierte en

$$X(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ en un polo de } X(s) \right]$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right] + \lim_{s \to -1} \left[(s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right]$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{-z[z - e^{Ts} + (s+1)(-T)e^{Ts}]}{(s+1)^2(z - e^{Ts})^2} + \frac{1}{(-1)^2} \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$= \frac{-z(z - 1 - T)}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T}} = \frac{z^2(T - 1 + e^{-T}) + z(1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)^2(z - e^{-T})}$$

$$= \frac{(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2(1 - e^{-T}z^{-1})}$$

Evaluación de la integral de convolución en el semiplano derecho. Ahora se va a evaluar la integral de convolución dada por la ecuación (3-21) en el semiplano derecho del plano p. Se elige el contorno cerrado que se muestra en la figura 3-9, el cual consiste en una línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ y Γ_R, la porción de un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho del plano p que está situado a la derecha de esta línea. El contorno cerrado encierra a todos los polos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$, pero no encierra a ningún polo de $X(p)$. Ahora $X^*(s)$ se puede escribir como

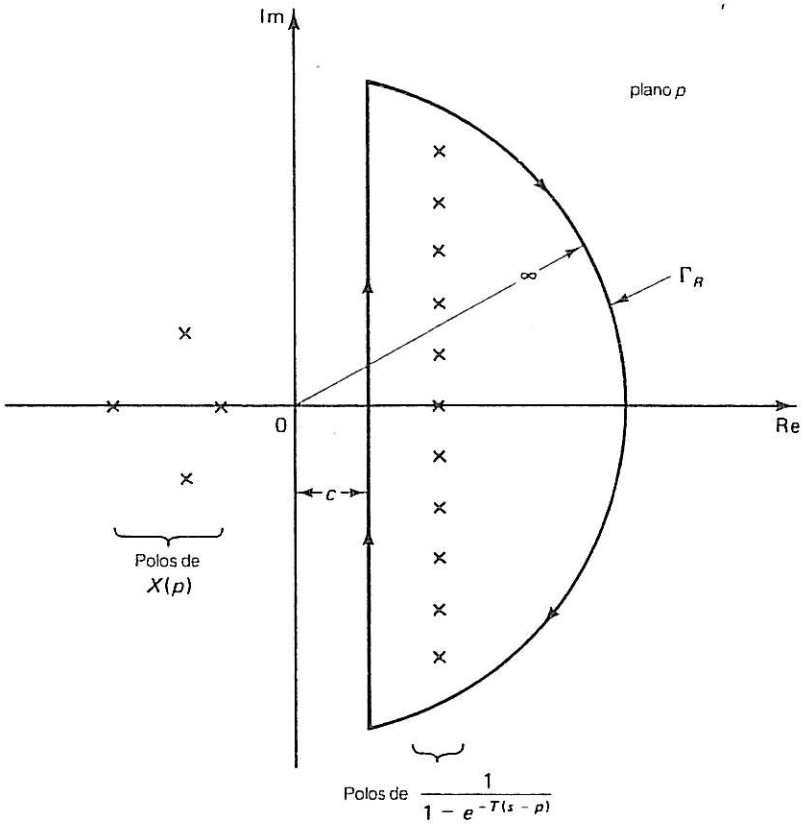


Figura 3-9 Contorno cerrado en el semiplano derecho del plano p.

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp - \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp \qquad (3\text{–}26)$$

En la evaluación de las integrales del segundo miembro de la ecuación (3-26), se necesita considerar dos casos por separado: un caso donde el denominador de $X(s)$ es dos o más grados mayor en s que el numerador, y otro caso donde el denominador de $X(s)$ es sólo un grado en s mayor que el numerador.

Caso 1: $X(s)$ tiene un denominador dos o más grados mayor en s que el numerador. Para este caso, puesto que $X(s)$ posee por lo menos dos polos más que ceros, se tiene

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0+) = 0$$

Entonces la integral a lo largo de Γ_R es cero. De esta manera, en este caso

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp = 0$$

y $X^*(s)$ se puede obtener como sigue:

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) \qquad (3\text{–}27)$$

[Para obtener la ecuación (3-27), véase el problema A-3-7.] Así

$$X(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k)\Big|_{s=(1/T)\ln z} \qquad (3\text{–}28)$$

Observe que esta expresión de la transformada z es útil para probar el teorema de muestreo (véase la sección 3-4). Sin embargo, es muy tedioso obtener expresiones de la transformada z de funciones de uso común mediante este método.

Caso 2: $X(s)$ tiene un denominador un grado mayor en s que el numerador. Para este caso, $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0+) \neq 0 < \infty$ y la integral a lo largo de Γ_R no es cero. [El valor distinto de cero está asociado con el valor inicial $x(0+)$ de $x(t)$.] Se puede mostrar que la contribución de la integral a lo largo de Γ_R en la ecuación (3-26) es $-\frac{1}{2}x(0+)$. Esto es,

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \frac{x(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp = -\frac{1}{2}x(0+)$$

Entonces el término integral en el segundo miembro de la ecuación (3-26) se convierte en

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0+) \qquad (3\text{–}29)$$

Ejemplo 3-2

Muestre que $X^*(s)$ es periódica y su periodo es $2\pi/\omega_s$.

Refiriéndose a la ecuación (3-29),

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{h=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s h) + \frac{1}{2}x(0+)$$

Por tanto,

$$X^*(s + j\omega_s k) = \frac{1}{T}\sum_{h=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k + j\omega_s h) + \frac{1}{2}x(0+)$$

Hagamos que $k + h = m$. Entonces esta última ecuación se convierte en

$$X^*(s + j\omega_s k) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s m) + \frac{1}{2}x(0+) = X^*(s)$$

Por tanto, se tiene

$$X^*(s) = X^*(s \pm j\omega_s k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

De esta manera, $X^*(s)$ es periódica, con período $2\pi/\omega_s$. Esto significa que, si la función $X(s)$ tiene un polo en $s = s_1$ en el plano s, entonces $X^*(s)$ tiene polos en $s = s_1 \pm j\omega_s k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Cálculo de la transformada z de funciones que involucran el término $(1 - e^{-Ts})/s$. Se considerará aquí que en la función $X(s)$ se incluye $(1 - e^{-Ts})/s$. Suponga que la función de transferencia $G(s)$ sigue de un retenedor de orden cero. Entonces el producto de la función de transferencia del retenedor de orden ceró y $G(s)$ se convierte en

$$X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)$$

En los siguientes pasos se obtendrá la transformada z de dicha función $X(s)$.

Observe que $X(s)$ se puede escribir como sigue:

$$X(s) = (1 - e^{-Ts})\frac{G(s)}{s} = (1 - e^{-Ts})G_1(s) \tag{3–30}$$

donde

$$G_1(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Considere la función

$$X_1(s) = e^{-Ts} G_1(s) \tag{3–31}$$

Puesto que $X_1(s)$ es el producto de la transformada de Laplace de dos funciones, la transformada inversa de Laplace de la ecuación (3-31) puede estar dada mediante la siguiente integral de convolución:

$$x_1(t) = \int_0^t g_0(t - \tau)g_1(\tau)\, d\tau$$

donde

$$g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-Ts}] = \delta(t - T)$$
$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_1(s)]$$

Así,

$$x_1(t) = \int_0^t \delta(t - T - \tau)g_1(\tau)\, d\tau$$
$$= g_1(t - T)$$

Por tanto, si escribimos

$$\mathcal{Z}[g_1(t)] = G_1(z)$$

la transformada z de $x_1(t)$ resulta ser

$$\mathcal{Z}[x_1(t)] = \mathcal{Z}[g_1(t - T)] = z^{-1}G_1(z)$$

Con referencia a las ecuaciones (3-30) y (3-31), se tiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[G_1(s) - e^{-Ts}G_1(s)] \\ &= \mathcal{Z}[g_1(t)] - \mathcal{Z}[x_1(t)] \\ &= G_1(z) - z^{-1}G_1(z) \\ &= (1 - z^{-1})G_1(z) \end{aligned}$$

o

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \tag{3–32}$$

De este modo se ha mostrado que si $X(s)$ incluye un factor $(1 - e^{-Ts})$, entonces, al obtener la transformada z de $X(s)$, el término $1 - e^{-Ts} = 1 - z^{-1}$ se puede factorizar de modo que $X(z)$ sea igual al producto de $(1 - z^{-1})$ y la transformada z del término remanente.

De manera similar, si la función de transferencia $G(s)$ sigue de un retenedor de primer orden $G_{h1}(s)$, donde

$$G_{h1}(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts + 1}{T}$$

entonces la transformada z de la función

$$X(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts + 1}{T} G(s)$$

se puede obtener como sigue. Puesto que

$$X(s) = (1 - e^{-Ts})^2 \frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)$$

mediante el mismo enfoque que se utilizó para obtener la ecuación (3-32), se tiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[(1 - e^{-Ts})^2 \frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)\right] \\ &= (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z}\left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} G(s)\right] \end{aligned} \tag{3–33}$$

La ecuación (3-33) se puede emplear para obtener la transformada z de la función que incluye el circuito retenedor de primer orden.

Ejemplo 3-3

Obtenga la transformada z de

$$X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s + 1}$$

Con referencia a la ecuación (3-32), se tiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{1 - e^{-T}z^{-1}} \end{aligned}$$

3-4 RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES ORIGINALES A PARTIR DE SEÑALES MUESTREADAS

Teorema del muestreo. Si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta, comparada con la componente de más alta frecuencia que se incluye en la señal en tiempo continuo, las características de amplitud de la señal en tiempo continuo se pueden preservar en la envolvente de la señal muestreada.

Para reconstruir la señal original a partir de una señal muestreada, existe una frecuencia mínima que la operación de muestreo debe satisfacer. Dicha frecuencia mínima se especifica en el teorema de muestreo. Se supondrá que la señal en tiempo continuo $x(t)$ tiene un espectro en frecuencia como el que se muestra en la figura 3-10. Esta señal $x(t)$ no contiene ninguna componente de frecuencia arriba de ω_1 radianes por segundo.

Teorema del muestreo. Si ω_s, definida como $2\pi/T$, donde T es el período de muestreo, es mayor que $2\omega_1$, o

$$\omega_s > 2\omega_1$$

donde ω_1 es la componente de más alta frecuencia presente en la señal en tiempo continuo $x(t)$, entonces la señal $x(t)$ se puede reconstruir completamente a partir de la señal muestreada $x^*(t)$.

El teorema implica que si $\omega_s > 2\omega_1$ entonces, a partir del conocimiento de la señal muestreada, es teóricamente posible reconstruir con exactitud la señal en tiempo continuo original. A continuación, se hará uso de un enfoque gráfico intuitivo para explicar el teorema del muestreo. Para un enfoque analítico, véase el problema A-3-10.

Para mostrar la validez del teorema del muestreo, se necesita encontrar el espectro en frecuencia

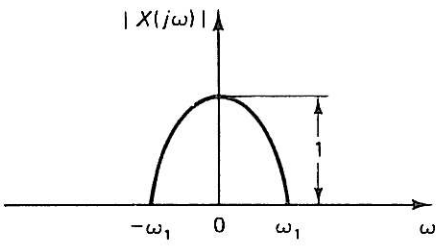


Figura 3-10 Un espectro en frecuencia.

de la señal muestreada $x^*(t)$. La transformada de Laplace de $x^*(t)$ se obtuvo en la sección 3-3 y está dada por las ecuaciones (3-27) o (3-29), dependiendo de que $x(0+) = 0$ o no. Para obtener el espectro en frecuencia, se sustituye $j\omega$ por s en la ecuación (3-27). [En el estudio del espectro en frecuencia, no se necesita estar interesado en el valor de $x(0+)$.] De este modo,

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\omega_s k)$$

$$= \cdots + \frac{1}{T}X(j(\omega - \omega_s)) + \frac{1}{T}X(j\omega) + \frac{1}{T}X(j(\omega + \omega_s)) + \cdots \qquad (3\text{–}34)$$

la ecuación (3-34) da el espectro en frecuencia de la señal muestreada $x^*(t)$. Se observa que el espectro en frecuencia de una señal muestreada mediante impulsos se reproduce un número infinito de veces y se atenúa en un factor de $1/T$. De esta manera, el proceso de modulación mediante impulsos de una señal en tiempo continuo produce una serie de bandas laterales. Puesto que $X^*(s)$ es periódica con un período $2\pi/\omega_s$, como se muestra en el ejemplo 3-2, o

$$X^*(s) = X^*(s \pm j\omega_s k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

si una función $X(s)$ tiene un polo en $s = s_1$, entonces $X^*(s)$ tiene un polo en $s = s_1 \pm j\omega_s k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

En las figuras 3-11 *a*) y *b*) se muestran las gráficas del espectro en frecuencia $X^*(j\omega)$ contra ω para

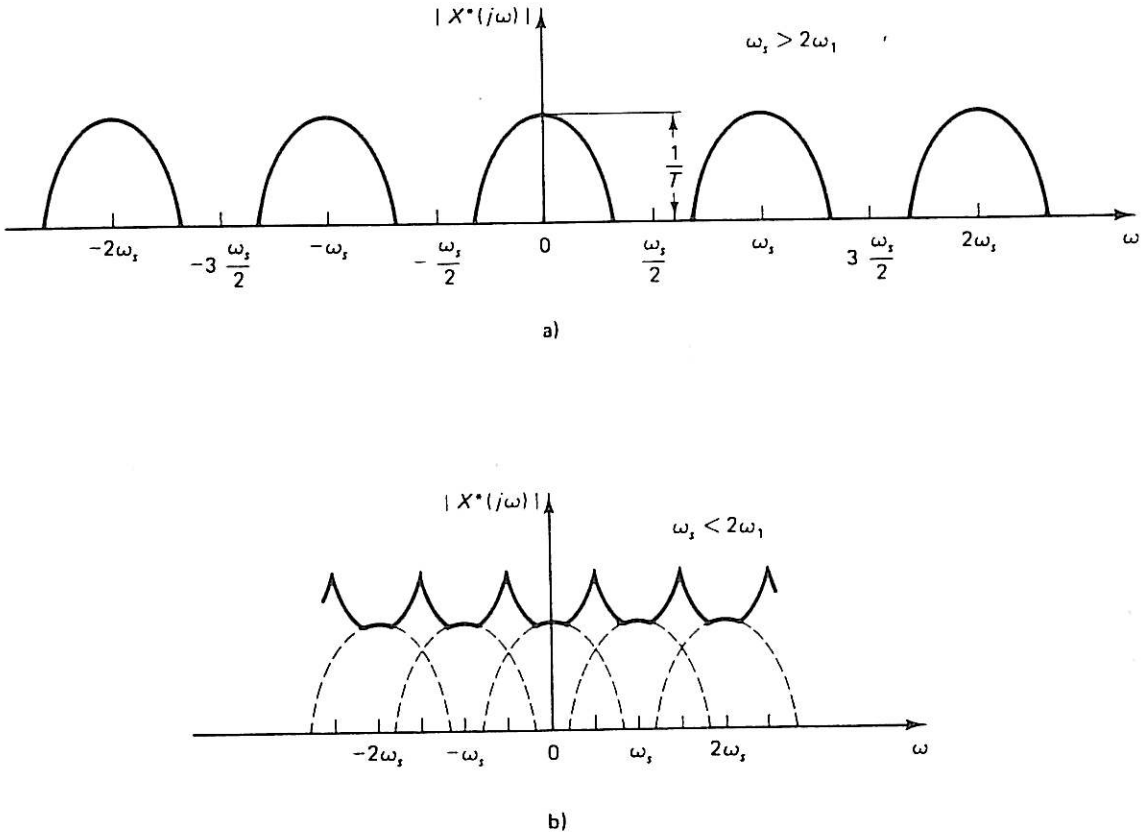


Figura 3-11 Gráficas de espectros en frecuencia de $|X^*(j\omega)|$ contra ω para dos valores de frecuencia de muestreo ω_s: *a*) $\omega_s > 2\omega_1$; *b*) $\omega_s < 2\omega_1$.

dos valores de la frecuencia de muestreo ω_s. La figura 3-11*a*) corresponde a $\omega_s > 2\omega_1$, mientras que la figura 3-11*b*) corresponde a $\omega_s < 2\omega_1$. Cada una de las gráficas de $|X^*(j\omega)|$ contra ω consiste en $|X(j\omega)|/T$ repetido cada $\omega_s = 2\pi/T$ rad/s. En el espectro en frecuencia de $|X^*(j\omega)|$ la componente $|X(j\omega)|/T$ se denomina *componente primaria*, y las otras componentes $|X(j(\omega \pm \omega_s k))|/T$ se denominan *componentes complementarias*.

Si $\omega_s < 2\omega_1$, las componentes de $|X^*(j\omega)|$ no se traslaparán, y el espectro en frecuencia muestreado se repetirá cada ω_s rad/s.

Si $\omega_s < 2\omega_1$, la forma original de $|X(j\omega)|$ no aparece más en la gráfica de $|X^*(j\omega)|$ contra ω debido a la superposición de los espectros. Por lo tanto, se ve que la señal en tiempo continuo $x(t)$ se puede reconstruir a partir de la señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$ a través de filtrado si y sólo si $\omega_s > 2\omega_1$.

Se debe observar que aunque el requisito de la frecuencia de muestreo mínima se especifica en el teorema del muestreo como $\omega_s > 2\omega_1$, donde ω_1 es la componente de más alta frecuencia presente en la señal, algunas consideraciones prácticas sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado y otras consideraciones de diseño pueden hacer necesario muestrear a una frecuencia mucho más alta que este valor mínimo teórico. (Con frecuencia, ω_s se elige como $10\omega_1$ o $20\omega_1$.)

Filtro paso-bajas ideal. La amplitud del espectro en frecuencia de un filtro paso-bajas ideal $G_I(j\omega)$ se muestra en la figura 3-12. La magnitud del filtro ideal es unitaria sobre el intervalo de frecuencias $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$ y es cero fuera de este intervalo de frecuencias.

El proceso de muestreo introduce un número infinito de componentes complementarias (componentes de bandas laterales) además de la componente primaria. El filtro ideal atenuará todas las componentes complementarias hasta cero y permitirá sólo el paso de la componente primaria, siempre que la ω_s sea dos veces mayor que la componente de más alta frecuencia de la señal en tiempo continuo. Dicho filtro ideal reconstruye la señal en tiempo continuo representada por las muestras. En la figura 3-13 se muestran los espectros en frecuencia de las señales antes y después del filtrado ideal.

El espectro en frecuencia a la salida del filtro ideal es $1/T$ veces el espectro en frecuencia de la señal en tiempo continuo original $x(t)$. Debido a que el filtro ideal tiene características de magnitud constante para la región de frecuencias $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$, no hay distorsión en ninguna frecuencia dentro de este intervalo. Esto es, no hay corrimiento de fase en el espectro de frecuencia de un filtro ideal. (El corrimiento de fase del filtro ideal es cero.)

Se debe observar que si la frecuencia de muestreo es menor que el doble de la componente de mayor frecuencia de la señal en tiempo continuo original, entonces, debido a que los espectros en

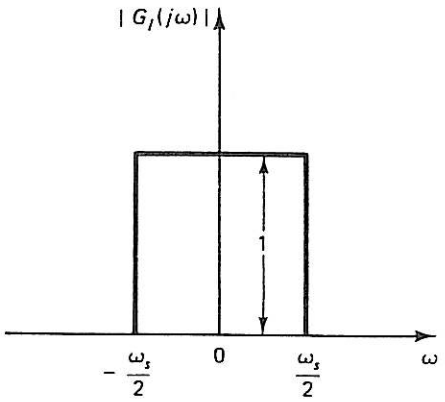


Figura 3-12 Espectro de frecuencia en amplitud de un filtro paso-bajas ideal.

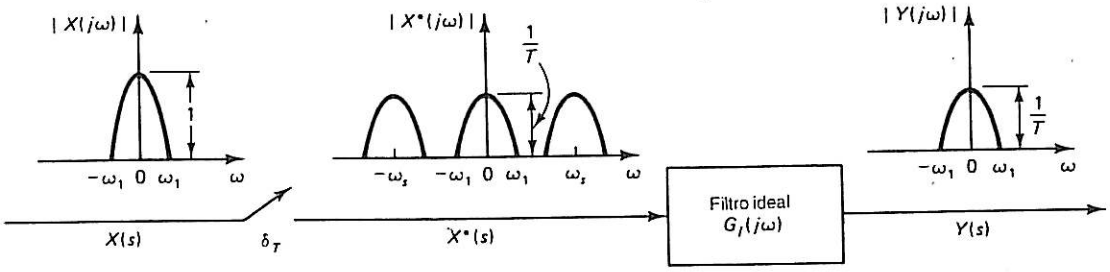


Figura 3-13 Espectro en frecuencia de las señales antes y después del filtrado ideal.

frecuencia de la componente primaria y complementarias se traslapan, aun el filtro ideal no puede reconstruir la señal original en tiempo continuo. (En la práctica, el espectro en frecuencia de la señal en tiempo continuo en un sistema de control se puede extender más allá de $\pm\frac{1}{2}\omega_s$, incluso cuando las amplitudes a altas frecuencias son pequeñas.)

El filtro paso-bajas ideal no es físicamente realizable. Se encontrará la respuesta impulso del filtro ideal. Se mostrará que para el filtro ideal se requiere una salida antes de que se aplique la entrada al filtro. Así, éste no es físicamente realizable.

Debido a que el espectro en frecuencia del filtro ideal está dado por

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la transformada inversa de Fourier del espectro en frecuencia da como resultado

$$\begin{aligned} g_I(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_I(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt}\left(e^{(1/2)j\omega_s t} - e^{-(1/2)j\omega_s t}\right) \\ &= \frac{1}{\pi t}\operatorname{sen}\frac{\omega_s t}{2} \end{aligned}$$

o

$$g_I(t) = \frac{1}{T}\frac{\operatorname{sen}(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} \tag{3–35}$$

La ecuación (3-35) da la respuesta impulso unitario del filtro ideal. En la figura 3-14 se muestra una gráfica de $g_I(t)$ contra t. Nótese que la respuesta se extiende desde $t = -\infty$ hasta $t = \infty$. Esto implica que existe respuesta para $t < 0$ a un impulso unitario que se aplica en $t = 0$. (Es decir, la respuesta en el tiempo empieza antes de que se aplique la entrada.) Esto no puede ser cierto en el mundo físico. Por lo tanto, dicho filtro no es físicamente realizable. [Sin embargo en muchos sistemas de comunicaciones, es posible aproximar $g_I(t)$ mediante la adición de un atraso de fase, lo cual significa agregar un retraso al filtro. En sistemas de control realimentado, incrementar el atraso de fase no es deseable desde el

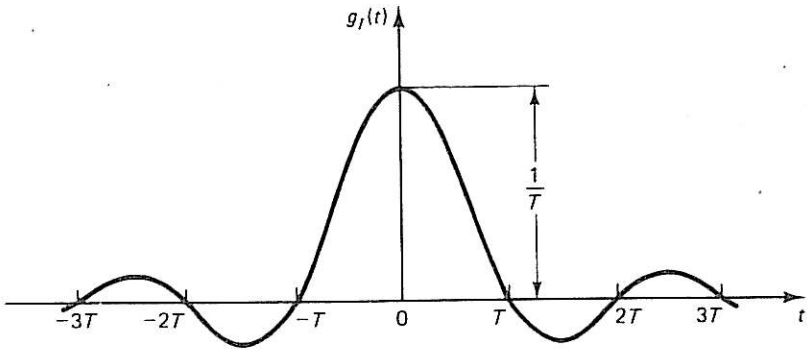


Figura 3-14 Respuesta al impulso $g_I(t)$ de un filtro ideal.

puno de vista de la estabilidad. Por lo tanto, se evita agregar atrasos de fase para aproximar al filtro ideal.]

Puesto que el filtro ideal es irrealizable y debido a que las señales en sistemas de control prácticos, en general tienen componentes de alta frecuencia que no están limitados en banda de manera ideal, esto no es posible, en la práctica, para reconstruir con exactitud la señal en tiempo continuo a partir de la señal muestreada, no importa qué frecuencia de muestreo se elija. (En otras palabras, desde el punto de vista práctico, no es posible reconstruir con precisión la señal en tiempo continuo en un sistema de control práctico una vez que éste se ha muestreado.)

Características de respuesta en frecuencia de un retenedor de orden cero. La función de transferencia de un retenedor de orden cero es

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{3–36}$$

Para comparar al retenedor de orden cero con el filtro ideal, se obtendrán las características de respuesta en frecuencia de la función de transferencia del retenedor de orden cero. Mediante la sustitución de $j\omega$ por s en la ecuación (3-36), se obtiene

$$\begin{aligned} G_{h0}(j\omega) &= \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega} \\ &= \frac{2e^{-(1/2)Tj\omega}(e^{(1/2)Tj\omega} - e^{-(1/2)Tj\omega})}{2j\omega} \\ &= T\frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-(1/2)Tj\omega} \end{aligned}$$

La amplitud del espectro en frecuencia de $G_{h0}(j\omega)$ es

$$|G_{h0}(j\omega)| = T\left|\frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}\right| \tag{3–37}$$

La magnitud se hace cero en la frecuencia igual a la frecuencia de muestreo y en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo.

En la figura 3-15*a*) se muestran las características de respuesta en frecuencia del retenedor de orden cero. Como se puede observar a partir de la figura 3-15, existe un pico de ganancia no deseado

en las frecuencias de $3\omega_s/2$, $5\omega_s/2$, etcétera. Nótese que la magnitud es más de 3 dB abajo de ($0.637 = -3.92$ dB) en la frecuencia $\frac{1}{2}\omega_s$. Debido a que la magnitud decrece en forma gradual a medida que la frecuencia se incrementa, las componentes complementarias se atenúan gradualmente hasta cero. Puesto que las características de magnitud del retenedor de orden cero no son constantes, si el sistema está conectado a un muestreador y retenedor de orden cero, se presenta distorsión en el espectro en frecuencia del sistema.

Las características de corrimiento de fase del retenedor de orden cero se pueden obtener como sigue. Observe que sen $(\omega T/2)$ adopta valores positivos y negativos a medida que ω se incrementa de 0 a ω_s, de ω_s a $2\omega_s$, de $2\omega_s$ a $3\omega_s$, y así sucesivamente. De este modo, la curva de fase [parte inferior de la figura 3-15*a*)] es discontinua en $\omega = k\omega_s = 2\pi k/T$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dicha discontinuidad o cambio de un valor positivo a uno negativo, o viceversa, se puede considerar como un corrimiento de fase de $\pm 180°$. En la figura 3-15*a*), se supone que el corrimiento de fase es de $-180°$. (Se puede suponer también que es de $+180°$.) De esta manera,

$$\angle G_{h0}(j\omega) = \angle T\frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}\angle e^{-(1/2)j\omega T}$$

$$= \angle \text{sen}\frac{\omega T}{2} + \angle e^{-(1/2)j\omega T} = \angle \text{sen}\frac{\omega T}{2} - \frac{\omega T}{2}$$

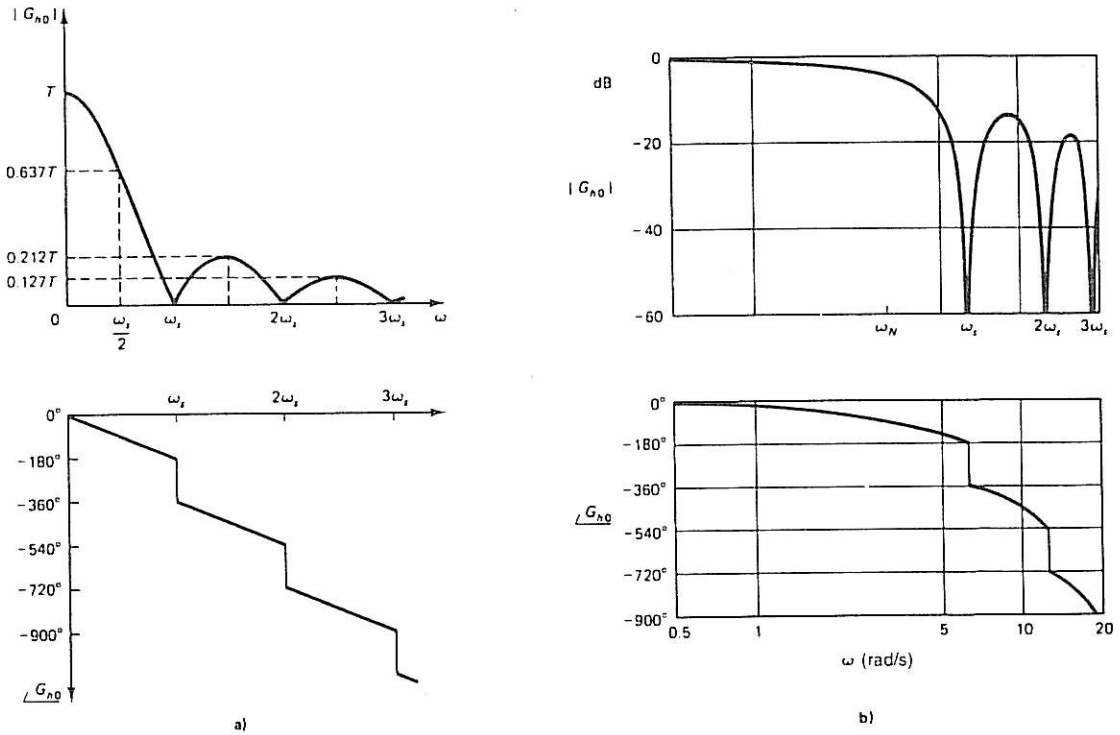


Figura 3-15 *a*) Curvas de respuesta en frecuencia para el retenedor de orden cero; *b*) diagrama de Bode equivalente cuando T = 1 s.

donde

$$\angle e^{-(1/2)j\omega T} = -\frac{\omega T}{2}$$

$$\angle \operatorname{sen}\frac{\omega T}{2} = 0° \quad \text{o} \quad \pm 180°$$

En la figura 3-15*b*) se presenta una modificación de cómo presentar las características de respuesta en frecuencia del diagrama de la figura 3-15*a*). El diagrama que se muestra en la figura 3-15*b*) es el diagrama de Bode del retenedor de orden cero. Se supone que el período T de muestreo es de 1 s o $T = 1$. Nótese que la curva de magnitud tiende a $-\infty$ decibeles en puntos de frecuencia que son múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T = 6.28$ rad/s. Las discontinuidades de la curva de fase [parte inferior de la figura 3-15*b*)] se presentan en estos puntos de frecuencia.

Para resumir lo que se ha establecido, el espectro en frecuencia de la salida del retenedor de orden cero incluye las componentes complementarias, debido a que las características de magnitud muestran que la magnitud de $G_{h0}(j\omega)$ es distinta de cero para $|\omega| > \frac{1}{2}\omega_s$, excepto en los puntos donde $\omega = \pm\omega_s$, $\omega = \pm 2\omega_s$, $\omega = \pm 3\omega_s$, ... En la curva de fase existen discontinuidades de $\pm 180°$ en los puntos de frecuencia múltiplos de ω_s. Excepto por estas discontinuidades en la fase, ésta es lineal en ω.

En la figura 3-16 se muestra la comparación del filtro ideal y el retenedor de orden cero. Con propósitos de comparación, las magnitudes $|G(j\omega)|$ están normalizadas. Se observa que el retenedor de orden cero es un filtro paso-bajas, aunque su función no es muy buena. A menudo, el filtrado adicional de la señal en bajas frecuencias antes del muestreo es necesario para remover de manera efectiva las componentes de frecuencia mayores que $\frac{1}{2}\omega_s$.

La exactitud del retenedor de orden cero como un extrapolador depende de la frecuencia de muestreo ω_s. Esto es, la salida del retenedor se puede hacer tan cercana a la señal en tiempo continuo original como sea posible haciendo que el período de muestreo T sea tan pequeño como la situación práctica lo permita.

Doblamiento. El fenómeno de traslape en el espectro en frecuencia se conoce como *doblamiento*. En la figura 3-17 se muestran las regiones donde se presenta error de doblamiento. La frecuencia $\frac{1}{2}\omega_s$ se denomina *frecuencia de doblamiento* o *frecuencia de Nyquist* ω_N. Esto es,

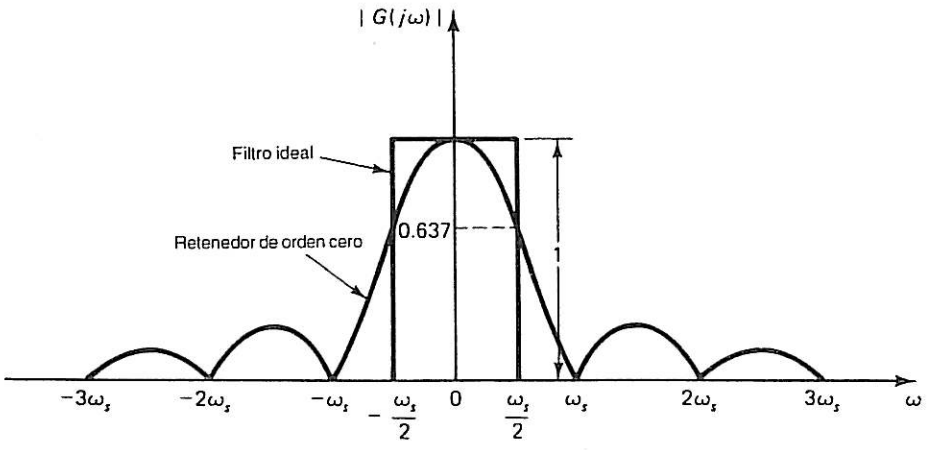


Figura 3-16 Comparación del filtro ideal y el retenedor de orden cero.

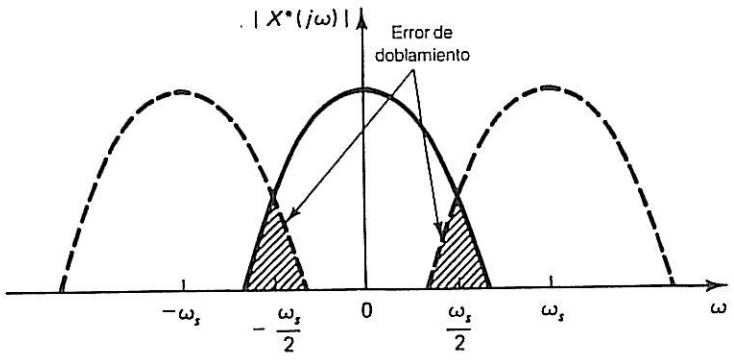


Figura 3-17 Diagrama que muestra las regiones donde se presentan los errores de doblamiento.

$$\omega_N = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{\pi}{T}$$

En la práctica, las señales en los sistemas de control tienen componentes de alta frecuencia, y casi siempre existe algún efecto de doblamiento. Por ejemplo, en un sistema electromecánico alguna señal puede estar contaminada por ruido. El espectro en frecuencia de la señal, por tanto, puede incluir componentes de baja frecuencia, así como componentes de ruido de alta frecuencia (esto es, ruidos en 60 o 400 Hz). Debido a que las frecuencias de muestreo mayores de 400 Hz no son prácticas, la alta frecuencia se doblará y aparecerá como una baja frecuencia. Recuerde que todas las señales con frecuencias mayores a $\frac{1}{2}\ \omega_s$ aparecen como señales de frecuencias entre 0 y $\frac{1}{2}\ \omega_s$. De hecho, en ciertos casos, una señal de frecuencia cero puede aparecer en la salida.

Traslape. En el espectro en frecuencia de una señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$, donde $\omega_s < 2\omega_1$, como el mostrado en la figura 3-18, considere un punto de frecuencia arbitrario ω_2 que cae en la región del traslape del espectro en frecuencia. El espectro en frecuencia en $\omega = \omega_2$ incluye dos componentes $|X^*(j\omega_2)|$ y $|X^*(j(\omega_s - \omega_2))|$. La última componente viene del espectro en frecuencia centrado en $\omega = \omega_s$. De este modo, el espectro en frecuencia de la señal muestreada en $\omega = \omega_2$ incluye

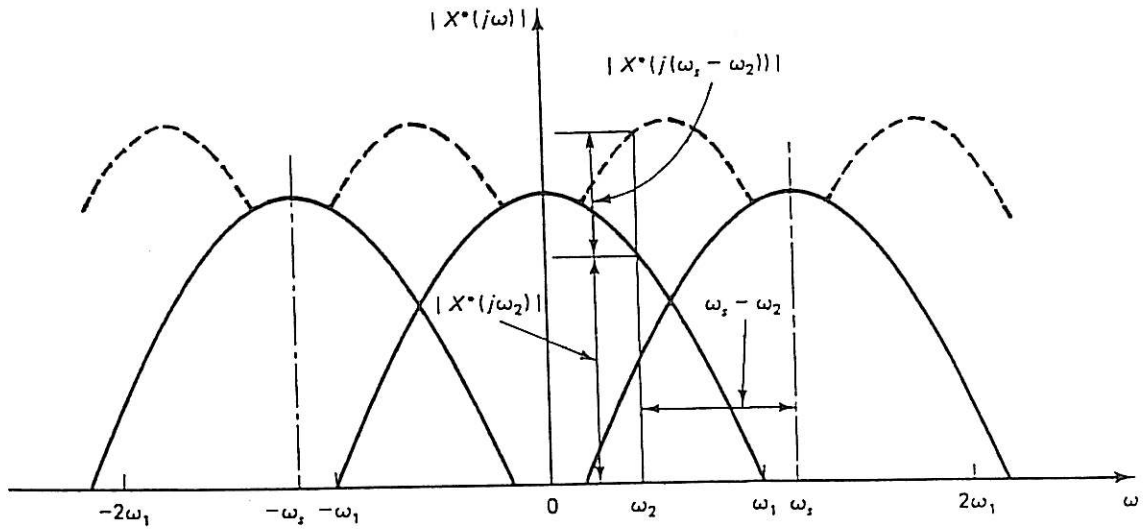


Figura 3-18 Espectro en frecuencia de una señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$.

componentes no sólo en la frecuencia ω_2 sino también en la frecuencia $\omega_s - \omega_2$ (en general, en $n\omega_s \pm \omega_2$, donde n es un entero). Cuando el espectro compuesto se filtra mediante un filtro paso-bajas, tal como un retenedor de orden cero, algunas armónicas de alta frecuencia estarán aún presentes en la salida. La componente de frecuencia en $\omega = n\omega_s \pm \omega_2$ (donde n es un entero) aparecerá en la salida como si ésta fuera una componente de frecuencia en $\omega = \omega_2$. No es posible distinguir el espectro en frecuencia en $\omega = \omega_2$ de aquel en $\omega = n\omega_s \pm \omega_2$.

Como se muestra en la figura 3-18, el fenómeno de que la componente de frecuencia $\omega_s - \omega_2$ (en general, $n\omega_s \pm \omega_2$, donde n es un entero) se presente sobre la frecuencia ω_2 cuando la señal $x(t)$ se muestrea se denomina *traslape*. Esta frecuencia $\omega_s - \omega_2$ (en general, $n\omega_s \pm \omega_2$) se conoce como un *alias* de ω_2.

Es importante recordar que las señales muestreadas son idénticas si las dos frecuencias difieren por un múltiplo entero de la frecuencia de muestreo ω_s. Si una señal se muestrea a una frecuencia baja de modo que el teorema de muestreo no se satisfaga, entonces las altas frecuencias se "doblan hacia adentro" y aparecen como bajas frecuencias.

Para evitar el traslape, se debe ya sea elegir la frecuencia de muestreo lo suficientemente alta ($\omega_s > 2\omega_1$, donde ω_1 es la componente de más alta frecuencia presente en la señal) o utilizar un prefiltro antes del muestreador para darle forma al espectro en frecuencia de la señal (de modo que el espectro en frecuencia para $\omega > \frac{1}{2}\omega_s$ sea despreciable) antes de que la señal sea muestreada.

Oscilaciones escondidas. Se debe observar que, si la señal en tiempo continuo $x(t)$ incluye una componente de frecuencia igual a n veces la frecuencia de muestreo ω_s (donde n es un entero), entonces la componente puede no aparecer en la señal muestreada. Por ejemplo, si la señal

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \text{sen}\, t + \text{sen}\, 3t$$

donde $x_1(t) = \text{sen}\, t$ y $x_2(t) = \text{sen}\, 3t$, se muestrea en $t = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, \ldots$ (la frecuencia de muestreo ω_s es 3 rad/s), entonces la señal muestreada no mostrará la componente de frecuencia con $\omega = 3$ rad/s, la frecuencia es igual a ω_s. (Véase la figura 3-19.)

Aun cuando la señal $x(t)$ incluya una oscilación con $\omega = 3$ rad/s [esto es, la componente $x_2(t) = \text{sen}\, 3t$], la señal muestreada no muestra esta oscilación. Dicha oscilación existente en $x(t)$ entre los períodos de muestreo se denomina *oscilación escondida*.

3-5 LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PULSO

La función de transferencia para un sistema continuo relaciona las transformadas de Laplace de la salida en tiempo continuo con la correspondiente de la entrada en tiempo continuo, mientras que la función de transferencia pulso relaciona las transformadas z de la salida en los instantes de muestreo con la correspondiente entrada muestreada.

Antes de estudiar la función de transferencia pulso, es conveniente estudiar la sumatoria de convolución.

Sumatoria de convolución. Considere la respuesta de un sistema en tiempo continuo excitado por una señal muestreada mediante impulsos (un tren de impulsos) como se muestra en la figura 3-20. Suponga que $x(t) = 0$ para $t < 0$. La señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$ es la entrada al sistema en tiempo continuo cuya función de transferencia es $G(s)$. Se supone que la salida del sistema es una señal en tiempo continuo $y(t)$. Si en la salida hay otro muestreador, sincronizado en fase con el

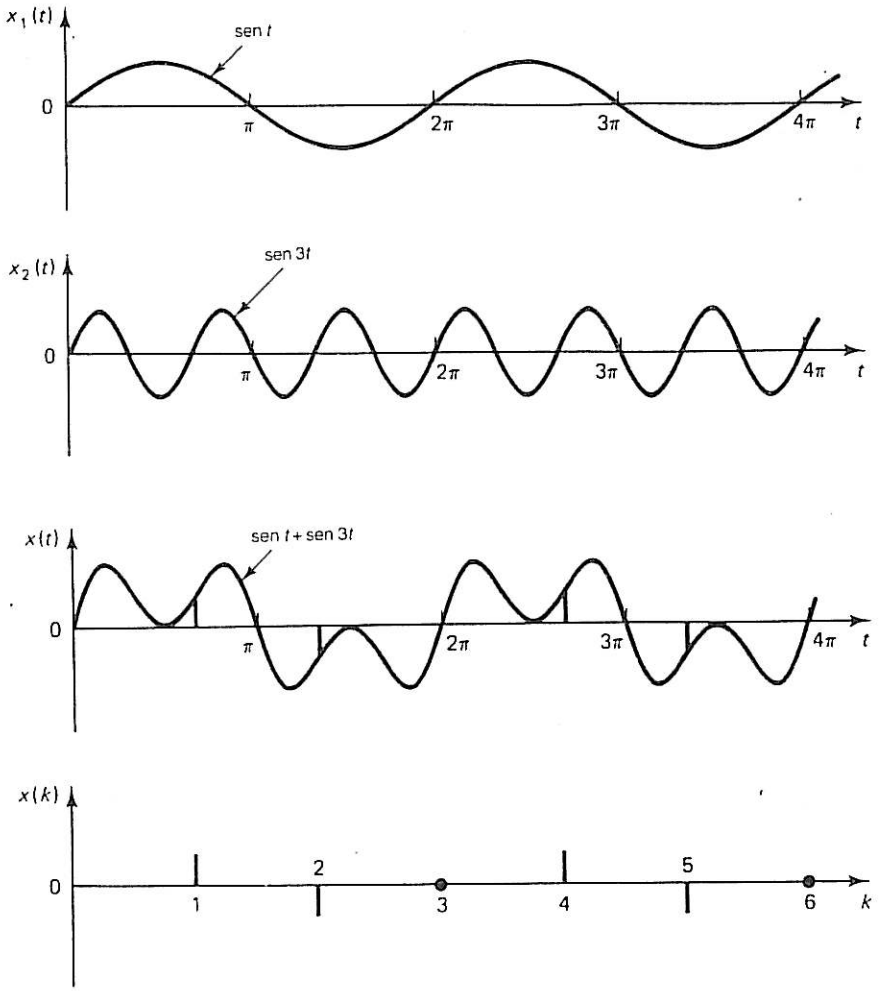


Figura 3-19 Gráficas de $x_1(t)$ = sen t, $x_2(t)$ = sen $3t$, y $x(t)$ = sen t + sen $3t$. Señal muestreada $x(k)$, donde la frecuencia de muestreo ω_s = 3 rad/s, no muestra oscilación con la frecuencia ω = 3 rad/s.

muestreador de la entrada, y ambos operan con el mismo período de muestreo, entonces la salida es un tren de impulsos. Se supone que $y(t) = 0$ para $t < 0$.

La transformada z de $y(t)$ es

$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \tag{3–38}$$

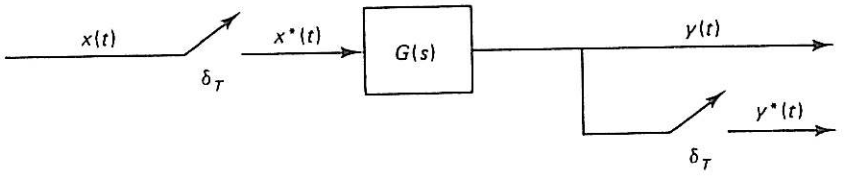


Figura 3-20 Sistema de tiempo continuo $G(s)$ excitado con una señal muestreada mediante impulsos.

En ausencia del muestreador a la salida, si se considera un muestreador ficticio en la salida (sincronizado en fase con el muestreador de entrada y opera al mismo período de muestreo) y se observa la secuencia de valores que toma $y(t)$ sólo en los instantes $t = kT$, entonces la transformada z de la salida $y^*(t)$ puede también estar dada por la ecuación (3-38).

Para el sistema en tiempo continuo, es bien conocido el hecho de que la salida del sistema $y(t)$ está relacionada con la entrada $x(t)$ por medio de la integral de convolución, o

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)\,d\tau = \int_0^t x(t - \tau)g(\tau)\,d\tau$$

donde $g(t)$ es la función de ponderación del sistema o la función de respuesta impulso del sistema. Para sistemas en tiempo discreto se tiene una sumatoria de convolución, similar a la integral de convolución. Debido a que

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

es un tren de impulsos, la respuesta $y(t)$ del sistema debida a la entrada $x^*(t)$ es la suma de las respuestas impulso individuales. Por tanto,

$$y(t) = \begin{cases} g(t)x(0), & 0 \le t < T \\ g(t)x(0) + g(t - T)x(T), & T \le t < 2T \\ g(t)x(0) + g(t - T)x(T) + g(t - 2T)x(2T), & 2T \le t < 3T \\ \vdots & \\ g(t)x(0) + g(t - T)x(T) + \cdots + g(t - kT)x(kT), & kT \le t < (k + 1)T \end{cases}$$

Si observamos que para un sistema físico una respuesta no puede preceder a la entrada, tenemos que $g(t) = 0$ para $t < 0$ o $g(t - kT) = 0$ para $t < kT$. En consecuencia, las ecuaciones anteriores se pueden combinar en una sola ecuación:

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t)x(0) + g(t - T)x(T) + g(t - 2T)x(2T) + \cdots + g(t - kT)x(kT) \\ &= \sum_{h=0}^{k} g(t - hT)x(hT) \qquad 0 \le t \le kT \end{aligned}$$

Los valores de la salida $y(t)$ en los instantes de muestreo $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) están dados por

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(kT - hT)x(hT) \tag{3-39}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} x(kT - hT)g(hT) \tag{3-40}$$

donde $g(kT)$ es la secuencia de ponderación del sistema. [La transformada z inversa de $G(z)$ se denomina *secuencia de ponderación.*] La sumatoria en las ecuaciones (3-39) o (3-40) se conoce como *sumatoria de convolución.* Observe que la notación simplificada

$$y(kT) = x(kT) * g(kT)$$

se emplea a menudo para la sumatoria de convolución.

Debido a que se supuso que $x(t) = 0$ para $t < 0$, se tiene que $x(kT - hT) = 0$ para $h > k$. También, debido a que $g(kT - hT) = 0$ para $h > k$, se puede suponer que los valores de h en las ecuaciones

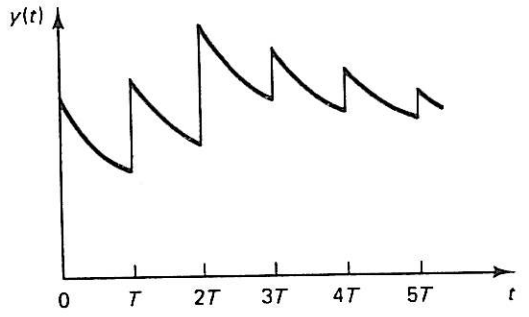
(3-39) y (3-40) se pueden tomar desde 0 hasta ∞ más que desde 0 hasta k sin alterar el valor de la sumatoria. Por tanto, las ecuaciones (3-39) y (3-40) se pueden rescribir como sigue:

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT) \tag{3-41}$$

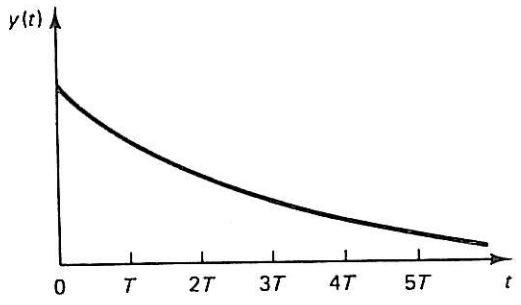
$$= \sum_{h=0}^{\infty} x(kT - hT)g(hT) \tag{3-42}$$

Se debe observar que si $G(s)$ es un cociente de polinomios en s y si el grado del polinomio del denominador excede sólo en 1 el grado del polinomio del denominador, la salida $y(t)$ es discontinua, como se muestra en la figura 3-21*a*). Cuando $y(t)$ es discontinua, las ecuaciones (3-41) y (3-42) darán los valores inmediatamente posteriores a los instantes de muestreo, esto es $y(0+), y(T+), \ldots, y(kT+)$. Dichos valores no describen la curva real de la respuesta.

Sin embargo, si el grado del polinomio del denominador excede al del numerador en 2 o más, la salida $y(t)$ es continua, como se muestra en la figura 3-21*b*). Cuando $y(t)$ es continua, las ecuaciones (3-41) y (3-42) darán los valores en los instantes de muestreo. Los valores de $y(k)$ en dicho caso describen los valores de la curva real de la respuesta.



a)



b)

Figura 3-21 *a*) Gráfica de la salida $y(t)$ (respuesta al impulso) contra t cuando el grado del polinomio del denominador de $G(s)$ es de grado mayor en 1 que el polinomio del numerador; *b*) gráfica de la salida $y(t)$ contra t cuando el grado del polinomio del denominador de $G(s)$ es de grado mayor en 2 o más que el polinomio del numerador.

Al analizar los sistemas de control en tiempo discreto es importante recordar que la respuesta del sistema a una señal muestreada mediante impulsos puede no describir el correcto comportamiento de la respuesta en el tiempo para el sistema real, a menos que la función de transferencia $G(s)$ de la parte del sistema en tiempo continuo tenga por lo menos dos polos más que ceros, de modo que $\lim_{s\to\infty} sG(s) = 0$.

Función de transferencia pulso. A partir de la ecuación (3-41) se tiene

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $g(kT - hT) = 0$ para $h > k$. Por lo tanto, la transformada z de $y(kT)$ se convierte en

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)x(hT)z^{-(m+h)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m}\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h} \\ &= G(z)X(z) \end{aligned} \tag{3-43}$$

donde $m = k - h$ y

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} = \text{transformada } z \text{ de } g(t)$$

La ecuación (3-43) relaciona la salida pulso $Y(z)$ del sistema y la entrada pulso $X(z)$. Esto proporciona un medio para determinar la transformada z de la secuencia de salida para cualquier secuencia de entrada. Al dividir ambos miembros de la ecuación (3-43) entre $X(z)$ obtenemos

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3-44}$$

La $G(z)$ dada por la ecuación (3-44), el cociente entre la salida $Y(z)$ y la entrada $X(z)$, se denomina *función de transferencia pulso* del sistema en tiempo discreto. Ésta es la transformada z de la secuencia de ponderación. En la figura 3-22 se muestra un diagrama de bloques para una función de transferencia pulso $G(z)$, junto con la entrada $X(z)$ y la salida $Y(z)$. Como se ve de la ecuación (3-43), la transformada z de la señal de salida se puede obtener como el producto de la función de transferencia pulso del sistema y la transformada z de la señal de entrada.

Observe que $G(z)$ es también la transformada z de la respuesta del sistema a la entrada delta de Kronecker:

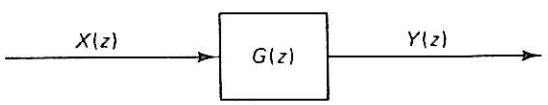


Figura 3-22 Diagrama de bloques para la función de transferencia pulso de un sistema.

$$x(kT) = \delta_0(kT) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

Debido a que la transformada z de la entrada delta de Kronecker es

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = 1$$

entonces, refiriéndose a la ecuación (3-44), la respuesta $Y(z)$ a la entrada delta de Kronecker es

$$Y(z) = G(z)$$

De este modo, la respuesta del sistema a la entrada delta de Kronecker es $G(z)$, la transformada z de la secuencia de ponderación. Este hecho es paralelo al de que $G(s)$ es la transformada de Laplace de la función de ponderación del sistema, que es la respuesta del sistema a la función impulso unitario.

Transformada de Laplace asterisco de la señal que involucra tanto transformadas de Laplace ordinarias como asterisco. Al analizar los sistemas de control en tiempo discreto, a menudo se encuentra que algunas señales en el sistema son señales asterisco (lo que significa que las señales están muestreadas mediante impulsos) y otras no lo son. Para obtener las funciones de transferencia pulso y analizar el sistema de control en tiempo discreto, por lo tanto, se debe ser capaz de obtener las transformadas de las señales de salida de los sistemas que contienen operaciones de muestreo en varios lugares en los lazos.

Suponga que el muestreador mediante impulsos es seguido por un elemento lineal en tiempo continuo, cuya función de transferencia es $G(s)$, como se muestra en la figura 3-23. En el siguiente análisis se supone que todas las condiciones iniciales en el sistema son cero. Entonces, la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X^*(s) \tag{3-45}$$

Nótese que $Y(s)$ es el producto de $X^*(s)$, que es periódica con un periodo de $2\pi/\omega_s$, y $G(s)$, no periódica. El hecho de que las señales muestreadas mediante impulsos son periódicas se puede ver del hecho de que

$$X^*(s) = X^*(s \pm j\omega_s k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3-46}$$

(Véase el ejemplo 3-2.)

En lo que se presenta a continuación se mostrará que al tomar la transformada de Laplace asterisco de la ecuación (3-45) se puede factorizar $X^*(s)$ de manera que

$$Y^*(s) = [G(s)X^*(s)]^* = [G(s)]^*X^*(s) = G^*(s)X^*(s) \tag{3-47}$$

Este hecho es muy importante en la obtención de la función de transferencia pulso y también en la simplificación del diagrama de bloques del sistema de control en tiempo discreto.

Para obtener la ecuación (3-47), observe que la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ dada por la ecuación (3-45) se puede escribir como sigue:

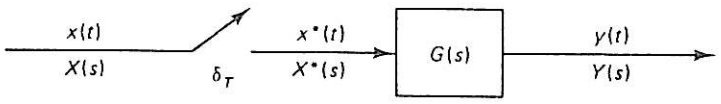


Figura 3-23 Sistema muestreado mediante impulsos.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)X^*(s)] \\ &= \int_0^t g(t-\tau)x^*(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-kT)\,d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\delta(\tau-kT)\,d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)x(kT) \end{aligned}$$

Entonces la transformada z de $y(t)$ se convierte en

$$\begin{aligned} Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(nT-kT)x(kT)\right]z^{-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(mT)x(kT)z^{-(k+m)} \end{aligned}$$

donde $m = n - k$. De este modo,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= G(z)X(z) \end{aligned} \tag{3-48}$$

Debido a que la transformada z puede entenderse como la transformada de Laplace asterisco con e^{Ts} reemplazada por z, la transformada z se puede considerar una notación corta para la transformada de Laplace asterisco. De esta manera, la ecuación (3-48) se puede expresar como

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s)$$

que es la ecuación (3-47). Así se ha mostrado que al tomar la transformada de Laplace asterisco en ambos miembros de la ecuación (3-45) se obtiene la ecuación (3-47).

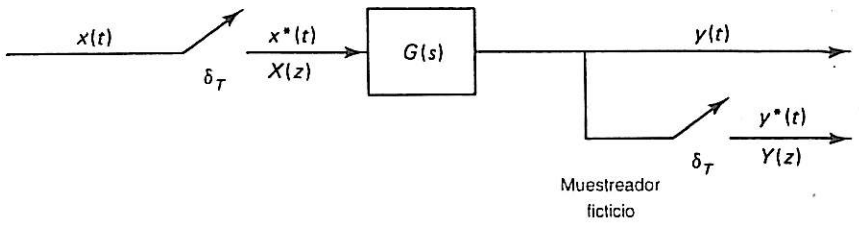
Para resumir lo que se ha obtenido, observe que las ecuaciones (3-45) y (3-47) establecen que al tomar la transformada de Laplace asterisco de un producto de transformadas, donde algunas son transformadas de Laplace ordinarias y otras son transformadas de Laplace asterisco, las funciones que ya están en transformadas asterisco se pueden factorizar de la operación de la transformada de Laplace asterisco.

Se debe observar que los sistemas se hacen periódicos bajo la operación de la transformada de Laplace asterisco. Dichos sistemas periódicos son en general más complicados de analizar que los sistemas originales que no son periódicos, pero el anterior se puede analizar sin dificultad si se lleva al plano z (esto es, mediante el enfoque de la función de transferencia pulso).

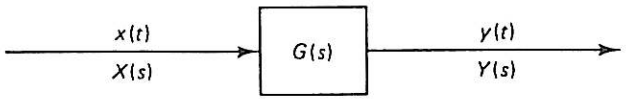
Procedimientos generales para obtener funciones de transferencia pulso. Aquí se presentarán procedimientos generales para obtener la función de transferencia pulso de un sistema que tiene un muestreador mediante impulsos en una de las entradas del sistema, como se muestra en la figura 3-24*a*).

La función de transferencia pulso $G(z)$ del sistema que se muestra en la figura 3-24*a*) es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$$



a)



b)

Figura 3-24 *a*) Sistema en tiempo continuo con un muestreador mediante impulsos en la entrada; *b*) sistema en tiempo continuo.

Después, considere el sistema que se muestra en la figura 3-24*b*). La función de transferencia $G(s)$ está dada por

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

Es importante recordar que la función de transferencia pulso para este sistema no es $\mathcal{Z}[G(s)]$, debido a la ausencia del muestreador mediante impulsos.

La presencia o ausencia del muestreador mediante impulsos es crucial en la determinación de la función de transferencia pulso del sistema, puesto que, por ejemplo, para el sistema que se muestra en la figura 3-24*a*), la transformada de Laplace de la salida $y(t)$ es

$$Y(s) = G(s)X^*(s)$$

Por lo tanto, al tomar la transformada de Laplace asterisco de $Y(s)$, se tiene

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s)$$

o, en términos de la transformada z,

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

mientras que, para el sistema que se muestra en la figura 3-24*b*), la transformada de Laplace de la salida $y(t)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

lo cual da como resultado

$$Y^*(s) = [G(s)X(s)]^* = [GX(s)]^*$$

o, en términos de la transformada z,

$$Y(z) = \mathcal{Z}[Y(s)] = \mathcal{Z}[G(s)X(s)] = \mathcal{Z}[GX(s)] = GX(z) \neq G(z)X(z)$$

El hecho de que la transformada z de $G(s)X(s)$ no es igual a $G(z)X(z)$ se estudiará con detalle más adelante en esta sección.

Al estudiar la función de transferencia pulso, se supone que existe un muestreador a la entrada del elemento en consideración. La presencia o ausencia del muestreador a la salida del elemento (o el sistema) no afecta la función de transferencia pulso, debido a que, si el muestreador no está fisicamente presente en el lado de salida del sistema, es siempre posible suponer que el muestreador ficticio esté presente en la salida. Esto significa que, aunque la señal de salida es continua, se puede considerar los valores de la salida sólo en $t = kT$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ y así se obtiene la secuencia $y(kT)$.

Observe que sólo para el caso donde la entrada al sistema $G(s)$ es una señal muestreada mediante impulsos, la función de transferencia pulso está dada por

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$$

Los ejemplos 3-4 y 3-5 demuestran los métodos para obtener la función de transferencia pulso.

Ejemplo 3-4

Obtenga la función de transferencia pulso $G(z)$ del sistema que se muestra en la figura 3-24a), donde $G(s)$ está dada por

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

Observe que existe un muestreador a la entrada de $G(s)$ y por tanto la función de transferencia pulso es $G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$.

Método 1. Refiriéndose a la tabla 2-1, se tiene

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s + a}\right] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

Por lo tanto,

$$G(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

Método 2. La función de respuesta impulso del sistema se obtiene como sigue:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-at}$$

Por lo tanto,

$$g(kT) = e^{-akT}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo que,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT}z)^{-k}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

Ejemplo 3-5

Obtenga la función de transferencia pulso del sistema que se muestra en la figura 3-24*a*), donde $G(s)$ está dada por

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s + 1)}$$

Observe que existe un muestreador en la entrada de $G(s)$.

Método 1. $G(s)$ incluye el término $(1 - e^{-Ts})$; por tanto, refiriéndose a la ecuación (3-32), se obtiene la función de transferencia pulso como sigue:

$$\begin{aligned} G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] &= \mathcal{Z}\left[(1 - e^{-Ts})\frac{1}{s^2(s + 1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s + 1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1}\right] \end{aligned}$$

A partir de la tabla 2-1, se puede encontrar la transformada z de cada uno de los términos de la expansión en fracciones parciales. De este modo,

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} \end{aligned} \tag{3-49}$$

Método 2. La función de transferencia $G(s)$ dada se puede escribir como sigue:

$$G(s) = (1 - e^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1}\right)$$

Por tanto, al tomar la transformada inversa de Laplace, se tiene la siguiente función de respuesta impulso:

$$g(t) = (t - 1 + e^{-t})1(t) - [t - T - 1 + e^{-(t-T)}]1(t - T)$$

o

$$\begin{aligned} g(kT) &= (kT - 1 + e^{-kT}) - [kT - T - 1 + e^{-(kT-T)}]1((k - 1)T) \\ &= \begin{cases} e^{-kT} + T - e^{-(kT-T)}, & k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces la función de transferencia pulso $G(z)$ se puede obtener como sigue:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-kT} + T - e^{-(kT-T)}]z^{-k} + e^{T} - 1 - T \\ &= (1 - e^{T}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}z^{-k} + T \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + e^{T} - 1 - T \\ &= (1 - e^{T})\frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} + \frac{T}{1 - z^{-1}} + e^{T} - 1 - T \\ &= \frac{(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} \end{aligned}$$

Función de transferencia pulso de elementos en cascada. Considere el sistema que se muestra en las figuras 3-25*a*) y *b*). Aquí se supone que los muestreadores están sincronizados y que tienen el mismo período de muestreo. Se mostrará que la función de transferencia pulso del sistema que se muestra en la figura 3-25*a*) es $G(z)H(z)$, mientras que la del sistema que se muestra en la figura 3-25*b*) es $\mathcal{Z}[G(s)H(s)] = \mathcal{Z}[GH(s)] = GH(z)$, que es diferente de $G(z)H(z)$.

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-25*a*). A partir del diagrama se obtiene

$$U(s) = G(s)X^*(s)$$

$$Y(s) = H(s)U^*(s)$$

Por tanto, al tomar la transformada de Laplace asterisco de cada una de estas dos ecuaciones, se obtiene como resultado

$$U^*(s) = G^*(s)X^*(s)$$

$$Y^*(s) = H^*(s)U^*(s)$$

En consecuencia,

$$Y^*(s) = H^*(s)U^*(s) = H^*(s)G^*(s)X^*(s)$$

o

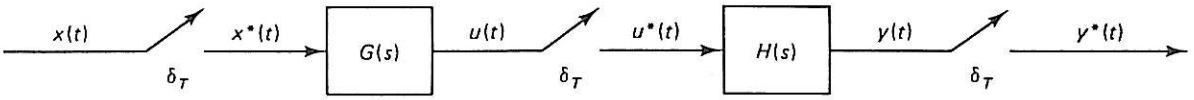
$$Y^*(s) = G^*(s)H^*(s)X^*(s)$$

En términos de la notación de la transformada z,

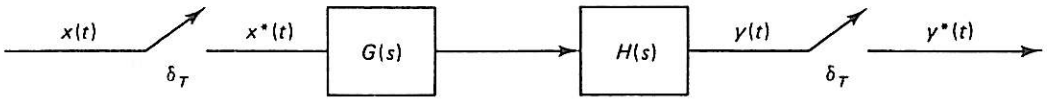
$$Y(z) = G(z)H(z)X(z)$$

La función de transferencia pulso entre la salida $y^*(t)$ y la entrada $x^*(t)$ está por tanto dada mediante

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)H(z)$$



a)



b)

Figura 3-25 *a*) Sistema muestreado con un muestreador entre los elementos en cascada $G(s)$ y $H(s)$; *b*) sistema muestreado sin muestreador entre los elementos en cascada $G(s)$ y $H(s)$.

Después, considere el sistema que se muestra en la figura 3-25*b*). A partir del diagrama se encuentra que

$$Y(s) = G(s)H(s)X^*(s) = GH(s)X^*(s)$$

donde

$$GH(s) = G(s)H(s)$$

Al tomar la transformada de Laplace asterisco de $Y(s)$, se tiene

$$Y^*(s) = [GH(s)]^*X^*(s)$$

En términos de la notación de la transformada z,

$$Y(z) = GH(z)X(z)$$

y la función de transferencia pulso entre la salida $y^*(t)$ y la entrada $x^*(t)$ es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z) = \mathcal{Z}[GH(s)]$$

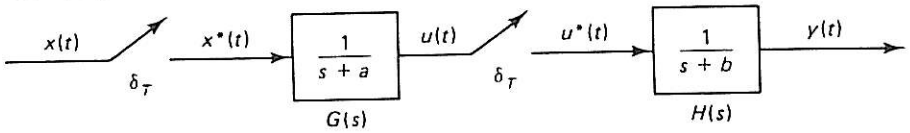
Observe que

$$G(z)H(z) \neq GH(z) = \mathcal{Z}[GH(s)]$$

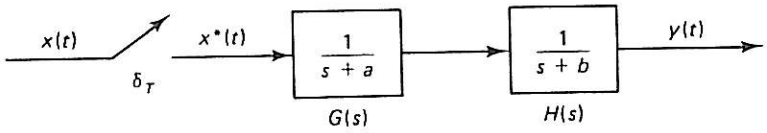
Por tanto, las funciones de transferencia pulso de los sistemas que se muestran en las figuras 3-25*a*) y *b*) son diferentes. Ahora se verificará esta aserción en el ejemplo 3-6.

Ejemplo 3-6

Considere los sistemas que se muestran en las figuras 3-26*a*) y *b*). Obtenga la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ para cada uno de estos dos sistemas.



a)



b)

Figura 3-26 *a*) Sistema muestreado con un muestreador entre los elementos $G(s) = 1/(s + a)$ y $H(s) = 1/(s + b)$; *b*) sistema muestreado sin muestreador entre los elementos $G(s)$ y $H(s)$.

Para el sistema de la figura 3-26*a*), las dos funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$ están separadas por un muestreador. Se supone que los dos muestreadores que se presentan están sincronizados y tienen el mismo período de muestreo. La función de transferencia pulso para este sistema es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}\frac{U(z)}{X(z)} = H(z)G(z) = G(z)H(z)$$

Por tanto,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)H(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right]\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}$$

Para el sistema que se muestra en la figura 3-26*b*), la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{X(z)} &= \mathcal{Z}[G(s)H(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\frac{1}{s+b}\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}\right]$$

Claramente, se ve que las funciones de transferencia pulso de los dos sistemas son diferentes; esto es,

$$G(z)H(z) \neq GH(z)$$

Por tanto, se debe tener el cuidado de observar si hay o no un muestreador entre los dos elementos en cascada.

Función de transferencia pulso de sistemas en lazo cerrado. En un sistema en lazo cerrado, la existencia o no de un muestreador de salida en el lazo hace que el comportamiento del sistema sea diferente. (Si existe un muestreador fuera del lazo, no habrá ninguna diferencia en la operación del lazo cerrado.)

Considere el sistema de control en lazo cerrado que se muestra en la figura 3-27. En este sistema, el error actuante está muestreado. A partir del diagrama de bloques,

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

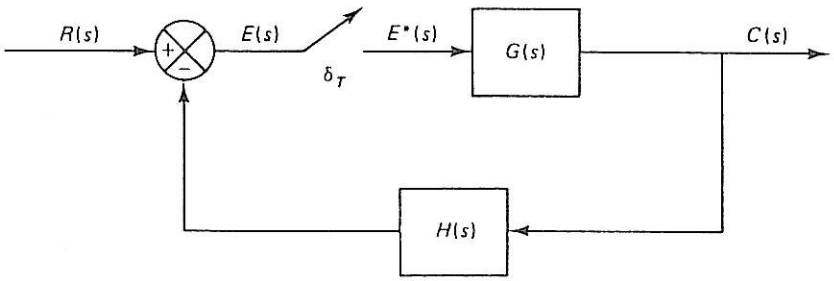


Figura 3-27 Sistema de control en lazo cerrado.

Por tanto,

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

Entonces, al tomar la transformada de Laplace asterisco, se obtiene

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$$

o

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

Puesto que

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

se obtiene

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

En términos de la notación de la transformada z, la salida puede darse mediante

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$$

La transformada z inversa de esta última ecuación da los valores de la salida en los instantes de muestreo. [Observe que la salida real $c(t)$ del sistema es una señal en tiempo continuo. La transformada z inversa de $C(z)$ no dará la señal de salida en tiempo continuo $c(t)$.] La función de transferencia pulso para este sistema en lazo cerrado es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \tag{3–50}$$

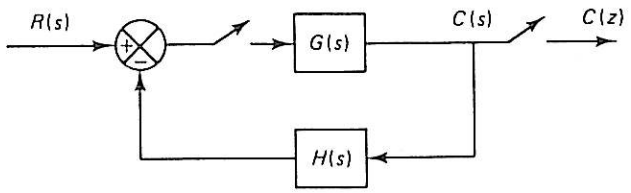
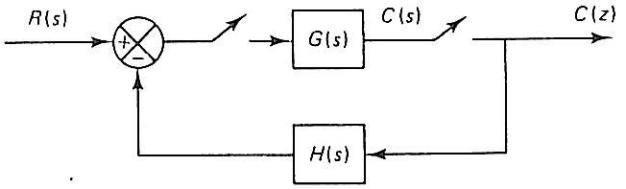
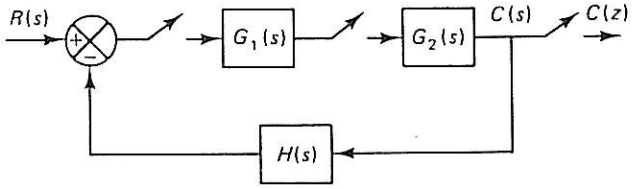
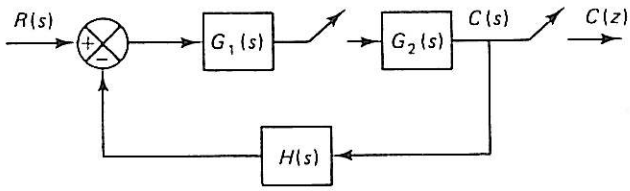
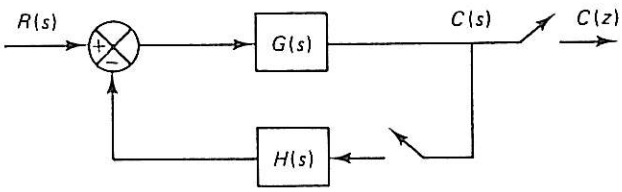
En la tabla 3-1 se muestran cinco configuraciones típicas para sistemas de control en tiempo discreto en lazo cerrado. Aquí, los muestreadores están sincronizados y tienen el mismo periodo de muestreo. Para cada configuración, se muestra la salida correspondiente $C(z)$. Nótese que algunos sistemas de control en tiempo discreto en lazo cerrado no se pueden representar mediante $C(z)/R(z)$ (esto es, no tienen función de transferencia pulso) debido a que la señal de entrada $R(s)$ no se puede separar de la dinámica del sistema. Aunque la función de transferencia pulso no pueda existir para ciertas configuraciones de sistemas, se pueden aplicar las mismas técnicas que se estudian en este capítulo para analizarlas.

Función de transferencia pulso de un controlador digital. La función de transferencia pulso de un controlador digital se puede obtener a partir de las características entrada-salida requeridas del controlador digital.

Suponga que la entrada al controlador digital es $e(k)$ y la salida es $m(k)$. En general, la salida $m(k)$ puede estar dada mediante el siguiente tipo de ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} m(k) + a_1 m(k-1) + a_2 m(k-2) + \cdots + a_n m(k-n) \\ = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \cdots + b_n e(k-n) \end{aligned} \tag{3–51}$$

TABLA 3-1 CINCO CONFIGURACIONES TÍPICAS DE SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO EN LAZO CERRADO

	$C(z) = \dfrac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
	$C(z) = \dfrac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
	$C(z) = \dfrac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$
	$C(z) = \dfrac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$
	$C(z) = \dfrac{GR(z)}{1 + GH(z)}$

La transformada z de la ecuación (3-51) da como resultado

$$M(z) + a_1 z^{-1} M(z) + a_2 z^{-2} M(z) + \cdots + a_n z^{-n} M(z)$$
$$= b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \cdots + b_n z^{-n} E(z)$$

o

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}) M(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}) E(z)$$

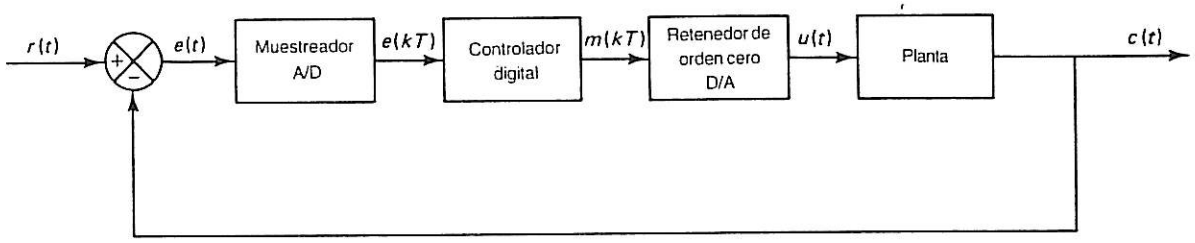
La función de transferencia pulso $G_D(z)$ del controlador digital puede entonces estar dada mediante

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{3–52}$$

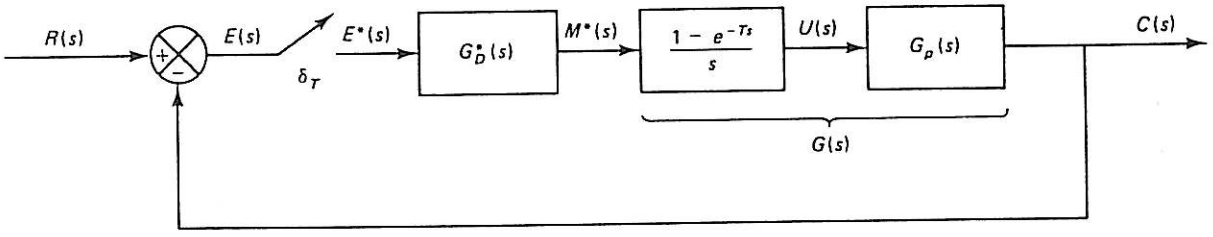
El uso de la función de transferencia pulso $G_D(z)$ en la forma de la ecuación (3-52) habilita al lector para analizar los sistemas de control digital en el plano z.

Función de transferencia pulso en lazo cerrado de un sistema de control digital. En la figura 3-28*a*) se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital. Aquí, el muestreador, el convertidor A/D, el controlador digital, el retenedor de orden cero y el convertidor D/A producen una señal de control $u(t)$ en tiempo continuo (constante por pedazos) para ser alimentada la planta. En la figura 3-28*b*) se muestran las funciones de transferencia de los bloques involucrados en el sistema.

La función de transferencia del controlador digital se muestra como $G_D^*(s)$. En el sistema real la



a)



b)

Figura 3-28 *a*) Diagrama de bloques de un sistema de control digital; *b*) diagrama de bloques equivalente que muestra las funciones de transferencia de los bloques.

computadora (controlador digital) resuelve una ecuación en diferencias cuya relación entrada-salida está dada mediante la función de transferencia pulso $G_D(z)$.

En el presente sistema la señal de salida $c(t)$ se alimenta de regreso para ser comparada con la señal de entrada $r(t)$. La señal de error $e(t) = r(t) - c(t)$ se muestrea, y la señal analógica se convierte en digital a través de un dispositivo A/D. La señal digital $e(kT)$ se alimenta al controlador digital, el cual opera sobre la secuencia muestreada $e(kT)$ de una manera adecuada para producir la señal $m(kT)$.

Esta relación conveniente entre las secuencias $m(kT)$ y $e(kT)$ se especifica mediante la función de transferencia pulso $G_D(z)$ del controlador digital. [Mediante la selección adecuada de los polos y ceros de $G_D(z)$, se puede generar un buen número de características entrada-salida.]

Refiriéndose a la figura 3-28*b*), se define

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) = G(s)$$

A partir de la figura 3-28*b*), nótese que

$$C(s) = G(s)G_D^*(s)E^*(s)$$

o

$$C^*(s) = G^*(s)G_D^*(s)E^*(s)$$

En términos de la notación de la transformada z,

$$C(z) = G(z)G_D(z)E(z)$$

Puesto que

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

se tiene

$$C(z) = G_D(z)G(z)[R(z) - C(z)]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} \tag{3–53}$$

La ecuación (3-53) da la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema de control digital que se muestra en la figura 3-28*b*). El desempeño de dicho sistema en lazo cerrado se puede mejorar mediante la apropiada elección de $G_D(z)$, la función de transferencia pulso del controlador digital. Posteriormente se estudiará una variedad de formas para $G_D(z)$ a ser utilizadas en la obtención del desempeño óptimo para varios índices de desempeño dados.

A continuación, se considerará sólo un caso sencillo, donde la función de transferencia pulso $G_D(z)$ es del tipo PID (proporcional más integral más derivativo).

Función de transferencia pulso de un controlador PID digital. El esquema de control PID analógico ha sido usado de manera exitosa en muchos sistemas de control industrial por más de medio siglo. El principio básico del esquema de control PID es que actúa sobre la variable a ser manipulada a través de una apropiada combinación de las tres acciones de control: acción de control proporcional (donde la acción de control es proporcional a la señal de error actuante, la cual es la diferencia entre la entrada y la señal de realimentación); la acción de control integral (donde la acción de control es

proporcional a la integral de la señal de error actuante) y la acción de control derivativa (donde la acción de control es proporcional a la derivada de la señal de error actuante).

En situaciones donde muchas plantas se controlan directamente mediante una sola computadora digital (como un esquema de control en el que se controlan desde unos cuantos lazos hasta cientos de éstos mediante un solo controlador digital), la mayoría de los lazos de control se pueden manipular mediante esquemas de control PID.

La acción de control PID en controladores analógicos está dada por

$$m(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{3–54}$$

donde $e(t)$ es la entrada al controlador (señal de error actuante), $m(t)$ es la salida del controlador (la señal manipulada), K es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral (o tiempo de reajuste) y T_d es el tiempo derivativo (o tiempo de adelanto).

Para obtener la función de transferencia pulso del controlador PID digital, se puede discretizar la ecuación (3-54). Al aproximar el término integral mediante la sumatoria trapezoidal y el término derivativo mediante la diferencia de dos puntos, se obtiene

$$m(kT) = K\left\{e(kT) + \frac{T}{T_i}\left[\frac{e(0) + e(T)}{2} + \frac{e(T) + e(2T)}{2} + \cdots + \frac{e((k-1)T) + e(kT)}{2}\right] + T_d\frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}\right\}$$

o

$$m(kT) = K\left\{e(kT) + \frac{T}{T_i}\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T}[e(kT) - e((k-1)T)]\right\} \tag{3–55}$$

Se define

$$\frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2} = f(hT), \qquad f(0) = 0$$

En la figura 3-29 se muestra la función $f(hT)$. Entonces

$$\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2} = \sum_{h=1}^{k} f(hT)$$

Al tomar la transformada z de esta última ecuación, se obtiene

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=1}^{k}\frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2}\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=1}^{k} f(hT)\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}}[F(z) - f(0)]$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}F(z)$$

(Para obtener esta última ecuación, refiérase al problema A-2-4.) Nótese que

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(hT)] = \frac{1 + z^{-1}}{2}E(z)$$

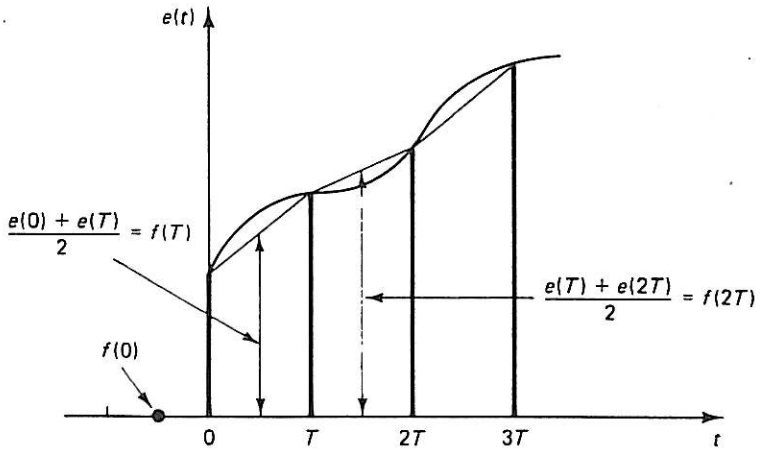


Figura 3-29 Diagrama que muestra la función $f(hT)$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=1}^{k} \frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2}\right] = \frac{1 + z^{-1}}{2(1 - z^{-1})} E(z)$$

Entonces la transformada z de la ecuación (3-55) da como resultado

$$M(z) = K\left[1 + \frac{T}{2T_i}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1})\right]E(z)$$

Esta última ecuación se puede rescribir como sigue:

$$M(z) = K\left[1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T}{T_i}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1})\right]E(z)$$

$$= \left[K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1})\right]E(z)$$

donde

$$K_P = K - \frac{KT}{2T_i} = K - \frac{K_I}{2} = \text{ganancia proporcional}$$

$$K_I = \frac{KT}{T_i} = \text{ganancia integral}$$

$$K_D = \frac{KT_d}{T} = \text{ganancia derivativa}$$

Nótese que la ganancia proporcional K_P para el controlador PID digital es más pequeña que la ganancia K para el controlador PID analógico por un factor de $K_I/2$.

La función de transferencia pulso para el controlador PID digital se convierte en

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1}) \qquad (3\text{–}56)$$

La función de transferencia pulso del controlador PID digital dada por la ecuación (3-56) se conoce comúnmente como *forma posicional* del esquema de control PID.

La otra forma por lo regular utilizada en el esquema de control PID digital es el esquema conocido como *forma de velocidad.* Para obtener la ecuación del control PID en la forma de velocidad, se considera la diferencia hacia atrás en $m(kT)$, esto es, la diferencia entre $m(kT)$ y $m((k-1)T)$. Con algunas suposiciones y manipulaciones, se obtiene

$$M(z) = -K_P C(z) + K_I \frac{R(z) - C(z)}{1 - z^{-1}} - K_D(1 - z^{-1})C(z) \tag{3-57}$$

[Para obtener la ecuación (3-57), véase el problema A-3-17.] La ecuación (3-57) da el esquema de control PID en la forma de velocidad. En la figura 3-30 se muestra un diagrama de bloques de la realización de un esquema de control PID digital en la forma de velocidad. Note que en la ecuación (3-57) sólo el término del control integral incluye la entrada $R(z)$. Por lo tanto, el término integral no se puede excluir del controlador digital si éste se utiliza en la forma de velocidad.

Una ventaja del esquema de control PID en la forma de velocidad es que no es necesaria la inicialización cuando se conmuta de operación manual a automática. De este modo, si existen cambios súbitos grandes en el punto de ajuste o en el inicio de la puesta en operación del proceso, el esquema de control PID en la forma de velocidad presenta mejores características de respuesta que aquél en la forma posicional. Otra ventaja del esquema de control PID en la forma de velocidad es que es útil en la supresión de correcciones excesivas en sistemas de control de procesos.

Las leyes de control lineales en la forma de acciones de control PID, tanto en la forma posicional como en la de velocidad, son básicas en controles digitales debido a que con frecuencia dan soluciones satisfactorias a muchos problemas prácticos de control, en particular a problemas en control de procesos. Observe que, en los controladores digitales, las leyes de control se pueden implantar mediante software, y por lo tanto las restricciones de hardware de los controladores PID se pueden ignorar por completo. (Para una comparación de las características de respuesta en frecuencia entre los controladores PID analógicos y digitales, véase el problema A-3-16.)

Ejemplo 3-7

Considere el sistema de control con el controlador PID digital que se muestra en la figura 3-31*a*). (El controlador PID está en la forma posicional.) Se supone que la función de transferencia de la planta es

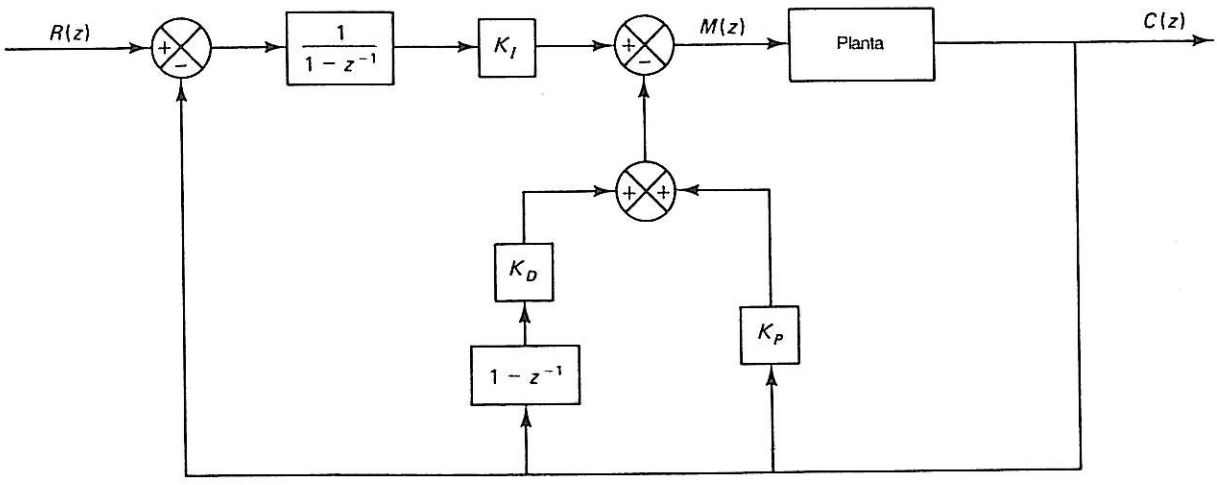
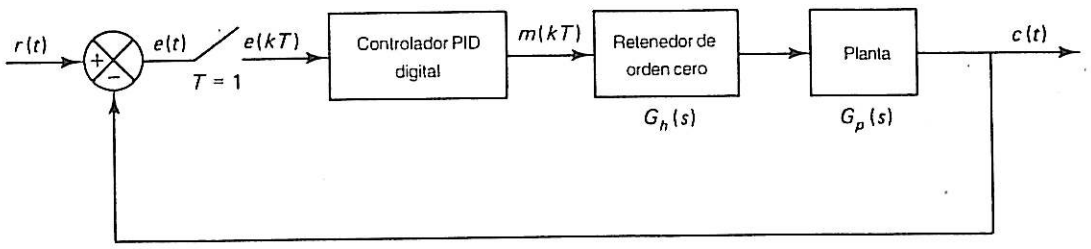
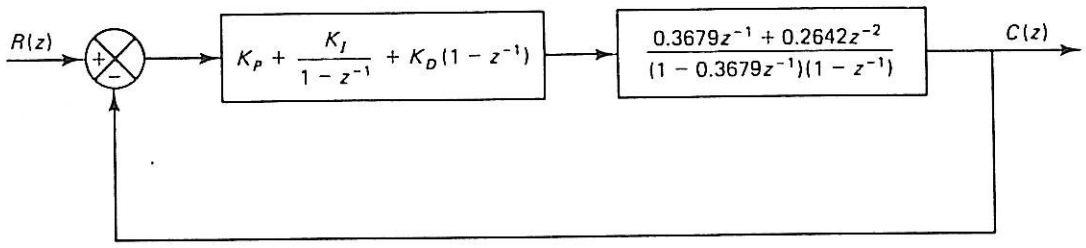


Figura 3-30 Diagrama de bloques de la realización del esquema de control PID en la forma de velocidad.



(a)



(b)

Figura 3-31 *a*) Diagrama de bloques de un sistema de control; *b*) diagrama de bloques equivalente.

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y el período de muestreo T se supone de 1 segundo. Entonces la función de transferencia del retenedor de orden cero se convierte en

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Puesto que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] = G(z) = \frac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{(1 - 0.3679z^{-1})(1 - z^{-1})} \tag{3–58}$$

se puede redibujar el diagrama de bloques de la figura 3-31*a*) como se muestra en la figura 3-31*b*).

Obténgase la respuesta escalón de este sistema cuando el controlador digital es un controlador PID con $K_P = 1$, $K_I = 0.2$, y $K_D = 0.2$. La función de transferencia pulso del controlador digital está dada por

$$G_D(z) = \frac{1.4 - 1.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Entonces la función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}$$
$$= \frac{0.5151z^{-1} - 0.1452z^{-2} - 0.2963z^{-3} + 0.0528z^{-4}}{1 - 1.8528z^{-1} + 1.5906z^{-2} - 0.6642z^{-3} + 0.0528z^{-4}}$$

Se utilizará el enfoque de MATLAB para obtener la respuesta escalón unitario.

Obtención de la respuesta transitoria con MATLAB. Suponga que se quiere la respuesta escalón unitario hasta $k = 40$. Entonces la entrada $r(t)$ se puede escribir como

```
r = ones(1,41)
```

El programa para MATLAB que permite obtener la respuesta escalón unitario para este sistema se muestra en el programa para MATLAB 3-1. La salida resultante $c(k)$ contra k se grafica en la figura 3-32.

Programa para MATLAB 3-1

```
% ——— Respuesta al escalón unitario ———

num = [0   0.5151   -0.1452   -0.2963   0.0528];
den = [1   -1.8528   1.5906   -0.6642   0.0528];
r = ones(1,41);
v= [0   40   0   2];
axis(v);
k = 0:40;
c = filter(num,den,r);
plot(k,c,'o',k,c'-')
grid
title('Respuesta al escalón unitario')
xlabel('k')
ylabel('c(k)')
```

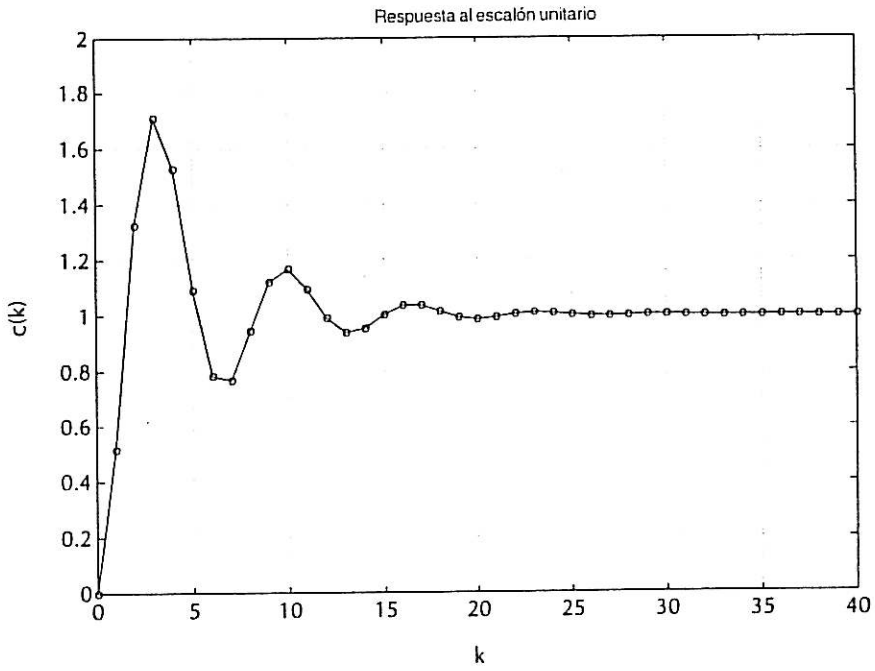


Figura 3-32 Respuesta escalón unitario.

La respuesta de este sistema para una entrada rampa unitaria se puede obtener mediante el programa para MATLAB 3-2. La gráfica resultante se muestra en la figura 3-33. Observe que este sistema no presenta error en estado estacionario en la respuesta a la rampa.

Programa para MATLAB 3-2

```
% ——— Respuesta a la rampa unitaria ———

num = [0   05151   -0.1452   -0.2963   0.0528];
den = [1   -1.85281.5906   -0.6642   0.0528];
axis(v);
k = 0:40;
r = [k];
c = filter(num,den,r);
plot(k,c,'o',k,c,'-',k,k,'-')
grid
title('Respuesta a la rampa unitaria')
xlebel('k')
ylebel('c(k)')
```

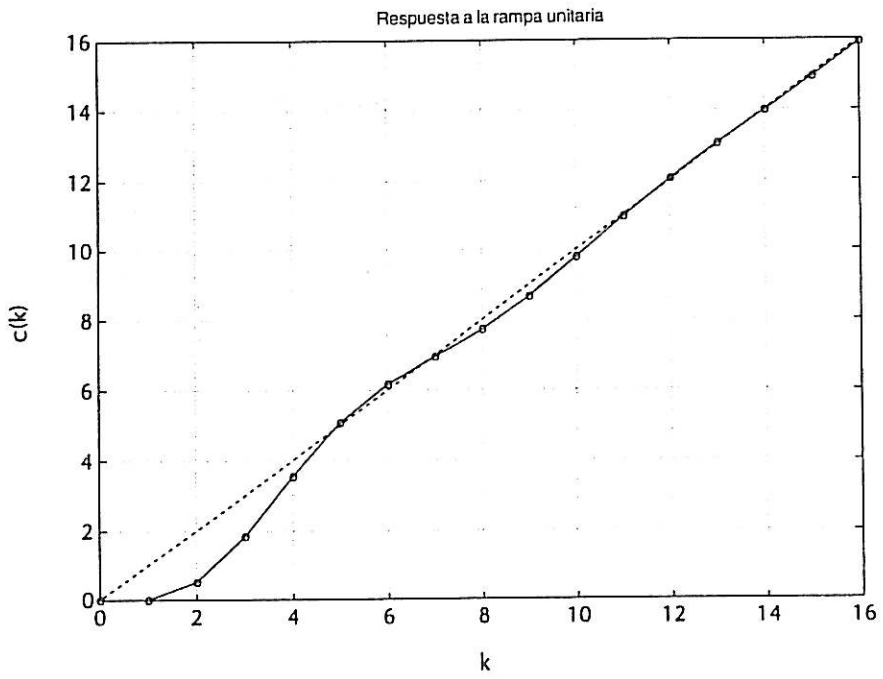


Figura 3-33 Respuesta a la rampa unitaria.

Comentarios. Los controladores PID para los sistemas de control de procesos como sistemas de control de temperatura, sistemas de control de presión y sistemas de control de nivel de líquidos se sintonizan normalmente en forma experimental. De hecho, en el control PID de cualquier planta industrial, donde su dinámica no es bien conocida o no está bien definida, las variables del controlador (K_P, K_I y K_D) se deben determinar de forma experimental. Dicha manera de determinar los parámetros o sintonizarlos se puede llevar a cabo mediante cambios de tipo escalón en la señal de referencia o de perturbación. Se dispone de unos cuantos procedimientos establecidos para dicho propósito. Básicamente, la sintonización (el determinar las constantes K_P, K_I y K_D) se logra mediante la variación sistemática de los valores hasta que se obtienen buenas características de respuesta.

Para los controladores PID digitales utilizados para sistemas de control de procesos, el período de muestreo se debe elegir de manera apropiada. Muchos sistemas de control de procesos tienen constantes de tiempo ligeramente grandes. Una receta de cocina en la elección del período de muestreo (período de muestreo $T = 2\pi/\omega_s$, donde ω_s es la frecuencia de muestreo) en sistemas de control de procesos, es que para sistemas de control de temperatura el período de muestreo debe ser de 10 a 30 segundos, para sistemas de control de presión de 1 a 5 segundos y para sistemas de control de nivel de líquidos de 1 a 10 segundos.

Obtención de la respuesta entre instantes de muestreo consecutivos. El análisis de la transformada z no dará información sobre la respuesta entre dos instantes de muestreo consecutivos. En casos ordinarios esto no es serio, debido a que si el teorema de muestreo se satisface, entonces la salida no variará mucho entre cualquiera de estos dos instantes de muestreo consecutivos. En ciertos casos, sin embargo, se puede necesitar la respuesta entre instantes de muestreo consecutivos.

Se dispone de tres métodos de uso común que permiten conocer la respuesta entre dos instantes de muestreo consecutivos:

1. El método de la transformada de Laplace
2. El método de la transformada z modificada
3. El método en el espacio de estados

Aquí se estudiará brevemente el método de la transformada de Laplace. El método de la transformada z modificada se presenta en el apéndice B. (Aquellos lectores interesados en la transformada z modificada deberán leer la sección B-4.) El método en el espacio de estados se estudiará en la sección 5-5.

El método de la transformada de Laplace. Considere, por ejemplo, el sistema que se muestra en la figura 3-27. La salida $C(s)$ se puede dar mediante

$$C(s) = G(s)E^*(s) = G(s)\frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

De este modo,

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}\right] \tag{3–59}$$

La ecuación (3-59) dará la respuesta en tiempo continuo $c(t)$. Por tanto, la respuesta en cualquier tiempo entre dos instantes de muestreo consecutivos se puede calcular con la ecuación (3-59). [Véase el problema A-3-18 para una muestra del cálculo del segundo miembro de la ecuación (3-59).]

3-6 REALIZACIÓN DE CONTROLADORES Y FILTROS DIGITALES

En esta sección se estudian los métodos de realización para funciones de transferencia pulso que representan controladores y filtros digitales. La realización de controladores y filtros digitales puede incluir ya sea software, hardware o ambos. En general, la "realización" de funciones de transferencia pulso significa determinar la configuración física para la combinación apropiada de operaciones aritméticas y de almacenamiento.

En una realización de software se obtienen programas de computadora para la computadora digital involucrada. En una realización de hardware se construye un procesador de propósito especial mediante circuitos tales como sumadores digitales, multiplicadores y elementos de retardo (registros de corrimiento con un período de muestreo T como un tiempo de retardo unitario).

En el campo del procesamiento digital de señales, un *filtro digital* es un algoritmo de cálculo que convierte una secuencia de números de entrada en una secuencia de salida, de modo que las características de la señal se cambien de una manera predeterminada. Esto es, un filtro digital procesa una señal digital pues permite el paso de algunas componentes de frecuencia deseadas de la señal digital de entrada y rechaza algunas otras no deseadas. En términos generales, un controlador digital es una forma de filtro digital.

Observe que hay diferencias importantes entre el procesamiento digital de señales utilizado en comunicaciones y el que se utiliza en control. En control digital el procesamiento de señales se debe hacer en tiempo real. En comunicaciones, el procesamiento de señales no se necesita hacer en tiempo real, y por lo tanto se puede tolerar retardos en el procesamiento para mejorar la exactitud.

Esta sección trata de las realizaciones en diagramas de bloques de filtros digitales que emplean elementos de retraso, sumadores y multiplicadores. Aquí se estudiarán algunas estructuras diferentes de realizaciones en diagramas de bloques. Dichas realizaciones en diagramas de bloques se pueden utilizar como base para un diseño de software o hardware. De hecho, una vez que se completa el diagrama de bloques de la realización, la realización física en hardware o software es directa. Observe que en el diagrama de bloques de una realización, la función de transferencia pulso de z^{-1} representa un retardo de una unidad de tiempo (véase la figura 3-34). (Observe también que en el plano s, z^{-1} corresponde a un retardo puro e^{-Ts}.)

A continuación se verán los filtros digitales que se emplean con propósitos de filtrado y control. La forma general de la función de transferencia pulso entre la salida $Y(z)$ y la entrada $X(z)$ está dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}, \qquad n \geq m \tag{3-60}$$

donde las a_i y las b_i son para muchos controladores digitales coeficientes reales (algunos de éstos pueden ser cero). La función de transferencia pulso es de esta forma. Por ejemplo, la función de transferencia pulso para el controlador PID dado por la ecuación (3-56) se puede expresar en la forma de la ecuación (3-60), como sigue:

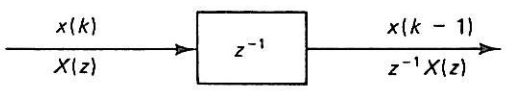


Figura 3-34 Función de transferencia pulso mostrando un retardo de una unidad de tiempo.

$$G_D(z) = \frac{(K_P + K_I + K_D) - (K_P + 2K_D)z^{-1} + K_D z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

donde

$$a_1 = -1$$
$$a_2 = 0$$
$$b_0 = K_P + K_I + K_D$$
$$b_1 = -(K_P + 2K_D)$$
$$b_2 = K_D$$

Ahora se estudiarán las formas de programación directa y estándar de los filtros digitales. En estas formas de programación, los coeficientes a_i y b_i (que son cantidades reales) aparecen como multiplicadores en el diagrama de bloques de la realización. Aquellos esquemas de diagramas de bloques donde los coeficientes a_i y b_i aparecen de manera directa como multiplicadores se denominan *estructuras directas*.

Programación directa. Considere el filtro digital dado por la ecuación (3-60). Nótese que la función de transferencia pulso tiene n polos y m ceros. En la figura 3-35 se muestra un diagrama de bloques de la realización del filtro. El hecho de que este diagrama de bloques representa la ecuación (3-60) se puede ver fácilmente, puesto que a partir del diagrama de bloques se tiene

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \cdots - a_n z^{-n} Y(z) + b_0 X(z)$$
$$+ b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_m z^{-m} X(z)$$

Al reordenar esta última ecuación se obtiene la ecuación (3-60).

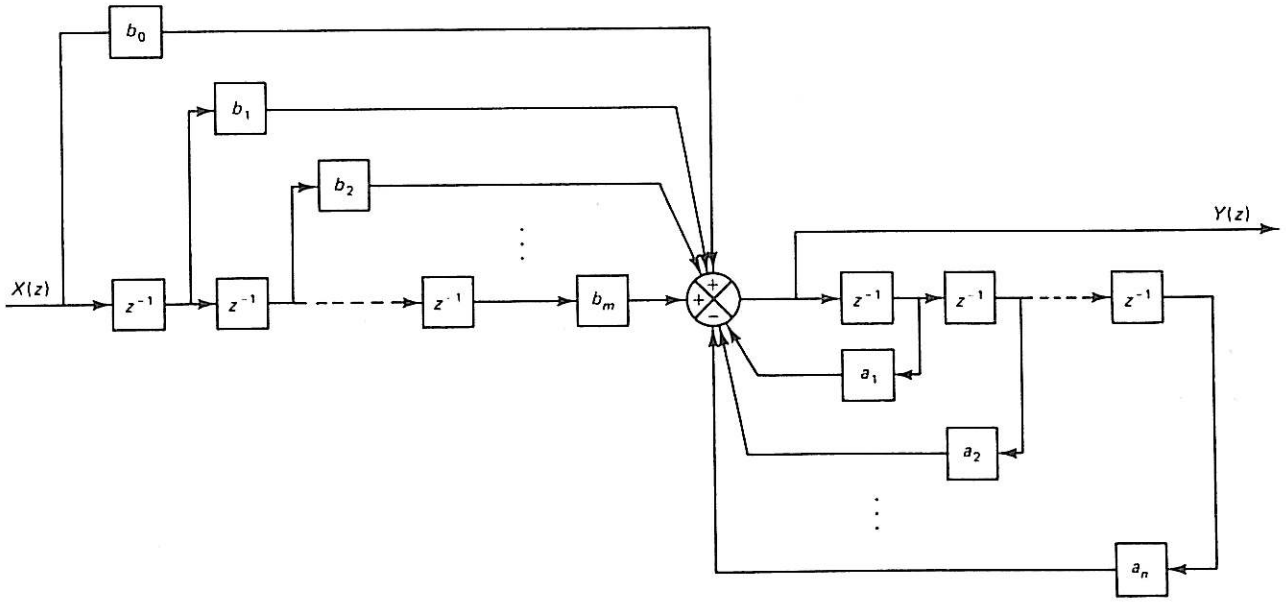


Figura 3-35 Diagrama de bloques de la realización de un filtro que muestra la programación directa.

Este tipo de realización se denomina *programación directa*. Programación directa significa que se obtiene la realización del numerador y el denominador de la función de transferencia pulso mediante conjuntos de elementos de retraso por separado. El numerador utiliza un conjunto de m elementos de retraso y el denominador utiliza un conjunto diferente de n elementos de retraso. De esta manera, el número total de elementos de retraso utilizados en la programación directa es $m + n$.

El número de elementos de retraso empleados en la programación directa se puede reducir. De hecho, el número de elementos de retraso se puede reducir de $n + m$ a n (donde $n \geq m$). El método de programación que utiliza el número mínimo posible de elementos de retraso se denomina *programación estándar*.

En la práctica, se trata de utilizar el número mínimo de elementos de retraso en la realización de una función de transferencia pulso dada. Por tanto, la programación directa que requiere un número de elementos de retraso mayor que el valor mínimo es más o menos de valor académico más que de valor práctico.

Programación estándar. Como se estableció previamente, el número de elementos de retraso requeridos en la programación directa se puede reducir. De hecho, el número de elementos de retraso utilizados en la realización de la función de transferencia pulso dada por la ecuación (3-60) se puede reducir de $n + m$ a n (donde $n \geq m$) mediante el reacomodo del diagrama de bloques, como se estudiará aquí.

Primero, se rescribe la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ dada por la ecuación (3-60) como sigue:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)}\frac{H(z)}{X(z)}$$

$$= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m})\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

donde

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m} \tag{3–61}$$

y

$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{3–62}$$

Entonces, se dibuja el diagrama de bloques para los sistemas dados por las ecuaciones (3-61) y (3-62), respectivamente. Para dibujar el diagrama de bloques, se puede rescribir la ecuación (3-61) como

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \cdots + b_m z^{-m} H(z) \tag{3–63}$$

y la ecuación (3-62) como

$$H(z) = X(z) - a_1 z^{-1} H(z) - a_2 z^{-2} H(z) - \cdots - a_n z^{-n} H(z) \tag{3–64}$$

Entonces, a partir de la ecuación (3-63), se obtiene la figura 3-36*a*). De modo similar, se obtiene la figura 3-36*b*) a partir de la ecuación (3-64). La combinación de estos dos diagramas de bloques da el diagrama de bloques para el filtro digital $G(z)$, como se muestra en la figura 3-36*c*). El diagrama de bloques de la realización como se presentó aquí está basado en la programación estándar. Note que sólo se utilizan n elementos de retraso. Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aparecen como elementos de realimentación, y los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_m$ aparecen como elementos de prealimentación.

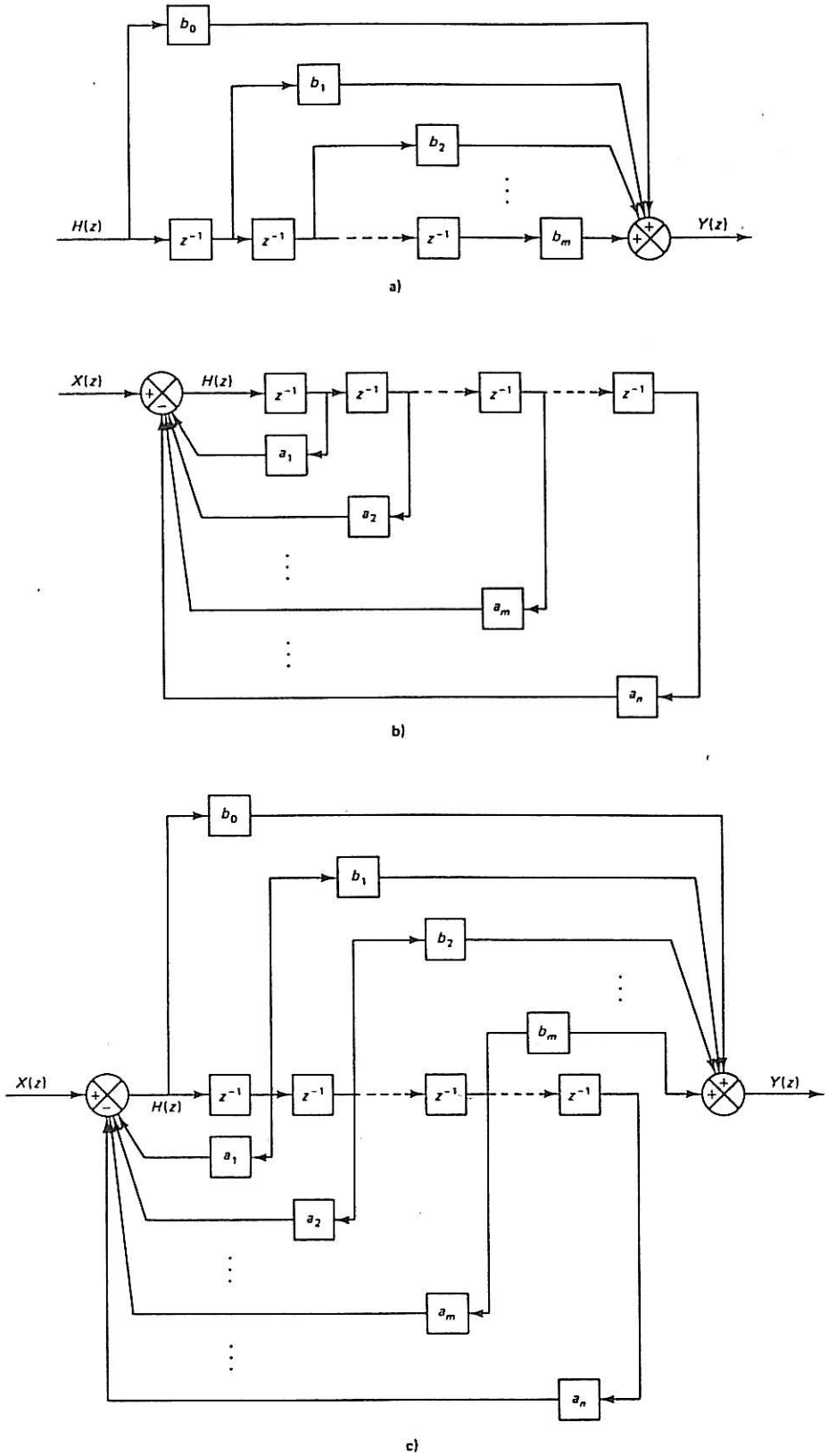


Figura 3-36 *a*) Diagrama de bloques de la realización de la ecuación (3-63); *b*) diagrama de bloques de la realización de la ecuación (3-64); *c*) diagrama de bloques de la realización del filtro digital dado por la ecuación (3-60) mediante programación estándar.

Los diagramas de bloques en las figuras 3-35 y 3-36*c*) son equivalentes, pero el último utiliza n elementos de retraso, mientras que el formal utiliza $n + m$ elementos de retraso. Obviamente, se prefiere el último diagrama, el cual utiliza un número más pequeño de elementos de retraso.

Comentarios. Observe primero que utilizar un número mínimo de elementos de retraso ahorra espacio en memoria en los controladores digitales. También utilizar un número mínimo de puntos suma es conveniente.

En la realización de controladores o filtros digitales, es importante tener un buen nivel de exactitud. En esencia, son tres las fuentes de error que afectan la exactitud:

1. El error debido a la cuantificación de la señal de entrada en un número finito de niveles discretos. (En el capítulo 1 se discutió este tipo de error, el cual se puede considerar como una fuente aditiva de ruido, denominado *ruido de cuantificación*. Éste se puede considerar como ruido blanco; la varianza del ruido es $\sigma^2 = Q^2/12$.)
2. El error debido a la acumulación de los errores de redondeo en las operaciones aritméticas en el sistema digital.
3. El error debido a la cuantificación de los coeficientes a_i y b_i de la función de transferencia pulso. Este error puede hacerse más grande a medida que el orden de la función de transferencia pulso se incrementa. Esto es, en filtros digitales de orden superior en la estructura directa, los errores pequeños en los coeficientes a_i y b_i causan grandes errores en las localizaciones de los polos y los ceros del filtro digital.

Estos tres errores surgen debido a las limitaciones prácticas del número de bits que representa a las muestras de la señal y a los coeficientes. Observe que el tercer tipo de error se puede reducir mediante la descomposición matemática de las funciones de transferencia pulso de orden superior en una combinación de funciones de transferencia pulso de orden pequeño. De esta forma, el sistema se puede hacer menos sensible a la inexactitud de los coeficientes.

Para la descomposición de funciones de transferencia pulso a fin de evitar el problema de sensibilidad de los coeficientes, se utilizan por lo regular los tres enfoques siguientes.

1. Programación en serie
2. Programación en paralelo
3. Programación en escalera

Ahora se estudiarán estas tres formas de programación.

Programación en serie. El primer enfoque empleado para evitar el problema de sensibilidad consiste en implantar la función de transferencia pulso $G(z)$ como una conexión en serie de funciones de transferencia pulso de primero y segundo orden. Si $G(z)$ se puede escribir como un producto de funciones de transferencia pulso $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_p(z)$, o

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)\cdots G_p(z)$$

entonces el filtro digital para $G(z)$ puede estar dado como una conexión en serie de las componentes de filtros digitales $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_p(z)$, como se muestra en la figura 3-37.

En la mayoría de los casos, las $G_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ se eligen como funciones de primero o segundo orden. Si los polos y ceros de $G(z)$ son conocidos, $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_p(z)$ se pueden obtener agrupando un par de polos complejos conjugados y un par de ceros conjugados para producir una

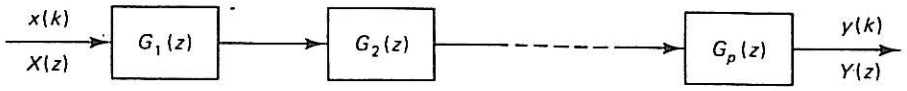


Figura 3-37 Filtro digital $G(z)$ descompuesto en una conexión en serie de $G_1(z)$, $G_2(z), \ldots, G_p(z)$.

función de segundo orden, o agrupando polos y ceros reales para producir funciones ya sea de primero o segundo orden. Por supuesto, es posible agrupar dos ceros reales con un par de polos complejos conjugados, o viceversa. La agrupación es, en un sentido, arbitraria. Es preferible hacer la agrupación de formas diferentes para ver cuál es la mejor con respecto al número de operaciones aritméticas requeridas, los rangos de los coeficientes, etcétera.

Para resumir, $G(z)$ se puede descomponer como sigue:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_1(z)G_2(z)\cdots G_p(z) \\ &= \prod_{i=1}^{j} \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^{p} \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \end{aligned}$$

Los diagramas de bloques para

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \tag{3-65}$$

y para

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \tag{3-66}$$

se muestran en las figuras 3-38*a*) y *b*), respectivamente. El diagrama de bloques para el filtro digital $G(z)$ es una conexión en serie de p componentes de filtros digitales como los que se muestran en las figuras 3-38*a*) y *b*).

Programación en paralelo. El segundo enfoque para evitar el problema de sensibilidad de los coeficientes es expandir la función de transferencia pulso $G(z)$ en fracciones parciales. Si $G(z)$ se expande como una suma de $A, G_1(z), G_2(z), \ldots, G_q(z)$, o de modo que

$$G(z) = A + G_1(z) + G_2(z) + \cdots + G_q(z)$$

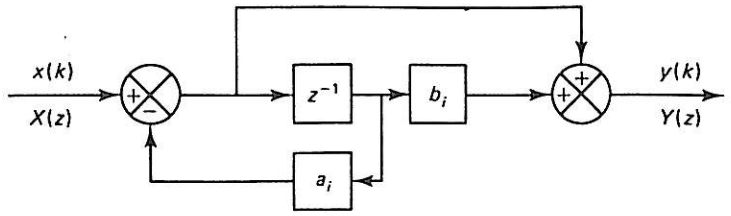
donde A es simplemente una constante, entonces el diagrama de bloques para el filtro digital $G(z)$ se puede obtener como una conexión en paralelo de $q + 1$ filtros digitales, como se muestra en la figura 3-39.

Debido a la presencia del término constante A, las funciones de primero y segundo orden se pueden elegir en formas sencillas. Esto es, $G(z)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} G(z) &= A + G_1(z) + G_2(z) + \cdots + G_q(z) \\ &= A + \sum_{i=1}^{j} G_i(z) + \sum_{i=j+1}^{q} G_i(z) \\ &= A + \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum_{i=j+1}^{q} \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \end{aligned}$$

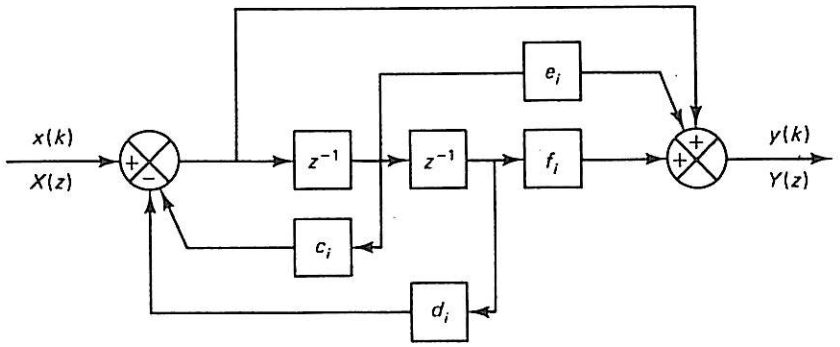
El diagrama de bloques para

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} \tag{3-67}$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}$$

a)



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$

b)

Figura 3-38 *a*) Representación mediante diagrama de bloques de la ecuación (3-65); *b*) representación mediante diagrama de bloques de la ecuación (3-66).

y el correspondiente para

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \tag{3-68}$$

se muestran en las figuras 3-40*a*) y *b*), respectivamente. La conexión en paralelo de $q + 1$ componentes de filtros digitales como se muestra en la figura 3-40 producirá el diagrama de bloques para el filtro digital $G(z)$.

Programación en escalera. El tercer enfoque para evitar el problema de sensibilidad de los coeficientes es implantar una estructura en escalera, esto es, expandir la función de transferencia

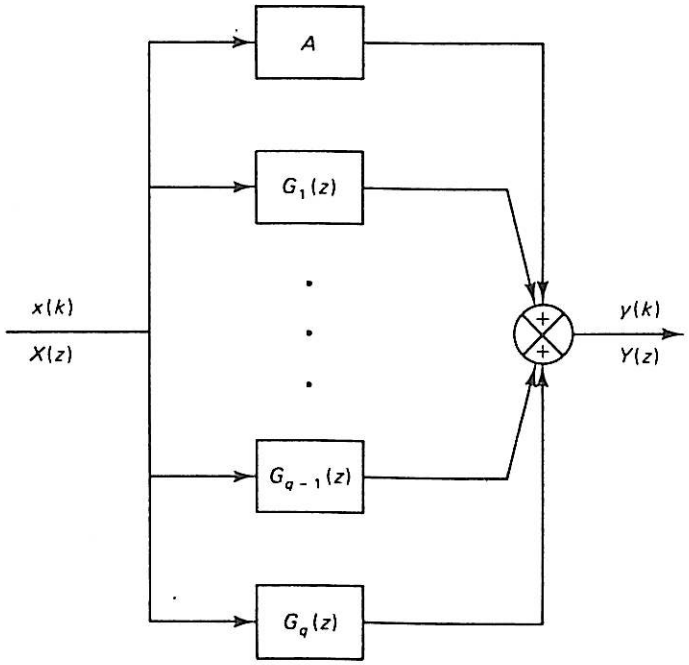


Figura 3-39 Filtro digital $G(z)$ descompuesto en una conexión en paralelo de A, $G_1(z)$, $G_2(z)$, . . . , $G_q(z)$.

pulso $G(z)$ en la siguiente fracción continuada y programar de acuerdo con esta ecuación:

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\vdots \quad \ddots \quad A_{n-1} + \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}} \tag{3-69}$$

El método de programación basado es este esquema se denomina *programación en escalera*. Defínase

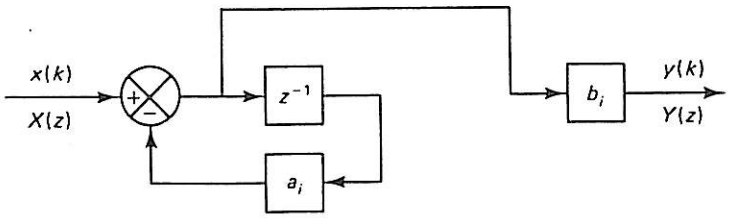
$$G_i^{(B)}(z) = \frac{1}{B_i z + G_i^{(A)}(z)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$G_i^{(A)}(z) = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$G_n^{(B)}(z) = \frac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}$$

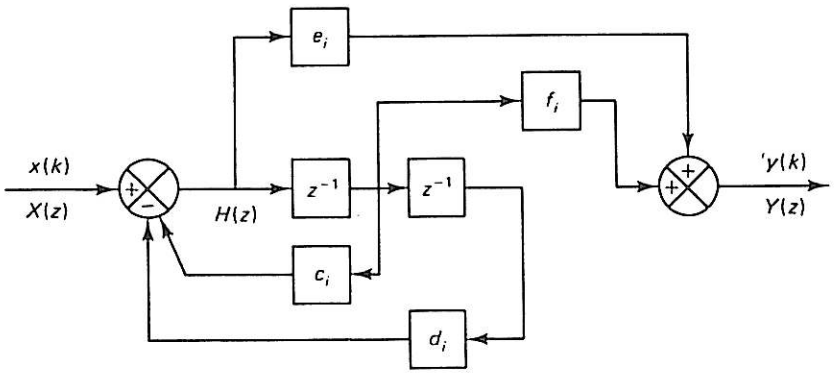
Entonces $G(z)$ se puede escribir como

$$G(z) = A_0 + G_1^{(B)}(z)$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}}$$

a)



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$

b)

Figura 3-40 *a*) Representación mediante diagrama de bloques de la ecuación (3-67); *b*) representación mediante diagrama de bloques de la ecuación (3-68).

Se explicará este método de programación mediante un ejemplo sencillo donde $n = 2$. Esto es,

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2}}}}$$

Mediante el uso de las funciones $G_1^{(A)}(z)$, $G_1^{(B)}(z)$ y $G_2^{(B)}(z)$, la función de transferencia $G(z)$ se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} G(z) &= A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + G_2^{(B)}(z)}} \\ &= A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + G_1^{(A)}(z)} \\ &= A_0 + G_1^{(B)}(z) \end{aligned}$$

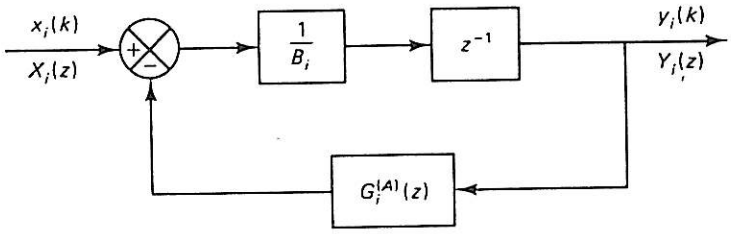
Observe que $G_i^{(B)}(z)$ se puede escribir como

$$G_i^{(B)}(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{B_i z + G_i^{(A)}(z)} \tag{3–70}$$

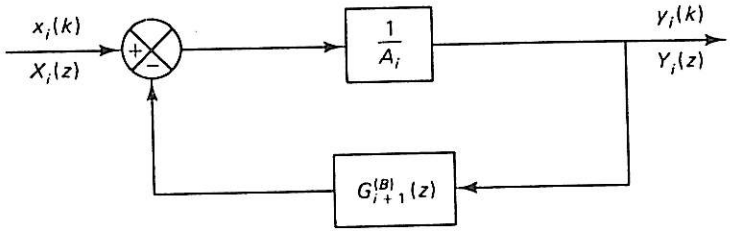
o

$$X_i(z) - G_i^{(A)}(z)Y_i(z) = B_i z Y_i(z)$$

El diagrama de bloques para la $G_i^{(B)}(z)$ dada por la ecuación (3-70) se muestra en la figura 3-41*a*). De manera similar, el diagrama de bloques para la $G_i^{(A)}(z)$, que puede estar dado por



a)



b)

Figura 3-41 *a*) Diagrama de bloques para $G_i^{(B)}(z)$ dado por la ecuación (3-70); *b*) diagrama de bloques para $G_i^{(A)}(z)$ dado por la ecuación (3-71).

$$G_i^{(A)}(z) = \frac{Y_i(z)}{X_i(z)} = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)} \tag{3-71}$$

o

$$X_i(z) - G_{i+1}^{(B)}(z)Y_i(z) = A_i Y_i(z)$$

se puede dibujar como se muestra en la figura 3-41*b*). Observe que

$$G_n^{(A)}(z) = \frac{1}{A_n}$$

Mediante la combinación de las dos componentes de los filtros digitales, como se muestra en la figura 3-42*a*), es posible dibujar el diagrama de bloques del filtro digital $G(z)$ como puede apreciarse en la figura 3-42*b*). [Observe que las figuras 3-42*a*) y *b*) corresponden al caso donde $n = 2$.]

Comentarios. Los filtros digitales basados en la programación en escalera tienen ventajas respecto a la sensibilidad y exactitud de los coeficientes. La realización de la estructura en escalera se logra mediante la expansión de la $G(z)$ en fracciones continuadas alrededor del origen.

Se observa que la expansión en fracciones continuadas dada por la ecuación (3-69) no es la única forma posible. Existen algunas maneras diferentes para construir la estructura de escalera. Por

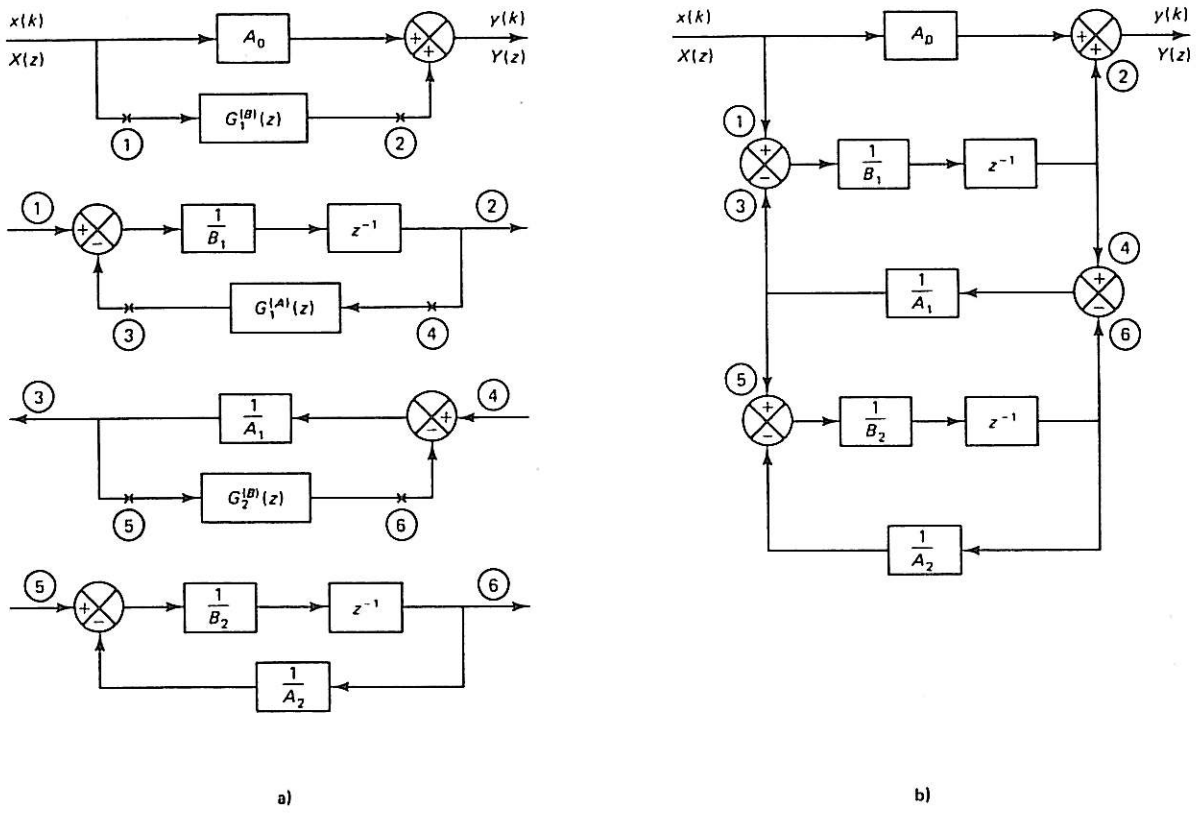


Figura 3-42 *a*) Diagramas de bloques componentes para la programación en escalera de $G(z)$ dada por la ecuación (3-69) cuando $n = 2$; *b*) combinación de los diagramas de bloques componentes que muestra la programación en escalera de $G(z)$.

ejemplo, un filtro digital $G(z)$ se puede estructurar como una expansión en la forma de fracciones continuadas alrededor del origen en términos de z^{-1}, como sigue:

$$G(z) = \hat{A}_0 + \cfrac{1}{\hat{B}_1 z^{-1} + \cfrac{1}{\hat{A}_1 + \cfrac{1}{\hat{B}_2 z^{-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\hat{A}_{n-1} + \cfrac{1}{\hat{B}_n z^{-1} + \cfrac{1}{\hat{A}_n}}}}}}}$$

También, en lugar de $G(z)$, su inversa $1/G(z)$ se puede expandir en la forma de fracciones continuadas en términos de z o de z^{-1} con la finalidad de llevar a cabo la programación en escalera.

Ejemplo 3-8

Obtenga los diagramas de bloques para la función de transferencia pulso del sistema (un filtro digital) mediante 1) programación directa, 2) programación estándar y 3) programación en escalera:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

1. *Programación directa.* Puesto que la función de transferencia pulso dada se puede escribir como

$$Y(z) = -0.5z^{-1}Y(z) + 2X(z) - 0.6z^{-1}X(z)$$

la programación directa da como resultado el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3-43. Note que se necesitan dos elementos de retraso.

2. *Programación estándar.* Primero se rescribirá la función de transferencia pulso como sigue:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)}\frac{H(z)}{X(z)} = (1 - 0.3z^{-1})\frac{2}{1 + 0.5z^{-1}}$$

donde

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = 1 - 0.3z^{-1}$$

y

$$\frac{H(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 + 0.5z^{-1}}$$

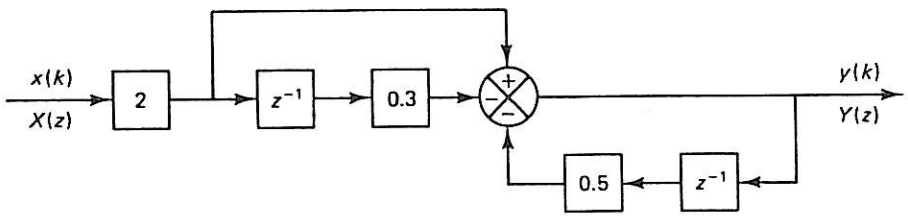


Figura 3-43 Diagrama de bloques de la realización de $Y(z)/X(z) = (2 - 0.6z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1})$ (programación directa).

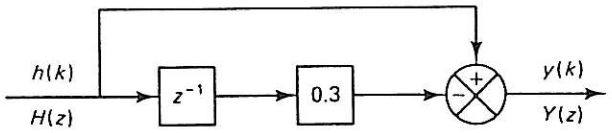
Los diagramas de bloques de las realizaciones de estas dos últimas ecuaciones se muestran en la figura 3-44*a*) y *b*), respectivamente. Si se combinan estos dos diagramas, se obtiene el diagrama de bloques para el filtro digital $Y(z)/X(z)$, como se muestra en la figura 3-44*c*). Nótese que el número de elementos de retraso requeridos se ha reducido a 1 mediante la programación estándar.

3. *Programación en escalera.* Primero se rescribirá $Y(z)/X(z)$ en la forma de escalera como sigue:

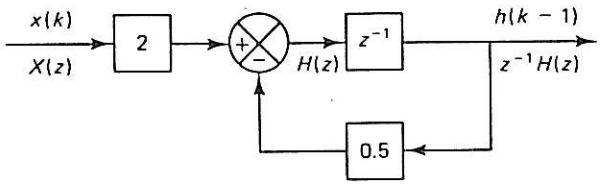
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{2z - 0.6}{z + 0.5} = 2 + \frac{-1.6}{z + 0.5} = 2 + \cfrac{1}{-0.625z + \cfrac{1}{-3.2}}$$

De este modo, $A_0 = 2$ y

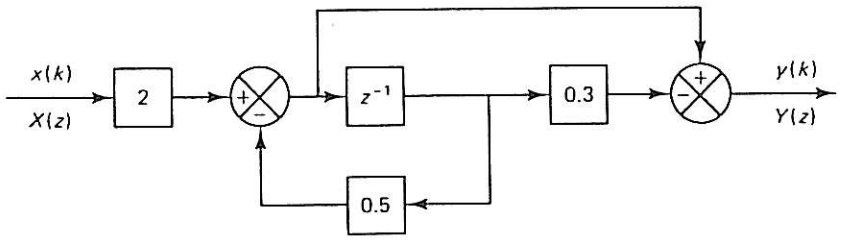
$$G_1^{(B)}(z) = \cfrac{1}{-0.625z + \cfrac{1}{-3.2}} = \cfrac{1}{-\frac{1}{1.6}z - 0.3125}$$



a)



b)



c)

Figura 3-44 *a*) Diagrama de bloques de la realización de $Y(z)/H(z) = 1 - 0.3z^{-1}$; *b*) diagrama de bloques de la realización de $H(z)/X(z) = 2/(1 + 0.5z^{-1})$; *c*) combinación de los diagramas de bloques de los incisos *a*) y *b*) (programación estándar).

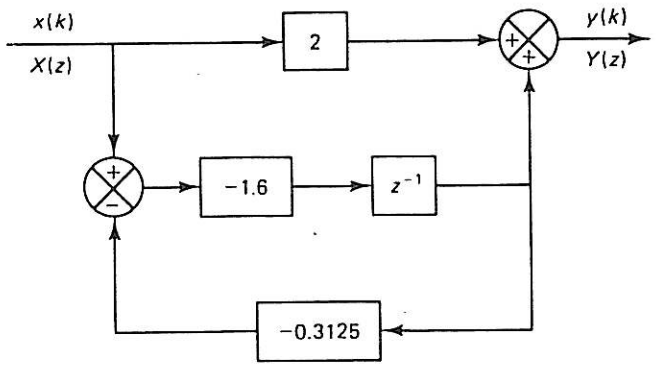


Figura 3-45 Diagrama de bloques de la realización de $Y(z)/X(z) = (2 - 0.6z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1})$ (programación en escalera).

Por tanto, se obtiene

$$Y(z) = 2X(z) + G_1^{(B)}(z)X(z)$$

Refiriéndose a la figura 3-41*a*) para el diagrama de bloques de $G_1^{(B)}(z)$, se obtiene el diagrama de bloques del filtro digital $Y(z)/X(z)$ como se muestra en la figura 3-45. Nótese que sólo se necesita un elemento de retraso.

Filtro de respuesta al impulso infinita y filtro de respuesta al impulso finita. Los filtros digitales se pueden clasificar de acuerdo con la duración de la respuesta al impulso. Considere un filtro digital definido mediante la siguiente función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{3–72}$$

donde $n \geq m$. En términos de la ecuación en diferencias,

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m)$$

La respuesta al impulso del filtro digital definido por la ecuación (3-72), donde se supone que no todas las a_i son cero, tiene un número infinito de muestras diferentes de cero, aunque sus magnitudes puedan hacerse despreciablemente pequeñas a medida que k se incrementa. Este tipo de filtro digital se denomina *filtro de respuesta al impulso infinita*. Dicho filtro digital también se denomina *filtro recursivo*, debido a que los valores anteriores de la salida junto con los valores presentes y pasados de la entrada se utilizan en el procesamiento de la señal para obtener el valor actual de la salida $y(k)$. Debido a la naturaleza recursiva, se pueden acumular los errores de las salidas anteriores. Un filtro recursivo se puede reconocer mediante la presencia de a_i y b_i en el diagrama de bloques de la realización.

Ahora, considere un filtro digital donde los coeficientes a_i son todos cero, o donde

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m} \tag{3–73}$$

En términos de la ecuación en diferencias

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m)$$

La respuesta al impulso del filtro digital definido mediante la ecuación (3-73) está limitado a un número finito de muestras definidas sobre un rango finito de intervalos de tiempo; esto es, la respuesta

impulso es una secuencia finita. Este tipo de filtro se denomina *filtro de respuesta al impulso finita.* También se denomina *filtro no recursivo,* o *filtro de promedio móvil.*

En una realización no recursiva, el valor presente de la salida depende sólo de los valores presente y pasados de la entrada. El filtro de respuesta al impulso finita se puede reconocer por la ausencia de las a_i en el diagrama de bloques de la realización.

Realización de un filtro de respuesta al impulso finita. Ahora se considerará la realización de un filtro de respuesta al impulso finita.

La secuencia de la respuesta al impulso finita (secuencia de ponderación) del filtro digital se define como $g(kT)$. Si la entrada $x(kT)$ se aplica a este filtro, entonces la salida $y(kT)$ puede estar dada mediante

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{h=0}^{k} g(hT)x(kT - hT) \\ &= g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \cdots + g(kT)x(0) \end{aligned} \tag{3–74}$$

La salida $y(kT)$ es una sumatoria de convolución de la señal de entrada y la secuencia de la respuesta al impulso. El segundo miembro de la ecuación (3-74) consta de $k+1$ términos. De este modo, la salida $y(kT)$ está dada en términos de las k entradas anteriores $x(0), x(T), \ldots, x((k-1)T)$ y la entrada actual $x(kT)$. Note que a medida que k se incrementa no es físicamente posible procesar todos los valores anteriores de la entrada para producir la salida actual. Se necesita limitar el número de valores anteriores de la entrada a procesar.

Suponga que se decide emplear los N inmediatos valores anteriores de la entrada $x((k-1)T), x((k-2)T), \ldots, x((k-N)T)$ y la entrada actual $x(kT)$. Esto es equivalente a aproximar el segundo miembro de la ecuación (3-74) mediante los $N+1$ valores anteriores de la entrada más reciente incluyendo el valor actual, o

$$y(kT) = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \cdots + g(NT)x((k-N)T) \tag{3–75}$$

Debido a que la ecuación (3-75) es una ecuación en diferencias, el correspondiente filtro digital en el plano z se puede obtener como sigue. Al tomar la transformada z de la ecuación (3-75) se tiene

$$Y(z) = g(0)X(z) + g(T)z^{-1}X(z) + \cdots + g(NT)z^{-N}X(z) \tag{3–76}$$

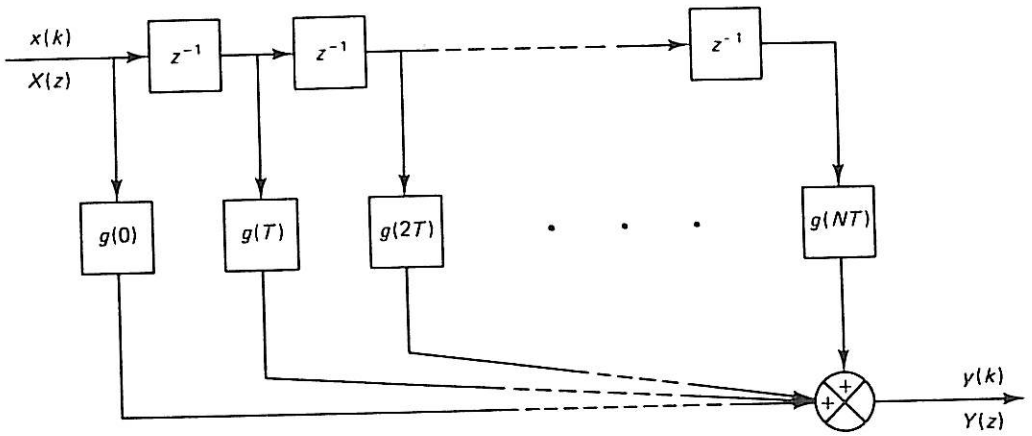


Figura 3-46 Diagrama de bloques de la realización de la ecuación (3-76).

En la figura 3-46 se muestra un diagrama de bloques de la realización de este filtro.

Las características del filtro de respuesta al impulso finita se pueden resumir como sigue:

1. El filtro de respuesta al impulso finita es no recursivo. De esta manera, debido a la falta de realimentación, la acumulación de errores de las salidas anteriores se puede evitar en el procesamiento de la señal.
2. La implantación del filtro de respuesta al impulso finita no requiere de realimentación, de modo que la programación directa y la programación estándar son idénticas. También, la implantación se puede lograr mediante convolución de alta velocidad mediante la transformada rápida de Fourier.
3. Los polos de la función de transferencia pulso del filtro de respuesta al impulso finita están en el origen, y por lo tanto éste es siempre estable.
4. Si la señal de entrada incluye componentes de alta frecuencia, entonces el número de elementos de retraso necesarios en el filtro de respuesta al impulso finita se incrementa y la cantidad de tiempo de retraso se alarga. (Esto es una desventaja del filtro de respuesta al impulso finita comparado con el filtro de respuesta al impulso infinita.)

Ejemplo 3-9

El filtro digital que se estudió en el ejemplo 3-8 es un filtro recursivo. Modifique este filtro y haga su realización como un filtro no recursivo. Luego obtenga la respuesta de este filtro no recursivo a una entrada delta de Kronecker.

Al dividir el numerador del filtro recursivo $G(z)$ entre el denominador, se obtiene

$$G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$
$$= 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \cdots$$

Al truncar de manera arbitraria esta serie en z^{-7}, se obtiene el filtro no recursivo adecuado, como sigue

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} \qquad (3\text{–}77)$$

En la figura 3-47 se muestra el diagrama de bloques para este filtro digital no recursivo. Note que se requiere de un número grande de elementos de retraso para obtener un buen nivel de exactitud.

Observe que el filtro digital es la transformada z de la secuencia de la respuesta al impulso, la transformada z inversa del filtro digital da la secuencia de la respuesta al impulso. Al tomar la transformada z inversa del filtro no recursivo dado por la ecuación (3-77), se obtiene

$$y(kT) = 2x(kT) - 1.6x((k-1)T) + 0.8x((k-2)T) - 0.4x((k-3)T)$$
$$+ 0.2x((k-4)T) - 0.1x((k-5)T) + 0.05x((k-6)T) - 0.025x((k-7)T)$$

Para la entrada delta de Kronecker, donde $x(0) = 1$ y $x(kT) = 0$ para $k \neq 0$, esta última ecuación da como resultado

$$y(0) = 2$$
$$y(T) = -1.6$$

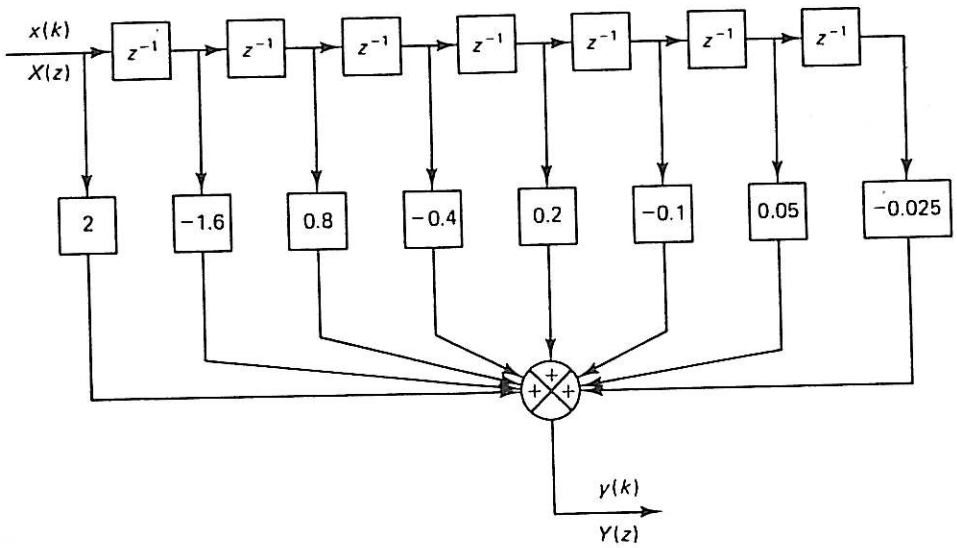


Figura 3-47 Diagrama de bloques para el filtro digital dado por la ecuación (3-77) (forma no recursiva).

$$y(2T) = 0.8$$
$$y(3T) = -0.4$$
$$y(4T) = 0.2$$
$$y(5T) = -0.1$$
$$y(6T) = 0.05$$
$$y(7T) = -0.025$$

La secuencia de la respuesta al impulso para este filtro digital se muestra en la figura 3-48.

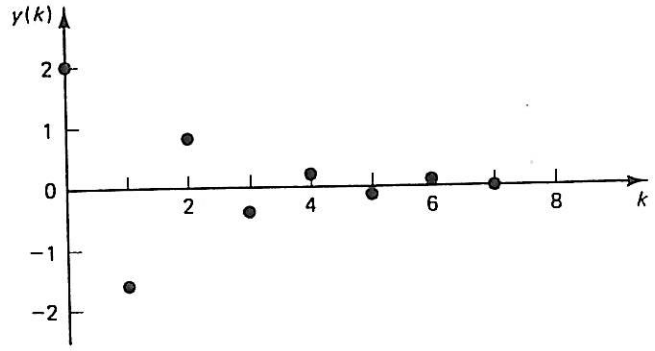


Figura 3-48 Secuencia de la respuesta al impulso para el filtro digital dado por la ecuación (3-77).

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-3-1

Considere un retenedor de orden cero precedido por un muestreador. La figura 3-49 muestra la entrada $x(t)$ al muestreador y la salida $y(t)$ del retenedor de orden cero. En el retenedor de orden cero el valor de la última muestra se retiene hasta que se toma la siguiente muestra.

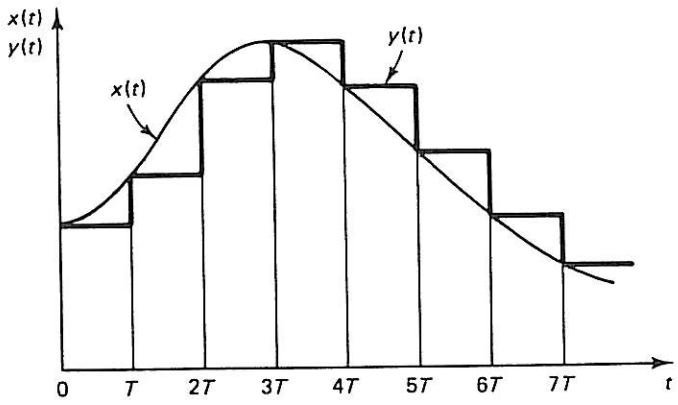


Figura 3-49 Curvas de entrada y salida para un retenedor de orden cero.

Obtenga la expresión para $y(t)$. Luego encuentre $Y(s)$ y obtenga la función de transferencia del retenedor de orden cero.

Solución A partir de la figura 3-49 se obtiene

$$y(t) = x(0)[1(t) - 1(t - T)] + x(T)[1(t - T) - 1(t - 2T)] + x(2T)[1(t - 2T) - 1(t - 3T)] + \cdots$$

La transformada de Laplace de $y(t)$ es

$$\begin{aligned} Y(s) &= x(0)\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}\right) + x(T)\left(\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s}\right) \\ &\quad + x(2T)\left(\frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s}\right) + \cdots \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s}[x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \cdots] \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s}X^*(s) \end{aligned}$$

donde

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)\right]$$

La función de transferencia del retenedor de orden cero es, de este modo,

$$G_{h0} = \frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Problema A-3-2

Considere un retenedor de primer orden precedido por un muestreador. La entrada al muestreador es $x(t)$ y la salida del retenedor de primer orden es $y(t)$. En el retenedor de primer orden la salida $y(t)$ para $kT \le t < (k+1)T$ es la línea recta que es la extrapolación de los dos valores muestreados precedentes, $x((k-1)T)$ y $x(kT)$, como se muestra en la figura 3-50. La ecuación para la salida $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{t - kT}{T}[x(kT) - x((k - 1)T)] + x(kT), \qquad kT \le t < (k + 1)T \tag{3–78}$$

Obtenga la función de transferencia del retenedor de primer orden, suponiendo una función sencilla tal como un impulso en $t = 0$ como la entrada $x(t)$.

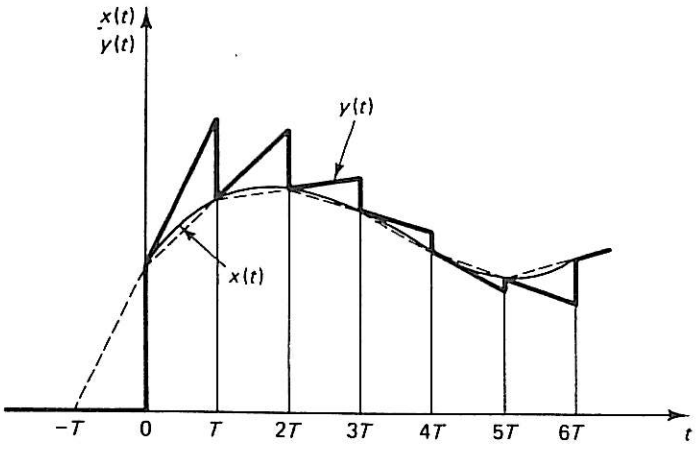


Figura 3-50 Curvas de entrada y salida para un retenedor de primer orden.

Solución Para una entrada impulso de magnitud $x(0)$ tal que $x^*(t) = x(0)\delta(t)$, la salida $y(t)$ dada por la ecuación (3-78) se convierte en la forma de onda que se muestra en la figura 3-51. La expresión numérica para $y(t)$ es

$$y(t) = x(0)\left(1 + \frac{t}{T}\right)1(t) - \left[2x(0) + 2x(0)\frac{t - T}{T}\right]1(t - T) + \left[x(0) + x(0)\frac{t - 2T}{T}\right]1(t - 2T)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= x(0)\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2}\right) - 2x(0)\left(\frac{e^{-Ts}}{s} + \frac{e^{-Ts}}{Ts^2}\right) + x(0)\left(\frac{e^{-2Ts}}{s} + \frac{e^{-2Ts}}{Ts^2}\right) \\ &= x(0)(1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts})\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2}\right) \\ &= x(0)\frac{Ts + 1}{Ts^2}(1 - e^{-Ts})^2 \end{aligned}$$

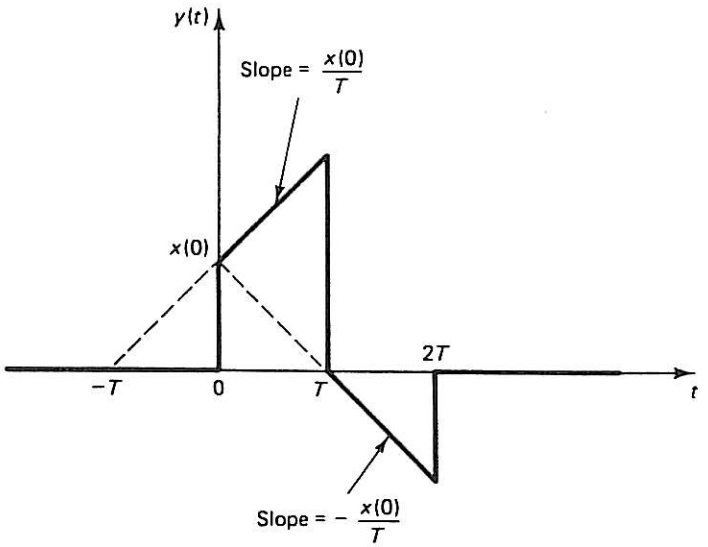


Figura 3-51 Curva de salida del retenedor de primer orden cuando la entrada es una función impulso.

Por tanto

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[x(0)\delta(t)] = x(0)$$

la función de transferencia del retenedor de primer orden se obtiene como sigue:

$$G_{h1}(s) = \frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{Ts + 1}{T}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2$$

Problema A-3-3

Considere la función

$$X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Muestre que $s = 0$ no es un polo de $X(s)$. Muestre también que

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2}$$

tiene un polo simple en $s = 0$.

Solución Si la función de transferencia incluye un término trascendente e^{-Ts}, entonces éste se puede reemplazar mediante una serie válida en la vecindad del polo en cuestión.

Para la función

$$X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{3–79}$$

se obtendrá la expansión en series de Laurent alrededor del polo en el origen. Puesto que, en la vecindad del origen, e^{-Ts} se puede reemplazar por

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} - \frac{(Ts)^3}{3!} + \cdots \tag{3–80}$$

al sustituir la ecuación (3-80) en la ecuación (3-79) obtenemos el resultado

$$X(s) = \frac{1}{s}\left[Ts - \frac{(Ts)^2}{2!} + \frac{(Ts)^3}{3!} - \cdots\right]$$

$$= T - \frac{T^2 s}{2!} + \frac{T^3 s^2}{3!} - \cdots$$

que es la expansión en series de Laurent de $X(s)$. A partir de esta última ecuación se ve que $s = 0$ no es un polo de $X(s)$.

Ahora, considere $Y(s)$. Puesto que

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2}$$

ésta se puede expandir en series de Laurent como

$$Y(s) = \frac{T}{s} - \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3 s}{3!} - \cdots$$

Se ve que el polo en el origen ($s = 0$) es de orden 1, o es un polo simple.

Problema A-3-4

Muestre que la transformada de Laplace del producto de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, de las cuales se garantiza que la transformada de Laplace existe, puede estar dada por

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp \tag{3-81}$$

Solución La transformada de Laplace del producto de $f(t)$ y $g(t)$ está dada mediante

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-st}\,dt \tag{3-82}$$

Observe que la integral de inversión es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \qquad t > 0$$

donde c es la abscisa de convergencia para $F(s)$. De este modo,

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp\,g(t)e^{-st}\,dt$$

Debido a la convergencia uniforme de las integrales consideradas, se puede invertir el orden de integración:

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,dp\int_0^\infty g(t)e^{-(s-p)t}\,dt$$

Si observamos que

$$\int_0^\infty g(t)e^{-(s-p)t}\,dt = G(s-p)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp \tag{3-83}$$

Problema A-3-5

Muestre que la transformada de Laplace de

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) \tag{3-84}$$

puede estar dada por

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp \end{aligned} \tag{3-85}$$

Solución Refiriéndose a la ecuación (3-83), rescrita como

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$$

donde

$$f(t) = x(t) \qquad \text{y} \qquad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$$

y observando que

$$\mathcal{L}[\delta(t-kT)] = e^{-kTs}$$

se tiene

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right] = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

Puesto que

$$G(s) = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

se tiene

$$G(s-p) = \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$$

Observe que los polos de $1/[1-e^{-T(s-p)}]$ se pueden obtener al resolver la ecuación

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0$$

o

$$-T(s-p) = \pm j2\pi k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

de modo que los polos son

$$p = s \pm j\frac{2\pi}{T}k = s \pm j\omega_s k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\omega_s = 2\pi/T$. De esta manera, existe una infinidad de polos simples a lo largo de una línea paralela al eje $j\omega$.

La transformada de Laplace de $x^*(t)$ ahora se puede escribir como

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}\left[x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp \end{aligned} \tag{3-86}$$

donde la integración es a lo largo de una línea desde $c-j\infty$ hasta $c+j\infty$ paralela al eje imaginario en el plano p, separa los polos de $X(p)$ de los polos de $1/[1-e^{-T(s-p)}]$. La ecuación (3-86) es la integral de convolución. Es un hecho bien conocido que dicha integral se puede evaluar en términos de los residuos mediante un contorno cerrado que consista de una línea desde $c-j\infty$ hasta $c+j\infty$ y un semicírculo de radio infinito en el semiplano izquierdo o derecho, dado que la integral a lo largo del círculo que se añadió es una constante (ya sea cero o distinta de cero). Existen dos formas de evaluar esta integral (una utilizando un semicírculo infinito en el semiplano izquierdo y otra con un semicírculo infinito en el semiplano derecho); se considerarán estos dos casos por separado en los problemas A-3-6 y A-3-7.

Problema A-3-6

Refiriéndose a la ecuación (3-86), rescrita como

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

muestre que, al realizar la integración en el semiplano izquierdo, $X^*(s)$ puede estar dada por

$$X^*(s) = \Sigma\left[\text{residuo de } \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}} \text{ en el polo de } X(p)\right] \tag{3-87}$$

Al sustituir z por e^{Ts} en la ecuación (3-87), se tiene

$$X(z) = \Sigma \left[\text{residuo de } \frac{X(p)z}{z - e^{Tp}} \text{ en el polo de } X(p) \right]$$

Al cambiar la notación de la variable compleja de p a s, se obtiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \Sigma \left[\text{residuo de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ en el polo de } X(s) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{n_i - 1}}{ds^{n_i - 1}} \left[(s - s_i)^{n_i} \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=h+1}^{m} \lim_{s \to s_j} \left[(s - s_j) \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] \end{aligned}$$

donde se supone que $X(z)$ tiene h diferentes polos múltiples y $m - h$ polos simples ($m \geq h$). Se supone que los polos de $X(s)$ están en el semiplano izquierdo y que $X(s)$ se puede expresar como el cociente de polinomios en s, o

$$X(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde $q(s)$ y $p(s)$ son polinomios en s. También se supone que $p(s)$ es de mayor grado en s que $q(s)$, lo cual significa que

$$\lim_{s \to \infty} X(s) = 0$$

Solución Se evaluará la integral de convolución dada por la ecuación (3-86) mediante un contorno cerrado en el semiplano izquierdo del plano p, como se muestra en la figura 3-52. Utilizando este contorno cerrado, la ecuación (3-86) se puede escribir como

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_L} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \end{aligned} \tag{3-88}$$

donde el contorno cerrado consiste en una línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ y Γ_L, que, a su vez, consiste en un semicírculo de radio infinito y las líneas horizontales en $j\infty$ y $-j\infty$, mismas que conectan la línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ con el semicírculo en el semiplano izquierdo del plano p. Se elige un valor de c tal que todos los polos de $X(p)$ estén a la izquierda de la línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ y todos los polos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$ estén a la derecha de esta línea. El contorno cerrado encierra a todos los polos de $X(p)$, mientras que los polos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$ están fuera del contorno cerrado.

Debido a que se ha supuesto que el denominador de $X(s)$ es de orden mayor en s que el numerador, la integral a lo largo de Γ_L (el semicírculo infinito en el semiplano izquierdo más las líneas horizontales en $j\infty$ y $-j\infty$, las cuales conectan a la línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ con el semicírculo) se desvanece. Por tanto,

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

Esta integral es igual a la suma de los residuos de $X(p)$ en el contorno cerrado. (Refiérase al apéndice B para el teorema del residuo.) Por tanto,

$$X^*(s) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} \text{ en el polo de } X(p) \right] \tag{3-89}$$

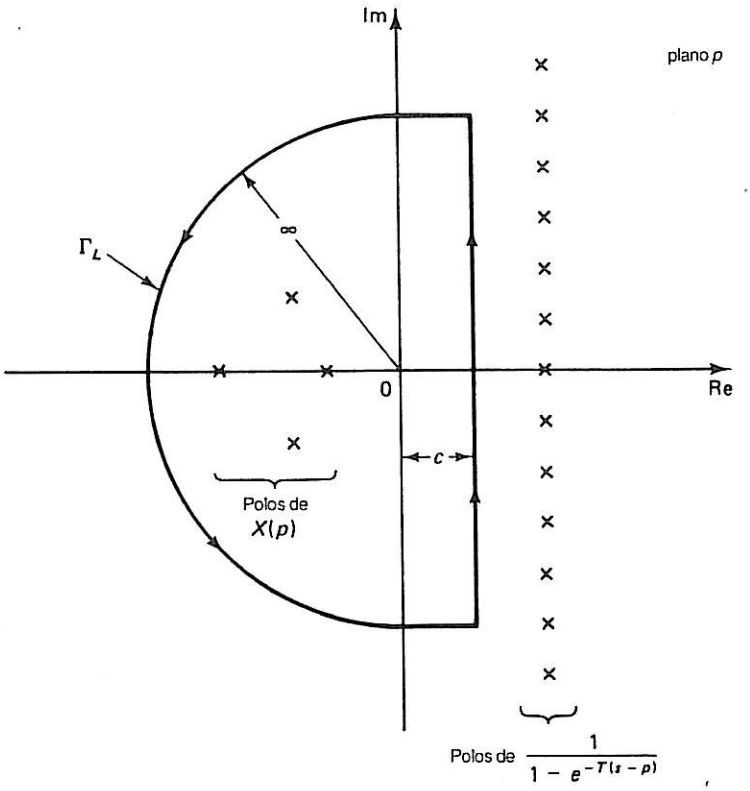


Figura 3-52 Contorno cerrado en el semiplano izquierdo del plano p.

Al sustituir e^{Ts} por z en la ecuación (3-89), se tiene

$$X(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{X(p)z}{z - e^{Tp}} \text{ en el polo de } X(p) \right]$$

Al cambiar la notación de la variable compleja de p a s, se obtiene

$$X(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ en el polo de } X(s) \right] \tag{3-90}$$

Suponga que $X(s)$ tiene polos $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Si un polo en $s = s_j$ es un polo simple, entonces el residuo K_j correspondiente es

$$K_j = \lim_{s \to s_j} \left[(s - s_j) \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] \tag{3-91}$$

Si un polo en $s = s_i$ es un polo múltiple de orden n_i, entonces el residuo K_i es

$$K_i = \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{n_i - 1}}{ds^{n_i - 1}} \left[(s - s_i)^{n_i} \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] \tag{3-92}$$

Por tanto, si $X(s)$ tiene un polo múltiple s_1 de orden n_1, un polo múltiple s_2 de orden n_2, . . . , un polo múltiple s_h de orden n_h y polos simples $s_{h+1}, s_{h+2}, \ldots, s_m$, entonces $X(z)$ dada por la ecuación (3-90) se puede escribir como

$$X(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ en el polo de } X(s) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{n_i - 1}}{ds^{n_i - 1}} \left[(s - s_i)^{n_i} \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] + \sum_{j=h+1}^{m} \lim_{s \to s_j} \left[(s - s_j) \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \right] \tag{3-93}$$

donde n_i es el orden del polo múltiple en $s = s_i$.

Problema A-3-7

Refiriéndose a la ecuación (3-86), rescrita como

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

muestre que al realizar esta integración en el semiplano derecho del plano p, $X^*(s)$ puede estar dada por

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) \tag{3-94}$$

siempre y cuando el denominador de $X(s)$ sea de grado dos o mayor en s que el grado del numerador. Muestre que si el denominador de $X(s)$ es sólo un grado mayor en s que el grado del numerador entonces

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2} x(0+) \tag{3-95}$$

Solución Evalúese la integral de convolución dada por la ecuación (3-86) en el semiplano derecho del plano p. Elíjase el contorno cerrado que se muestra en la figura 3-53, el cual consiste en una línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$ y Γ_R, la porción de un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho del plano p que está a la derecha de esta línea. El contorno cerrado encierra a todos los polos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$, pero no encierra a ninguno de los polos de $X(p)$. Ahora $X^*(s)$ se puede escribir como

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \tag{3-96}$$

Se investigará la integral a lo largo de Γ_R, la porción del semicírculo infinito a la derecha de la línea desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$. Puesto que una infinidad de polos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$ están sobre una línea paralela al eje $j\omega$, la evaluación de la integral a lo largo de Γ_R no es tan sencilla como en el caso anterior, donde el contorno cerrado encierra un número finito de polos de $X(p)$ en el semiplano izquierdo del plano p.

En la mayoría de los sistemas de control reales, a medida que s tiende a ser más grande, $X(s)$ tiende a cero por lo menos tan rápido como $1/s$. Por tanto, a continuación se consideran dos casos, uno donde el denominador de $X(s)$ es de dos grados o más en s que el grado del numerador y otro donde el denominador de $X(s)$ es de un grado mayor en s que el grado del numerador.

Caso 1: $X(s)$ Posee por lo menos dos polos más que ceros. Con referencia a la teoría de la variable compleja, se puede mostrar que la integral a lo largo de Γ_R es cero si el grado del denominador $p(s)$ de $X(s)$ es mayor por lo menos en 2 que el grado del numerador $q(s)$; esto es, si $X(s)$ posee por lo menos dos polos más que ceros, lo cual implica que

$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = x(0+) = 0$$

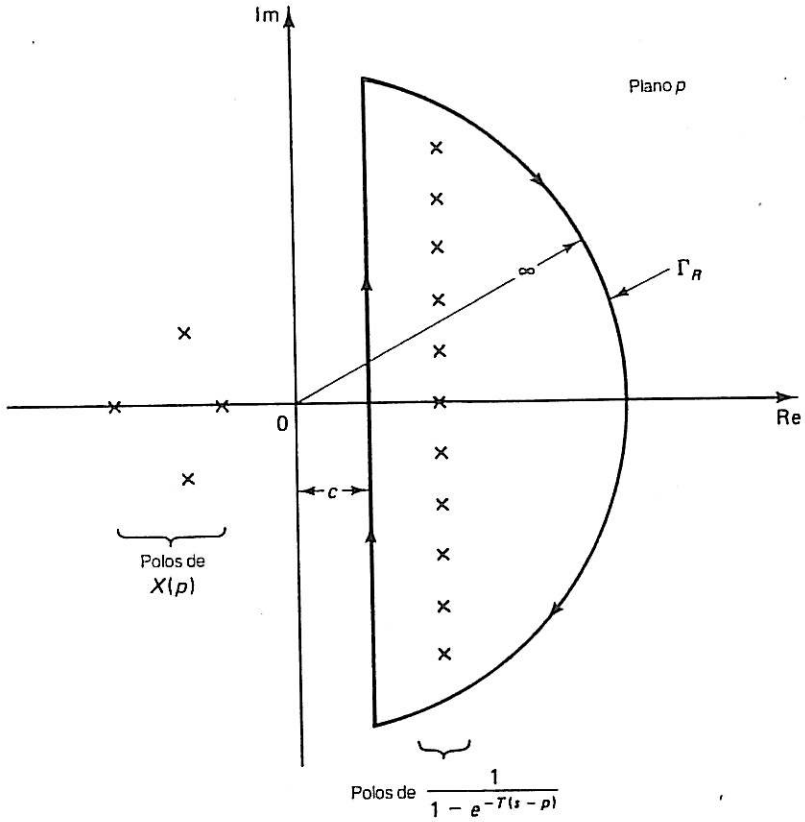


Figura 3-53 Contorno cerrado en el semiplano derecho del plano p.

entonces la integral a lo largo de Γ_R es cero. De este modo, en este caso

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp = 0$$

Por tanto, la ecuación (3-96) se simplifica a

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\,dp \tag{3-97}$$

La integral a lo largo del contorno cerrado dada por la ecuación (3-97) se puede obtener mediante la evaluación de los residuos en el número infinito de polos en $p = s \pm j\omega_s k$. De este modo,

$$X^*(s) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\lim_{p \to s + j\omega_s k}\left\{[p - (s + j\omega_s k)]\frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}\right\}\right]$$

El signo menos al principio del segundo miembro de esta última ecuación viene del hecho de que en la integración a lo largo de un contorno, la trayectoria Γ_R se toma en la dirección de las manecillas del reloj. Al emplear la regla de L'Hôpital, se obtiene

$$X^*(s) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left.\frac{X(p)}{\frac{d}{dp}[1 - e^{-T(s-p)}]}\right|_{p = s + j\omega_s k}$$

Nótese que

$$\frac{d}{dp}[1 - e^{-T(s-p)}]_{p=s+j\omega_s k} = -Te^{-T(s-p)}\Big|_{p=s+j\omega_s k} = -Te^{jT\omega_s k} = -Te^{j2\pi k} = -T$$

se tiene

$$X^*(s) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(p)}{-T}\Big|_{p=s+j\omega_s k}$$

o

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) \tag{3-98}$$

De este modo,

$$X(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k)\Big|_{s=(1/T)\ln z} \tag{3-99}$$

Observe que esta expresión de la transformada z es útil para probar el teorema de muestreo (véase la sección 3-4). Sin embargo, es muy tedioso obtener las expresiones de la transformada z de funciones comúnmente encontradas mediante este método.

Caso 2: $X(s)$ tiene un denominador de un grado mayor en s que el grado del numerador. Para este caso, $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0+) \neq 0 < \infty$ y la integral a lo largo Γ_R no es cero. [El valor distinto de cero está asociado con el valor inicial $x(0+)$ de $x(t)$.] Se puede mostrar que la contribución de la integral a lo largo de Γ_R en la ecuación (3-96) es $-\frac{1}{2}x(0+)$. Esto es,

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \frac{x(p)}{1 - e^{-T(s-p)}}dp = -\frac{1}{2}x(0+)$$

Entonces el término integral en el segundo miembro de la ecuación (3-96) se convierte en

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0+) \tag{3-100}$$

Problema A-3-8

Considere la función

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Obtenga $X(z)$ mediante la integral de convolución en el semiplano derecho.

Solución La transformada de Laplace de $x(t)$ es

$$X(s) = \frac{1}{s + a}$$

Es claro que $\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0+) = 1$, o que la función tiene un salto discontinuo en $t = 0$. Por tanto se debe utilizar la ecuación (3-95). Con referencia a esta ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0+) \\ &= \frac{1}{T}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} [X(s + j\omega_s k) + X(s - j\omega_s k)] + X(s)\right\} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s + j\omega_s k + a} + \frac{1}{s - j\omega_s k + a}\right) + \frac{1}{s + a}\right] + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(s + a)}{(s + a)^2 + (\omega_s k)^2} + \frac{1}{s + a}\right] + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(s + a)/\omega_s}{\left(\frac{s + a}{\omega_s}\right)^2 + k^2} + \frac{\omega_s}{s + a}\right] + \frac{1}{2} \qquad (3\text{–}101)$$

Con referencia a una fórmula disponible en las tablas matemáticas,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 + k^2} + \frac{1}{x} = \pi\frac{1 + e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}$$

y observando que

$$2\pi\frac{s + a}{\omega_s} = T(s + a)$$

se puede rescribir la ecuación (3-101) en la forma

$$X^*(s) = \frac{\pi}{2\pi}\frac{1 + e^{-T(s+a)}}{1 - e^{-T(s-a)}} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1 + e^{-T(s+a)} + 1 - e^{-T(s+a)}}{1 - e^{-T(s+a)}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2}{1 - e^{-T(s+a)}}$$
$$= \frac{1}{1 - e^{-aT}e^{-Ts}}$$

o

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

De este modo, se ha obtenido $X(z)$ mediante la integral de convolución en el semiplano derecho. [Este proceso para obtener la transformada z es muy tedioso debido a que está involucrada una serie infinita de $X(s + j\omega_s k)$. Este ejemplo se presenta sólo con propósitos de demostración. Se deben utilizar otros métodos para obtener la transformada z.]

Problema A-3-9

Obtenga la transformada z de

$$X(s) = \frac{s}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

empleando 1) el método de la expansión en fracciones parciales y 2) el método de los residuos.

Solución

1. *Método de la expansión en fracciones parciales.* Puesto que $X(s)$ se puede expandir en la forma

$$X(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+2}$$

se tiene

$$\begin{aligned} X(z) &= 2\left(\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) - \frac{Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - 2\left(\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{2-2e^{-T}z^{-1}-Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}} \end{aligned}$$

2. *Método de los residuos.* Refiriéndose a la ecuación (3-93) y observando que $X(s)$ tiene un polo doble en $s = -1$ y un polo simple en $s = -2$, se tiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{s}{(s+1)^2(s+2)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\right] \\ &\quad + \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{s}{(s+1)^2(s+2)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\right] \\ &= \frac{2z^2-2ze^{-T}-Tze^{-T}}{(z-e^{-T})^2} - \frac{2z}{z-e^{-2T}} \\ &= \frac{2-2e^{-T}z^{-1}-Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2} - \frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}} \end{aligned}$$

Problema A-3-10

Considere una señal en tiempo continuo $x(t)$ con un espectro en frecuencia limitado entre $-\omega_1$ y ω_1. Esto es,

$$X(j\omega) = 0, \qquad \text{para } \omega < -\omega_1 \text{ y } \omega_1 < \omega$$

Pruebe que si esta señal se muestrea con una frecuencia $\omega_s > 2\omega_1$ entonces la transformada de Fourier de $x(t)$ se determina en forma única por $x(kT)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, y la señal en tiempo continuo original $x(t)$ puede estar dada por la suma de una serie infinita de muestras de valores ponderados $x(kT)$ como sigue:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\frac{\text{sen}\,[\omega_s(t-kT)/2]}{\omega_s(t-kT)/2}$$

(Éste es el teorema de muestreo de Shannon.)

Solución La transformada de Fourier de $x(t)$ está dada por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x(t)\,dt$$

y la transformada inversa de Fourier está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}X(j\omega)\,d\omega$$

Defina la versión muestreada de $x(t)$ como $x^*(t)$. Entonces $x^*(t)$ puede estar dada por

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \cdots + x(-T)\delta(t+T) + x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de $x^*(t)$ es

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)\right]dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}$$

Así, $X^*(j\omega)$ está determinada en forma única por $x(kT)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Refiriéndose a la ecuación (3-27), la transformada de Fourier de $x^*(t)$ puede estar dada por

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\omega_s k)$$

Debido a que el espectro en frecuencia de la señal en tiempo continuo original $x(t)$ está limitada entre $-\omega_1$ y ω_1, se tiene

$$X(j\omega) = 0, \qquad \text{para } \omega < -\omega_1 \text{ y } \omega_1 < \omega$$

Debido a que la frecuencia de muestreo ω_s es mayor que $2\omega_1$, se tiene

$$X(j\omega) = 0, \qquad \text{para } \omega < -\tfrac{1}{2}\omega_s \text{ y } \tfrac{1}{2}\omega_s < \omega$$

Por tanto,

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}[\cdots + X(j\omega + j\omega_s) + X(j\omega) + X(j\omega - j\omega_s) + \cdots]$$

$$= \frac{1}{T}X(j\omega)$$

De este modo, se obtiene

$$X(j\omega) = \begin{cases} TX^*(j\omega), & -\tfrac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \tfrac{1}{2}\omega_s \\ 0, & \omega < -\tfrac{1}{2}\omega_s, \tfrac{1}{2}\omega_s < \omega \end{cases}$$

La transformada inversa de Fourier de $X(j\omega)$ da como resultado

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}X(j\omega)\,d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega t}X^*(j\omega)\,d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega t}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}\right]d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega(t-kT)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\frac{e^{j\omega(t-kT)}}{j(t-kT)}\Bigg|_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\frac{\sin[\omega_s(t-kT)/2]}{\omega_s(t-kT)/2} \end{aligned}$$

Por tanto, se ha mostrado que la señal en tiempo continuo original $x(t)$ se puede reconstruir a partir de los datos muestreados $x(kT)$. [Observe que a menos que $X(j\omega) = 0$ para $\omega < -\omega_1$ y $\omega_1 < \omega$ la señal en tiempo continuo $x(t)$ no se puede determinar a partir de los datos muestreados $x(kT)$, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$].

Problema A-3-11

Dibuje las curvas de magnitud y fase para el retenedor de primer orden. Luego compare las características de magnitud y fase del retenedor de primer orden con las del retenedor de orden cero.

Solución La función de transferencia del retenedor de primer orden es

$$G_{h1}(s) = \frac{Ts + 1}{T}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2$$

Al sustituir s por $j\omega$ en $G_{h1}(s)$, se obtiene

$$\begin{aligned} G_{h1}(j\omega) &= \frac{Tj\omega + 1}{T}\left(\frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega}\right)^2 \\ &= \frac{Tj\omega + 1}{T}\left[e^{-j(1/2)T\omega}\frac{e^{j(1/2)T\omega} - e^{-j(1/2)T\omega}}{j\omega}\right]^2 \\ &= \frac{Tj\omega + 1}{T}e^{-jT\omega}\left[\frac{2j\,\text{sen}\,(T\omega/2)}{j\omega}\right]^2 \\ &= \frac{Tj\omega + 1}{T}e^{-jT\omega}\frac{4\,\text{sen}^2\,(T\omega/2)}{\omega^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|G_{h1}(j\omega)| = T\sqrt{1 + T^2\omega^2}\left[\frac{\text{sen}\,(T\omega/2)}{T\omega/2}\right]^2$$

$$\begin{aligned} \angle G_{h1}(j\omega) &= \angle Tj\omega + 1 + \angle e^{-jT\omega} \\ &= \tan^{-1} T\omega - T\omega \\ &= \tan^{-1}\frac{2\pi\omega}{\omega_s} - \frac{2\pi\omega}{\omega_s} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación $T = 2\pi/\omega_s$.

En algunos valores seleccionados de ω, se tiene

$$|G_{h1}(j0)| = T \qquad \angle G_{h1}(j0) = 0°$$

$$\left|G_{h1}\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right| = 1.336T \qquad \angle G_{h1}\left(j\frac{\pi}{T}\right) = -107.7°$$

$$\left|G_{h1}\left(j\frac{2\pi}{T}\right)\right| = 0 \qquad \angle G_{h1}\left(j\frac{2\pi}{T}\right) = -279.0°$$

En la figura 3-54 se muestran las gráficas de las características de magnitud y fase del retenedor de primer orden y las correspondientes para el retenedor de orden cero. A partir de la figura 3-54 se observa que tanto el retenedor de primer orden como el retenedor de orden cero no son filtros paso-bajas muy satisfactorios. Éstos permiten una transmisión significativa arriba de la frecuencia de Nyquist $\omega_N = \pi/T$. Es importante, por tanto, que la señal sea filtrada con un filtro paso-bajas antes de la operación de muestreo de modo que las componentes de frecuencia mayores a la frecuencia de Nyquist sean despreciables.

Problema A-3-12

Considere el retenedor de orden cero que se muestra en la figura 3-55. A partir del diagrama se tiene

$$Y(s) = G(s)X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}X^*(s) \tag{3-102}$$

Muestre que

$$Y^*(s) = X^*(s)$$

Solución Si tomamos la transformada de Laplace asterisco de la ecuación (3-102), se tiene

$$Y^*(s) = \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^* X^*(s)$$

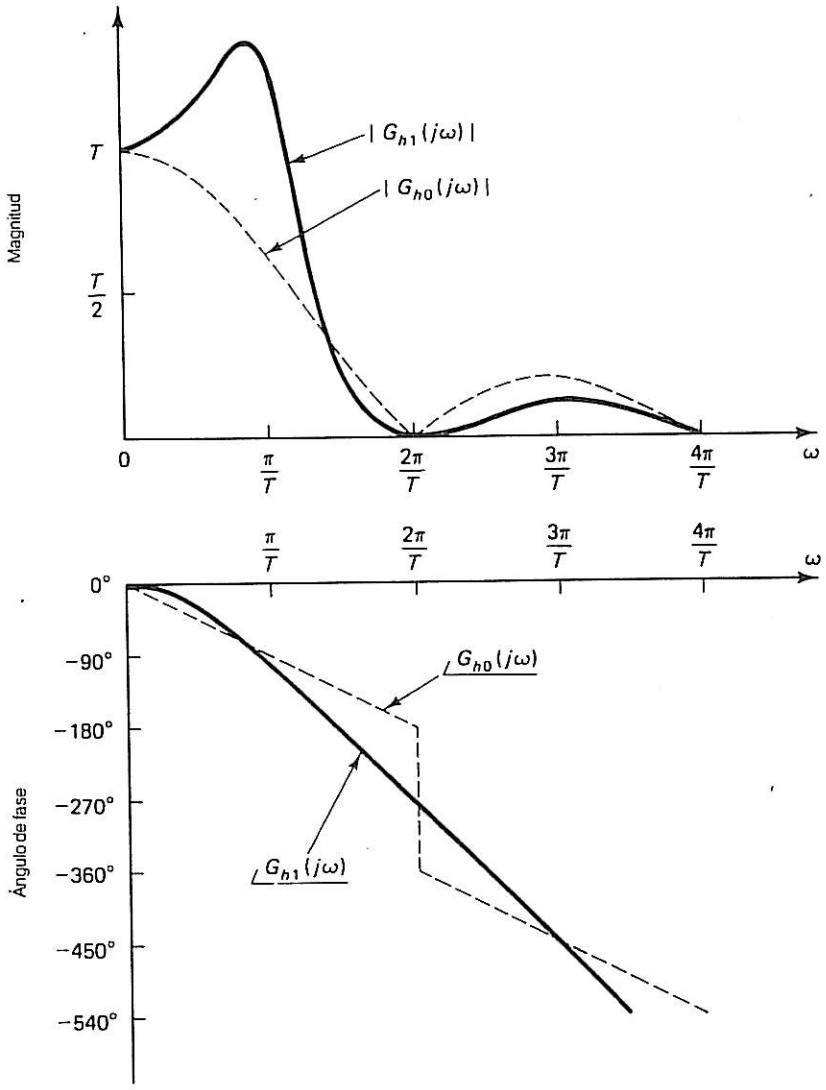


Figura 3-54 Características de magnitud y fase del retenedor de primer orden y las correspondientes al retenedor de orden cero.

En términos de la notación de la transformada z, se tiene

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right] X(z)$$

donde

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = (1 - z^{-1})\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1$$

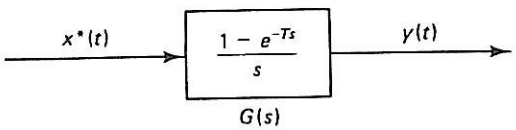


Figura 3-55 Retenedor de orden cero.

Por tanto

$$Y(z) = X(z)$$

En términos de la notación de la transformada de Laplace asterisco, esta última ecuación se puede escribir como

$$Y^*(s) = X^*(s)$$

Problema A-3-13

Obtenga la secuencia de ponderación del sistema definido por

$$G_n(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1})^n}$$

para $n = 1$, 2 y 3, respectivamente.

Solución Para $n = 1$, se tiene

$$G_1(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} = 1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - a^3z^{-3} + \cdots$$

Por tanto, se encuentra que la secuencia de ponderación $g_1(k)$ es

$$g_1(k) = (-a)^k$$

Para $n = 2$, se obtiene

$$G_2(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1})^2} = \frac{1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - a^3z^{-3} + \cdots}{1 + az^{-1}}$$

$$= 1 - 2az^{-1} + 3a^2z^{-2} - 4a^3z^{-3} + \cdots$$

Por tanto, la secuencia de ponderación $g_2(k)$ es

$$g_2(k) = (k + 1)(-a)^k$$

Para $n = 3$, se tiene

$$G_3(z) = \frac{1}{(1 + az^{-1})^3} = \frac{1 - 2az^{-1} + 3a^2z^{-2} - 4a^3z^{-3} + \cdots}{1 + az^{-1}}$$

$$= 1 - 3az^{-1} + 6a^2z^{-2} - 10a^3z^{-3} + \cdots$$

Por tanto, la secuencia de ponderación $g_3(k)$ es

$$g_3(k) = \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}(-a)^k$$

Problema A-3-14

Obtenga la salida en tiempo discreto $C(z)$ del sistema de control en lazo cerrado que se muestra en la figura 3-56. También obtenga la salida en tiempo continuo $C(s)$.

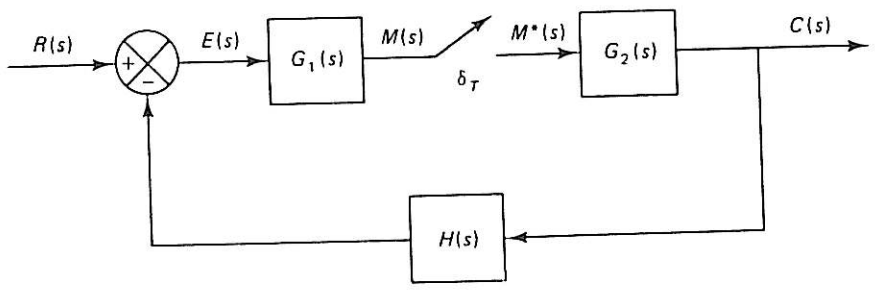


Figura 3-56 Sistema de control en tiempo discreto.

Solución A partir del diagrama se tiene

$$C(s) = G_2(s)M^*(s)$$
$$M(s) = G_1(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

Por tanto,

$$M(s) = G_1(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$
$$= G_1(s)R(s) - G_1(s)H(s)G_2(s)M^*(s)$$

Al tomar la transformada de Laplace asterisco de esta última ecuación, se obtiene

$$M^*(s) = [G_1R(s)]^* - [G_1G_2H(s)]^*M^*(s)$$

o

$$M^*(s) = \frac{[G_1R(s)]^*}{1 + [G_1G_2H(s)]^*}$$

Puesto que $C(s) = G_2(s)M^*(s)$, se tiene

$$C^*(s) = G_2^*(s)M^*(s) = \frac{G_2^*(s)[G_1R(s)]^*}{1 + [G_1G_2H(s)]^*}$$

En términos de la notación de la transformada z,

$$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

Esta última ecuación da la salida en tiempo discreto $C(z)$.

La salida en tiempo continuo $C(s)$ se puede obtener a partir de la siguiente ecuación

$$C(s) = G_2(s)M^*(s) = G_2(s)\frac{[G_1R(s)]^*}{1 + [G_1G_2H(s)]^*}$$

Note que $[G_1R(s)]^*/\{1 + [G_1G_2H(s)]^*\}$ es una serie de impulsos. La salida en tiempo continuo $C(s)$ es la respuesta de $G_2(s)$ a la secuencia de dichos impulsos. [Véase el problema A-3-18 para los detalles de cómo determinar la salida en tiempo continuo $c(t)$, la transformada inversa de Laplace de $C(s)$.]

Problema A-3-15

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-57. Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado $C(z)/R(z)$. También obtenga la expresión para $C(s)$.

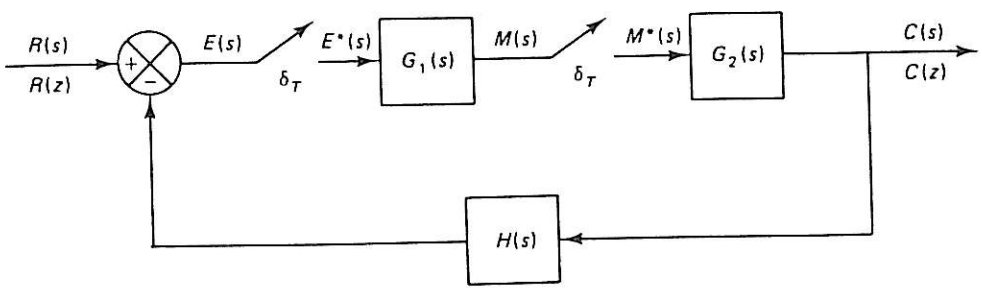


Figura 3-57 Sistema de control en tiempo discreto.

Solución A partir del diagrama se tiene

$$C(s) = G_2(s)M^*(s)$$
$$M(s) = G_1(s)E^*(s)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) = R(s) - H(s)G_2(s)M^*(s)$$

Si tomamos la transformada de Laplace asterisco en ambos miembros de las últimas tres ecuaciones, obtenemos

$$C^*(s) = G_2^*(s)M^*(s)$$
$$M^*(s) = G_1^*(s)E^*(s)$$
$$E^*(s) = R^*(s) - HG_2^*(s)M^*(s)$$

Al resolver para $C^*(s)$ tenemos que

$$C^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)[R^*(s) - HG_2^*(s)M^*(s)]$$

o

$$C^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s) - G_1^*(s)G_2^*(s)HG_2^*(s)M^*(s)$$
$$= G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s) - G_1^*(s)HG_2^*(s)C^*(s)$$

De este modo,

$$C^*(s)[1 + G_1^*(s)HG_2^*(s)] = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s)$$

o

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1^*(s)G_2^*(s)}{1 + G_1^*(s)HG_2^*(s)}$$

En términos de la notación de la transformada z, se tiene

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)HG_2(z)}$$

La salida en tiempo continuo $C(s)$ se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$C(s) = G_2(s)M^*(s) = G_2(s)\frac{G_1^*(s)R^*(s)}{1 + G_1^*(s)HG_2^*(s)}$$

Problema A-3-16

Considere el controlador PID analógico y el controlador PID digital. La ecuación para el controlador PID analógico es

$$m(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

donde $e(t)$ es la entrada al controlador y $m(t)$ es la salida del controlador. La función de transferencia del controlador PID analógico es

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

La función de transferencia pulso del controlador PID digital en la forma posicional está dada por la ecuación (3-56):

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1})$$

donde $K_p = K - \frac{1}{2}K_I$.

Compare las gráficas polares (características de respuesta en frecuencia) del controlador PID analógico con las correspondientes al controlador PID digital.

Solución Para el controlador PID analógico, las características de respuesta en frecuencia se pueden obtener mediante la sustitución de $j\omega$ en lugar de s en $G(s)$. De este modo,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K\left(1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega\right) \\ &= K\left(1 - j\frac{1}{T_i \omega} + T_d j\omega\right) \end{aligned} \tag{3–103}$$

Para el controlador PID digital, las características de respuesta en frecuencia se pueden obtener mediante la sustitución de $z = e^{j\omega T}$ en $G_D(z)$:

$$\begin{aligned} G_D(e^{j\omega T}) &= K_P + \frac{K_I}{1 - e^{-j\omega T}} + K_D(1 - e^{-j\omega T}) \\ &= K_P + \frac{K_I}{1 - \cos\omega T + j \operatorname{sen}\omega T} + K_D(1 - \cos\omega T + j \operatorname{sen}\omega T) \\ &= K_P + \frac{K_I}{2}\left(1 - j\frac{\operatorname{sen}\omega T}{1 - \cos\omega T}\right) + K_D(1 - \cos\omega T + j \operatorname{sen}\omega T) \end{aligned} \tag{3–104}$$

Se comparará primero por separado la acción P, la acción I y la acción D del controlador analógico con sus contrapartes en el controlador digital. Observe que en la acción proporcional (acción P) el controlador digital tiene una ganancia de $K_I/2$ menor que la ganancia correspondiente en el controlador analógico, puesto que $K_P = K - \frac{1}{2}K_I$. Véase la figura 3-58*a*).

Para la acción integral (acción I) las partes reales de las gráficas polares del controlador analógico y del controlador digital difieren por $K_I/2$, como se muestra en la figura 3-58*b*).

Cuando las acciones proporcional e integral se combinan, entonces las partes reales de las gráficas polares para la acción PI analógica y la acción PI digital se hacen iguales, como se muestra en la figura 3-58*c*).

Las gráficas polares de la acción derivativa (acción D) para el controlador analógico y para el controlador digital difieren mucho, como se muestra en la figura 3-58*d*). Por tanto, existen diferencias considerables entre la acción D analógica y la acción D digital.

La gráfica polar cualitativa del controlador PID analógico se puede obtener a partir de la ecuación (3-103) variando ω desde 0 hasta ∞, como se muestra en la figura 3-59*a*). De modo similar, la gráfica polar cualitativa del controlador PID digital se puede obtener a partir de la ecuación (3-104) variando ω desde 0 hasta π/T, como se muestra en la figura 3-59*b*).

Observe que, aunque las gráficas polares del controlador PI analógico y del controlador PI digital son similares, existen diferencias significativas entre las gráficas polares del controlador PID analógico y el controlador PID digital.

Problema A-3-17

En la sección 3-5 se obtuvo la función de transferencia pulso para el controlador PID en la *forma posicional*. Con referencia a la figura 3-28, la función de transferencia pulso para el controlador PID digital se obtuvo como

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1})$$

Utilizando $\nabla m(kT) = m(kT) - m((k-1)T)$ obtenga la ecuación del controlador PID en la *forma de velocidad.*

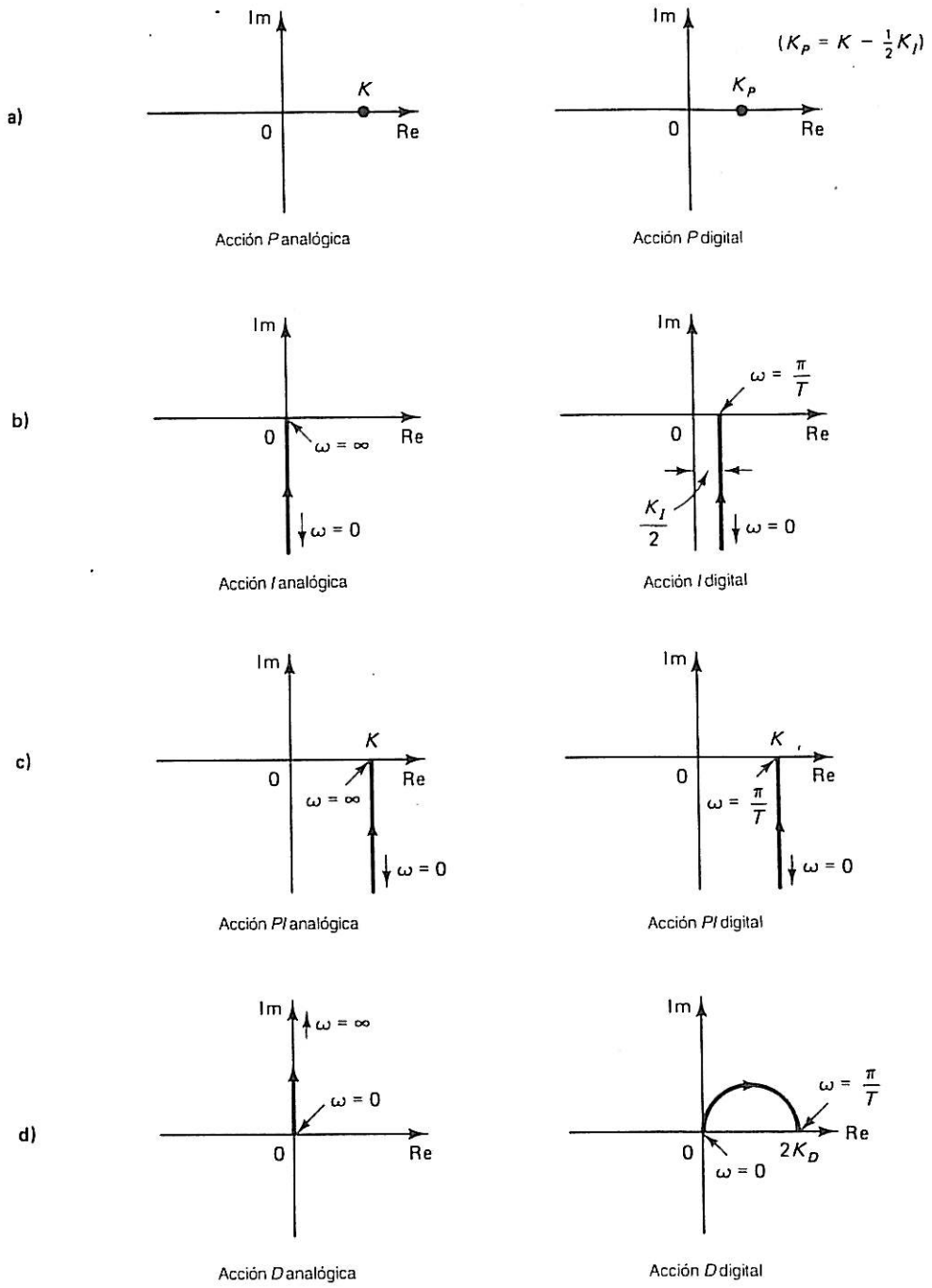


Figura 3-58 Gráficas polares de los controladores analógico y digital con *a*) acción proporcional; *b*) acción integral; *c*) acción proporcional más integral, y *d*) acción derivativa.

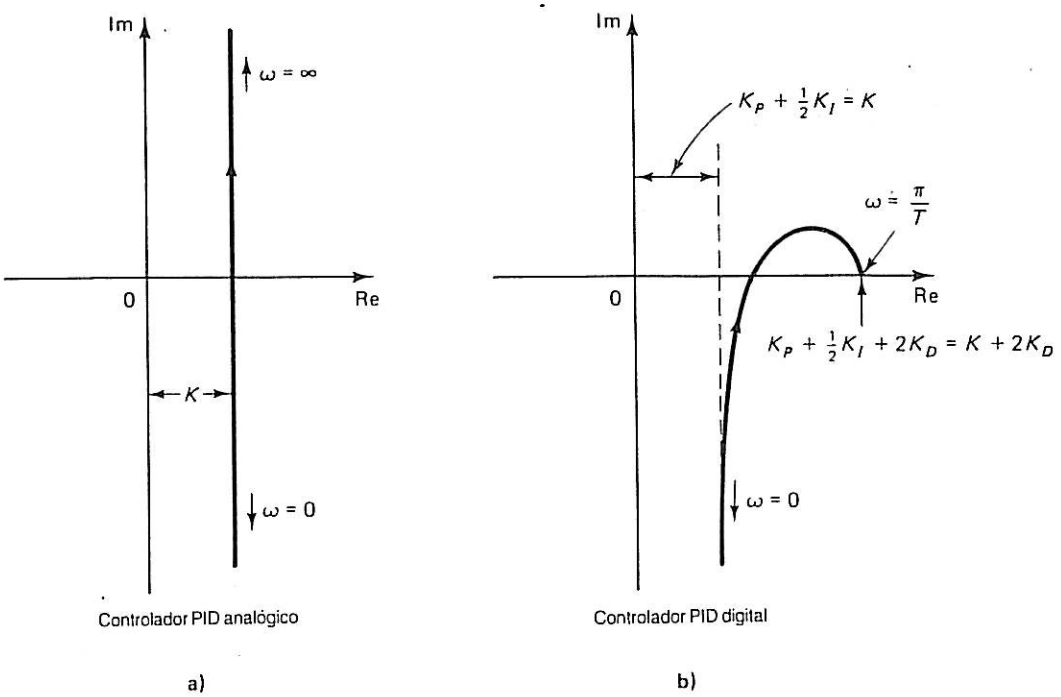


Figura 3-59 *a*) Gráfica polar del controlador PID analógico; *b*) gráfica polar del controlador PID digital.

Solución Observe que

$$\begin{aligned}\nabla m(kT) &= m(kT) - m((k-1)T)\\ &= K\left\{e(kT) - e((k-1)T) + \frac{T}{2T_i}[e(kT) + e((k-1)T)]\right.\\ &\quad \left. + \frac{T_d}{T}[e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)]\right\}\\ &= K_P[e(kT) - e((k-1)T)] + K_I e(kT)\\ &\quad + K_D[e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)] \qquad (3\text{–}105)\end{aligned}$$

donde se han empleado las relaciones $K_P = K - \frac{1}{2}K_I$, $K_I = KT/T_i$, y $K_D = KT_d/T$. (Para estas relaciones, refiérase a la obtención de la forma posicional de la ecuación de control del PID digital.) La ecuación (3-105) toma en consideración la variación de la forma posicional en un período de muestreo.

Suponga que el error actuante $e(kT)$ es la diferencia entre la entrada $r(kT)$ y la salida $c(kT)$, o

$$e(kT) = r(kT) - c(kT)$$

Al sustituir esta última ecuación en la ecuación (3-105), se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla m(kT) &= K_P[r(kT) - r((k-1)T) - c(kT) + c((k-1)T)]\\ &\quad + K_I[r(kT) - c(kT)] + K_D[r(kT) - 2r((k-1)T)\\ &\quad + r((k-2)T) - c(kT) + 2c((k-1)T) - c((k-2)T)] \qquad (3\text{–}106)\end{aligned}$$

El esquema de control PID en la forma de velocidad dado por la ecuación (3-106) se puede modificar de algún modo en una forma diferente para hacer frente a grandes cambios súbitos en el punto de ajuste. Puesto que las acciones de control proporcional y derivativo producen grandes cambios en la salida del controlador cuando la señal que entra a éste presenta un cambio súbito grande, para suprimir dichos cambios en la salida del controlador, los términos proporcional y derivativo digitales se pueden modificar como se discute a continuación.

Si los cambios en el punto de ajuste [entrada $r(kT)$] son una serie de cambios de tipo escalón, entonces inmediatamente después de que un cambio escalón tiene lugar, la entrada $r(kT)$ permanece constante por un tiempo hasta que el siguiente cambio escalón tiene lugar. Por tanto, en la ecuación (3-106) se supone que

$$r(kT) = r((k-1)T) = r((k-2)T)$$

(Observe que esto es cierto si la entrada permanece constante. Pero se supone que esto sigue siendo cierto aun si un cambio escalón tiene lugar.) Entonces la ecuación (3-106) se puede modificar a

$$\begin{aligned} \nabla m(kT) = &-K_P[c(kT) - c((k-1)T)] + K_I[r(kT) - c(kT)] \\ &- K_D[c(kT) - 2c((k-1)T) + c((k-2)T)] \end{aligned} \tag{3–107}$$

La transformada z de la ecuación (3-107) da como resultado

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})M(z) = &-K_P(1 - z^{-1})C(z) + K_I[R(z) - C(z)] \\ &- K_D(1 - 2z^{-1} + z^{-2})C(z) \end{aligned}$$

Al simplificar, se obtiene

$$M(z) = -K_P C(z) + K_I \frac{R(z) - C(z)}{1 - z^{-1}} - K_D(1 - z^{-1})C(z) \tag{3–108}$$

La ecuación (3-108) da el esquema de control PID en la forma de velocidad. El diagrama de bloques de la realización del esquema de control PID digital en la forma de velocidad se mostró en la figura 3-30.

Problema A-3-18

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-60*a*). Obtenga la salida en tiempo continuo $c(t)$ de modo que se pueda determinar la salida entre dos instantes cualesquiera de muestreo consecutivos. Encuentre la expresión para la salida en tiempo continuo $c(t)$. El período de muestreo T es de 1 segundo.

Solución Para el sistema que se muestra en la figura 3-60*a*), se tiene

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

Por lo tanto,

$$E^*(s) = R^*(s) - C^*(s) = R^*(s) - G^*(s)E^*(s)$$

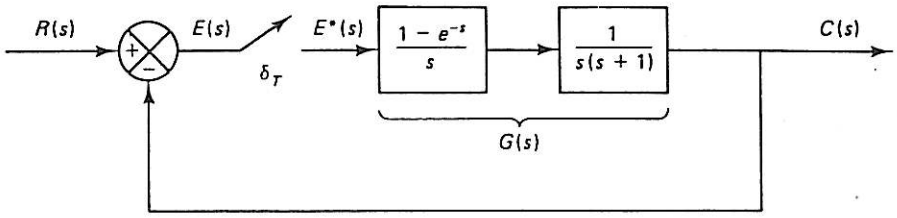
o

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}$$

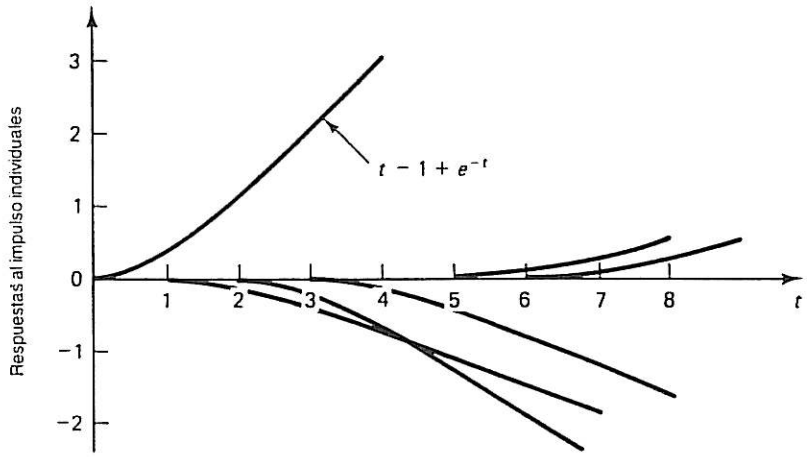
De este modo,

$$C(s) = G(s)\frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}$$

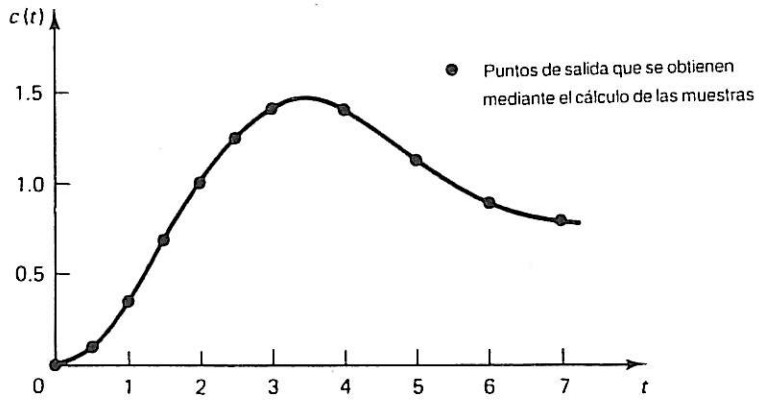
La salida en tiempo continuo $c(t)$ se puede por tanto obtener como la transformada inversa de Laplace de $C(s)$:



a)



b)



c)

Figura 3-60 *a*) Sistema de control en tiempo discreto; *b*) gráficas de las respuestas al impulso individuales; *c*) gráfica de la salida en tiempo continuo $c(t)$ contra t.

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}\right]$$

Para este sistema,

$$G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s + 1)}$$

Por tanto,

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}\right]$$

Defínase

$$X^*(s) = (1 - e^{-s})\frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}$$

Entonces la expresión de la transformada z para esta última ecuación es

$$X(z) = (1 - z^{-1})\frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

Con referencia a la ecuación (3-58) para la transformada z de $G(s)$, se obtiene

$$X(z) = (1 - z^{-1})\frac{\dfrac{1}{1 - z^{-1}}}{1 + \dfrac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{(1 - 0.3679z^{-1})(1 - z^{-1})}}$$

$$= \frac{1 - 1.3679z^{-1} + 0.3679z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.6321z^{-2}}$$

Por tanto, al observar que el período de muestreo T es 1 segundo o $T = 1$, se tiene

$$X^*(s) = \frac{1 - 1.3679e^{-s} + 0.3679e^{-2s}}{1 - e^{-s} + 0.6321e^{-2s}}$$

Por lo tanto,

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\frac{1 - 1.3679e^{-s} + 0.3679e^{-2s}}{1 - e^{-s} + 0.6321e^{-2s}}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}(1 - 0.3679e^{-s} - 0.6321e^{-2s} - 0.3996e^{-3s} + 0e^{-4s} + 0.2526e^{-5s} + 0.2526e^{-6s} + \cdots)\right]$$

Puesto que

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

la transformada inversa de Laplace de esta última ecuación es

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = t - 1 + e^{-t}$$

Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} c(t) = {} & (t - 1 + e^{-t}) - 0.3679[(t-1) - 1 + e^{-(t-1)}]1(t-1) \\ & - 0.6321[(t-2) - 1 + e^{-(t-2)}]1(t-2) \\ & - 0.3996[(t-3) - 1 + e^{-(t-3)}]1(t-3) \\ & + 0.0000[(t-4) - 1 + e^{-(t-4)}]1(t-4) \\ & + 0.2526[(t-5) - 1 + e^{-(t-5)}]1(t-5) \\ & + 0.2526[(t-6) - 1 + e^{-(t-6)}]1(t-6) \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{3-109}$$

En la figura 3-60*b*) se muestran las gráficas de las respuestas impulso individuales dadas por la ecuación (3-109). [Observe que $c(t)$ consiste en la suma de respuestas impulso que se presentan en $t = 0$, $t = 1$, $t = 2, \ldots$ con factores $1, -0.3679, -0.6321, \ldots$.]

A partir de la ecuación (3-109) se ve que para los intervalos de tiempo $0 \le t < 1$, $1 \le t < 2$, $2 \le t < 3, \ldots$, la salida $c(t)$ es la suma de las respuestas impulso como sigue:

$$c(t) = \begin{cases} t - 1 + e^{-t}, & 0 \le t < 1 \\ (t - 1 + e^{-t}) - 0.3679[(t - 1) - 1 + e^{-(t-1)}]1(t - 1), & 1 \le t < 2 \\ (t - 1 + e^{-t}) - 0.3679[(t - 1) - 1 + e^{-(t-1)}]1(t - 1) & \\ \quad -0.6321[(t - 2) - 1 + e^{-(t-2)}]1(t - 2), & 2 \le t < 3 \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

Los cálculos para algunos valores de t son:

$$c(0) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$c(0.5) = 0.5 - 1 + 0.6065 = 0.1065$$

$$c(1.0) = 0.3679 - 0.3679 \times 0 = 0.3679$$

$$c(1.5) = 0.7231 - 0.3679 \times 0.1065 = 0.6839$$

$$c(2.0) = 1.1353 - 0.3679 \times 0.3679 = 1.0000$$

$$c(2.5) = 1.5821 - 0.3679 \times 0.7231 - 0.6321 \times 0.1065 = 1.2487$$

$$c(3.0) = 2.0498 - 0.3679 \times 1.1353 - 0.6321 \times 0.3679 = 1.3996$$

$$c(4.0) = 3.0183 - 0.3679 \times 2.0498 - 0.6321 \times 1.1353 - 0.3996 \times 0.3679 = 1.3996$$

$$c(5.0) = 4.0067 - 0.3679 \times 3.0183 - 0.6321 \times 2.0498 - 0.3996 \times 1.1353 + 0 \times 0.3679 = 1.1469$$

$$c(6.0) = 5.0025 - 0.3679 \times 4.0067 - 0.6321 \times 3.0183 - 0.3996 \times 2.0498 + 0 \times 1.1353 + 0.2526 \times 0.3679 = 0.8944$$

$$\vdots$$

La salida en tiempo continuo $c(t)$ obtenida de esta manera se grafica en la figura 3-60*c*).

Problema A-3-19

Considere el filtro digital definido mediante

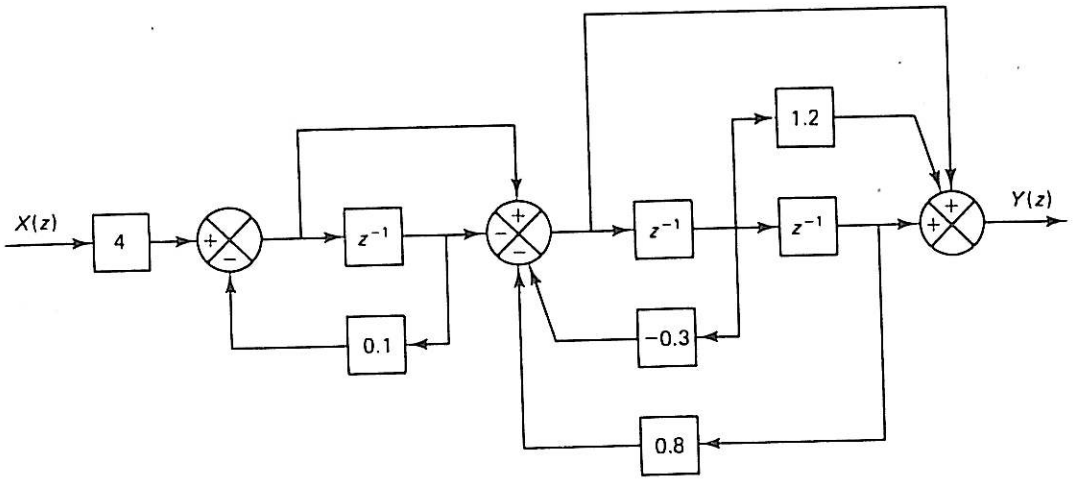
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4(z - 1)(z^2 + 1.2z + 1)}{(z + 0.1)(z^2 - 0.3z + 0.8)}$$

Dibuje un diagrama de la realización en serie y un diagrama de la realización en paralelo. (Utilice una sección de primer orden y una sección de segundo orden.)

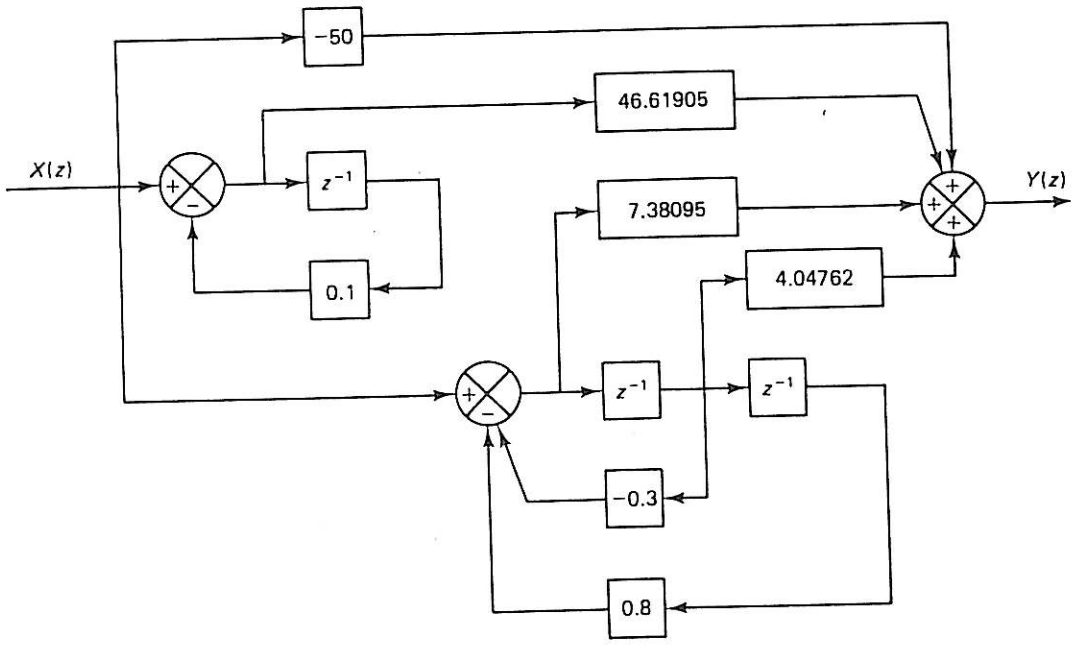
Solución Se considerará primero el esquema de la realización en serie. Para limitar los coeficientes a cantidades reales, se agrupan los términos de segundo orden del numerador (que tienen ceros complejos) y los términos de segundo orden del denominador (que tienen polos complejos). Por lo tanto, $G(z)$ se agrupa como sigue:

$$G(z) = 4\frac{z - 1}{z + 0.1}\frac{z^2 + 1.2z + 1}{z^2 - 0.3z + 0.8}$$

$$= 4\frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1}}\frac{1 + 1.2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$



a)



b)

Figura 3-61 Diagrama de bloques de la realización del filtro digital que se consideró en el problema A-3-19. *a*) Realización en serie; *b*) realización en paralelo.

La figura 3-61*a*) muestra un diagrama de la realización en serie.

Ahora, se considerará el esquema de realización en paralelo. La expansión de $G(z)/z$ en fracciones parciales da como resultado

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{4(z-1)(z^2+1.2z+1)}{z(z+0.1)(z^2-0.3z+0.8)}$$
$$= -\frac{50}{z} + \frac{\frac{979}{21}}{z+0.1} + \frac{\frac{155}{21}z + \frac{85}{21}}{z^2-0.3z+0.8}$$

Entonces $G(z)$ se puede escribir como sigue:

$$G(z) = -50 + \frac{46.61905}{1+0.1z^{-1}} + \frac{7.38095 + 4.04762z^{-1}}{1-0.3z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

La figura 3-61*b*) muestra el diagrama de la realización en paralelo.

Problema A-3-20

Una señal en tiempo continuo $x(t)$ que cambia lentamente se muestrea cada T segundos. Suponga que los cambios en la señal $x(t)$ son muy lentos comparados con la frecuencia de muestreo. Muestre que en el plano z, $(1-z^{-1})/T$ corresponde a la "diferenciación" justamente como s corresponde a la "diferenciación" en el plano s.

Solución Para una señal $x(t)$ que cambia lentamente, la derivada de $x(t)$ se puede aproximar mediante

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{T}[x(kT) - x((k-1)T)]$$

La transformada z de esta ecuación da como resultado

$$V(z) = \frac{1}{T}[X(z) - z^{-1}X(z)] = \frac{1}{T}(1-z^{-1})X(z)$$

a partir de lo cual se obtiene el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3-62*a*). Este diagrama corresponde a la diferenciación en el plano s que se muestra en la figura 3-62*b*). Observe que el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3-62*a*) se puede modificar como el que se muestra en la figura 3-63. (Para la aproximación de la "integración" en el plano z, véanse los problemas B-3-25 al B-3-27.)

Figura 3-62 *a*) Diagrama de bloques para la "diferenciación" en el plano z; *b*) diagrama de bloques para la "diferenciación" en el plano s.

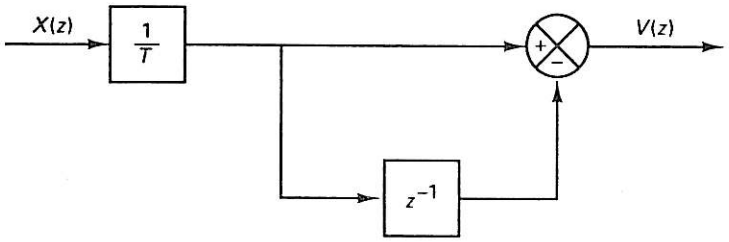


Figura 3-63 "Diferenciador" aproximado en el plano z.

PROBLEMAS

Problema B-3-1

Muestre que el circuito que se muestra en la figura 3-64 actúa como un retenedor de orden cero.

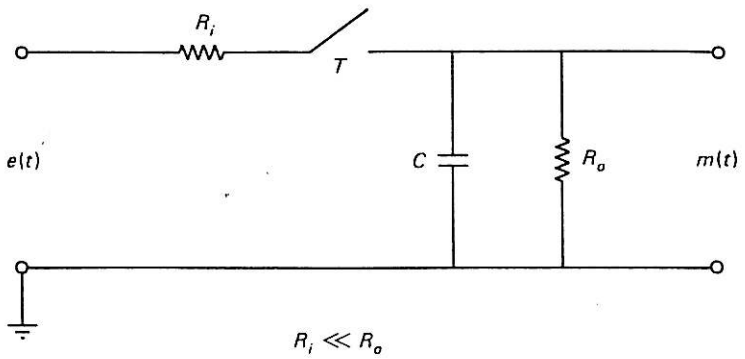


Figura 3-64 Circuito para aproximar un retenedor de orden cero.

Problema B-3-2

Considere el circuito que se muestra en la figura 3-65. Obtenga una ecuación en diferencias que describa la dinámica del sistema cuando el voltaje de entrada aplicado es una constante seccionalmente continua, o

$$e(t) = e(kT), \qquad kT \leq t < (k + 1)T$$

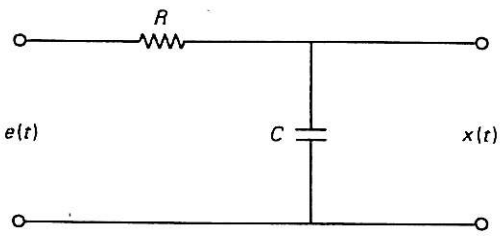


Figura 3-65 Circuito *RC*.

(Obtenga primero una ecuación diferencial y luego discretícela para obtener una ecuación en diferencias.)

Problema B-3-3

Considere el muestreador mediante impulsos y el retenedor de primer orden que se muestra en la figura 3-66. Obtenga la función de transferencia del retenedor de primer orden, suponiendo una función rampa unitaria como la entrada $x(t)$ al muestreador.

Problema B-3-4

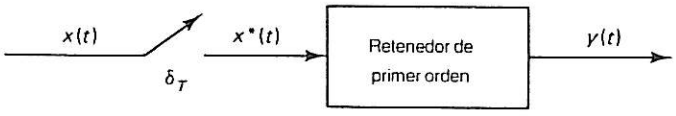


Figura 3-66 Muestreador mediante impulsos y retenedor de primer orden.

Considere la función de transferencia de un sistema

$$X(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Obtenga la función de transferencia pulso mediante dos métodos diferentes.

Problema B-3-5

Obtenga la transformada z de

$$X(s) = \frac{K}{(s + a)(s + b)}$$

Emplee el método de los residuos y el método basado en la función de respuesta impulso.

Problema B-3-6

Obtenga la transformada z de

$$X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{(s + a)^2}$$

Problema B-3-7

Considere la ecuación en diferencias de un sistema

$$y(k + 1) + 0.5y(k) = x(k)$$

donde $y(0) = 0$. Obtenga la respuesta $y(k)$ cuando la entrada $x(k)$ es una secuencia escalón unitario. También obtenga la solución mediante MATLAB.

Problema B-3-8

Considere la ecuación en diferencias de un sistema

$$y(k + 2) + y(k) = x(k)$$

donde $y(k) = 0$ para $k < 0$. Obtenga la respuesta $y(k)$ cuando la entrada $x(k)$ es una secuencia escalón unitario. También obtenga la solución mediante MATLAB.

Problema B-3-9

Obtenga la secuencia de ponderación $g(k)$ del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias

$$y(k) - ay(k - 1) = x(k), \qquad -1 < a < 1$$

Si dos sistemas descritos mediante esta última ecuación se conectan en serie, ¿cuál es la secuencia de ponderación del sistema resultante?

Problema B-3-10

Considere el sistema descrito mediante

$$y(k) - y(k - 1) + 0.24y(k - 2) = x(k) + x(k - 1)$$

donde $x(k)$ es la entrada y $y(k)$ es la salida del sistema.

Determine la secuencia de ponderación del sistema. Suponiendo que $y(k) = 0$ para $k < 0$, determine la respuesta $y(k)$ cuando la entrada $x(k)$ es una secuencia escalón unitario. También obtenga la solución mediante MATLAB.

Problema B-3-11

Considere el sistema

$$G(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.3z^{-1})(1 + 0.7z^{-1})}$$

Obtenga la respuesta de este sistema a una secuencia de entrada escalón unitario. También obtenga la solución mediante MATLAB.

Problema B-3-12

Obtenga la respuesta $y(kT)$ del siguiente sistema:

$$\frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

donde $x(t)$ es una función escalón unitario y $x^*(t)$ es su versión muestreada mediante impulsos. Suponga que el período de muestreo T es 0.1 segundos.

Problema B-3-13

Considere el sistema definido mediante

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \frac{0.5z^3 + 0.4127z^2 + 0.1747z - 0.0874}{z^3}$$

Mediante la ecuación de convolución

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} h(k - j)u(j)$$

obtenga la respuesta $y(k)$ a una secuencia de entrada escalón unitario $u(k)$.

Problema B-3-14

Suponga que la señal muestreada $X^*(s)$ se aplica a un sistema $G(s)$. Suponga también que la salida de $G(s)$ es $Y(s)$ y $y(0+) = 0$.

$$Y(s) = G(s)X^*(s)$$

Empleando la relación

$$Y^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + j\omega_s k)$$

muestre que

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s)$$

Problema B-3-15

Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema que se muestra en la figura 3-67.

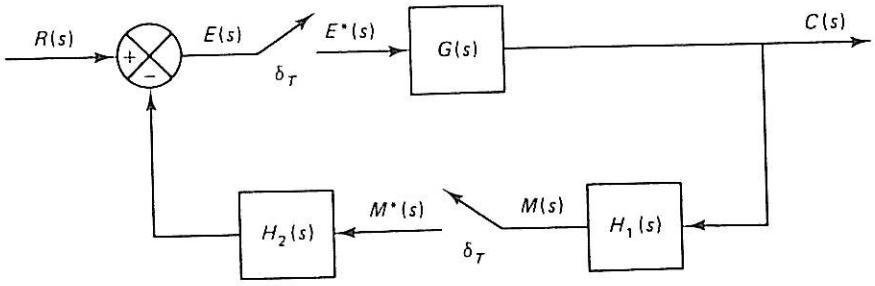


Figura 3-67 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-16

Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema que se muestra en la figura 3-68.

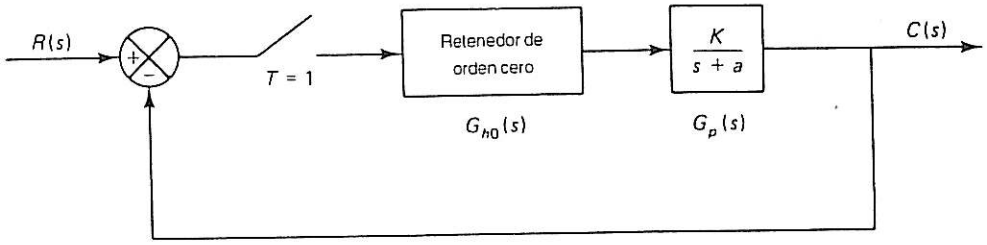


Figura 3-68 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-17

Considere el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 3-69. Obtenga la salida en tiempo discreto $C(z)$ y la salida en tiempo continuo $C(s)$ en términos de la entrada y las funciones de transferencia de los bloques.

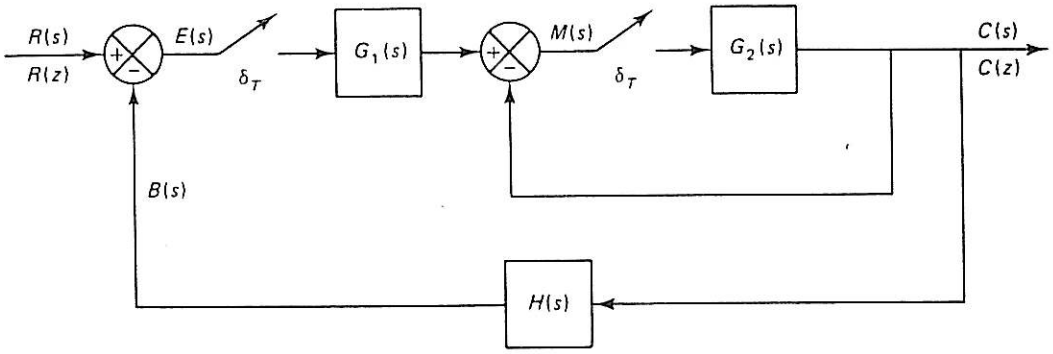


Figura 3-69 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-18

Considere el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 3-70. ©Obtenga la secuencia de salida $c(kT)$ del sistema cuando éste está sujeto a una entrada escalón unitario. Suponga que el período de muestreo T es 1 segundo. También obtenga la salida en tiempo continuo $c(t)$.

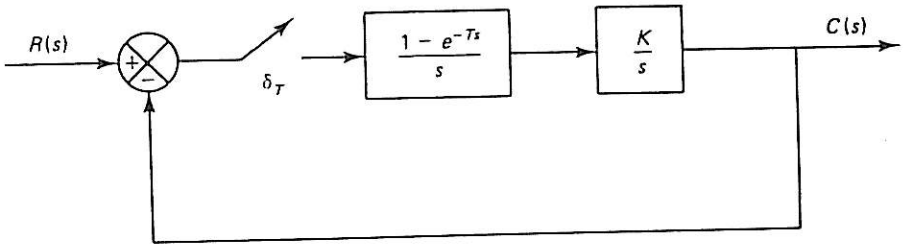


Figura 3-70 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-19

Obtenga en forma cerrada la secuencia de respuesta $c(kT)$ del sistema que se muestra en la figura 3-71 cuando éste está sujeto a una entrada delta de Kronecker $r(k)$. Suponga que el período de muestreo T es 1 segundo.

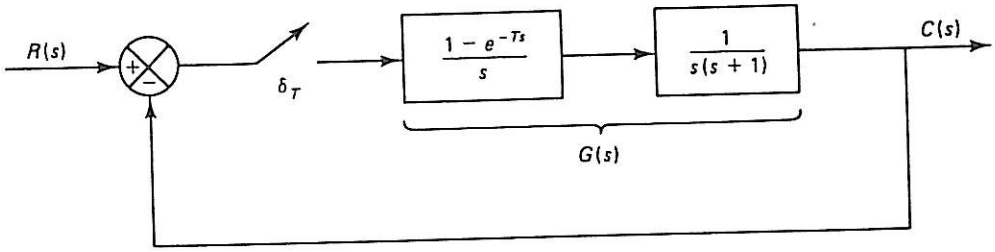


Figura 3-71 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-20

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-72. Suponiendo que el período de muestreo T es 0.2 segundos y que la ganancia constante K es unitaria, determine la respuesta $c(kT)$ para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4, cuando la entrada $r(t)$ es una función escalón unitario. También determine el valor final $c(\infty)$.

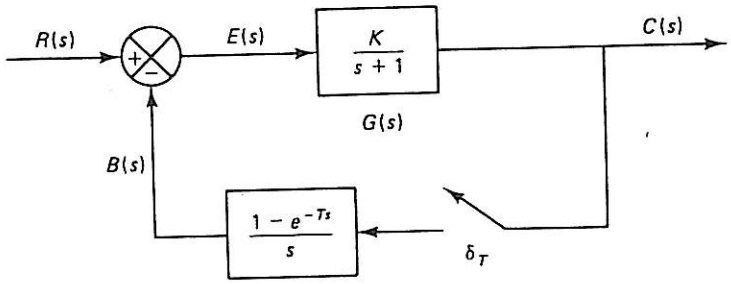


Figura 3-72 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-3-21

Obtenga la función de transferencia pulso en lazo cerrado $C(z)/R(z)$ del sistema de control digital que se muestra en la figura 3-30. Suponga que la función de transferencia pulso de la planta es $G(z)$. (Observe que el sistema que se muestra en la figura 3-30 es un control PID en la forma de velocidad de la planta.)

Problema B-3-22

Suponga que un filtro digital está dado mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_1 x(k) + b_2 x(k-1)$$

Dibuje los diagramas de bloques para el filtro mediante 1) programación directa, 2) programación estándar y 3) programación en escalera.

Problema B-3-23

Considere el filtro digital definido mediante

$$G(z) = \frac{2 + 2.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.12z^{-2}}$$

Realice este filtro digital en el esquema en serie, en el esquema en paralelo y en el esquema en escalera.

Problema B-3-24

Refiriéndose a la aproximación del diferenciador que se muestra en la figura 3-63, dibuje una gráfica de la salida $v(k)$ contra k cuando la entrada $x(k)$ es una secuencia escalón unitario.

Problema B-3-25

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-73. Muestre que la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ está dada por

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = T\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

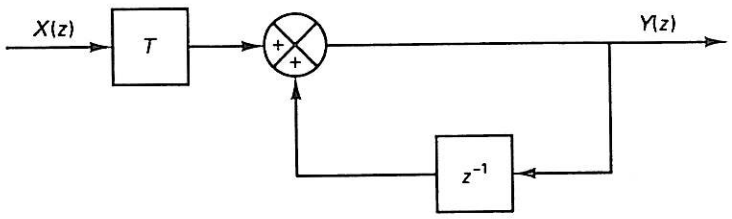


Figura 3-73 Integrador digital sin retardo.

Suponiendo que $y(kT) = 0$ para $k < 0$, muestre que

$$y(kT) = T[x(0) + x(T) + \cdots + x(kT)]$$

De este modo, la salida $y(kT)$ se aproxima al área formada por la entrada. Por tanto, el sistema actúa como un integrador. Debido a que $y(0) = Tx(0)$, la salida aparece tan pronto $x(0)$ entra al sistema. Este integrador comúnmente se denomina integrador digital sin retraso.

Dibuje una gráfica de la salida $y(kT)$ cuando la entrada $x(kT)$ es una secuencia escalón unitario.

Problema B-3-26

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-74. Muestre que la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ está dada por

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = T\left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right)$$

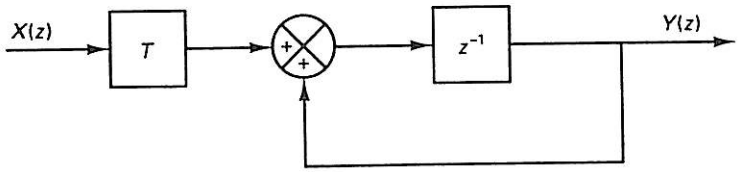


Figura 3-74 Integrador digital con retardo.

Suponiendo que $y(kT) = 0$ para $k < 0$, muestre que

$$y(kT) = T[x(0) + x(T) + \cdots + x((k - 1)T)]$$

La salida $y(kT)$ se aproxima al área formada por la entrada. Puesto que $y(0) = 0$ y $y(T) = Tx(0)$, la salida comienza a aparecer en $t = T$. Este integrador se denomina como integrador digital con retraso.

Dibuje una gráfica de la salida $y(kT)$ cuando la entrada $x(kT)$ es una secuencia escalón unitario.

Problema B-3-27

Considere el sistema que se muestra en la figura 3-75. Muestre que la función de transferencia pulso $Y(z)/X(z)$ está dada por

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right)$$

Este sistema es una combinación de integradores digitales sin retraso y con retraso, como se presentaron en los problemas B-3-25 y B-3-26, respectivamente.

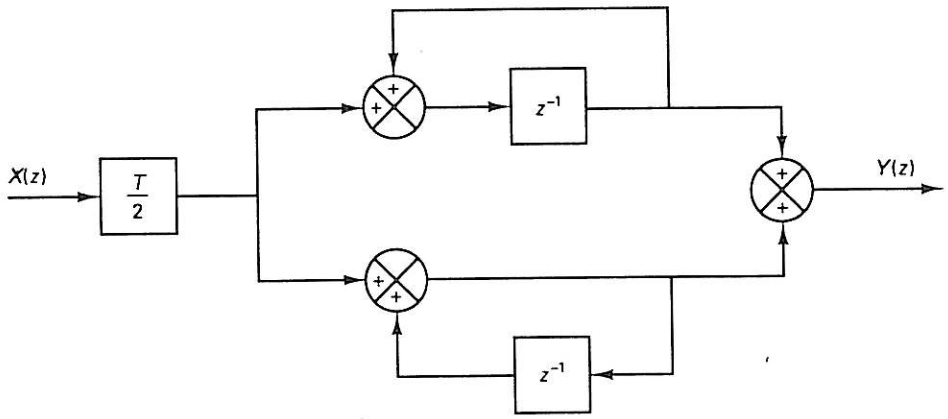


Figura 3-75 Integrador digital bilineal.

Suponiendo que $y(kT) = 0$ para $k < 0$, obtenga $y(kT)$ en términos de $x(0), x(T), \ldots, x(kT)$. Este integrador se denomina integrador digital bilineal. Dibuje una gráfica de la salida $y(kT)$ cuando la entrada $x(kT)$ es una secuencia escalón unitario.

4

Diseño de sistemas de control en tiempo discreto mediante métodos convencionales

4-1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentaremos en primer término la correspondencia del plano s con el plano z y a continuación analizaremos la estabilidad de los sistemas de control en lazo cerrado en el plano z. Luego veremos tres métodos de diseño distintos para los sistemas de control en tiempo discreto o digitales de una entrada y una salida. El primer método está basado en la técnica del lugar geométrico de las raíces, y utiliza configuraciones de polos y ceros en el plano z. El segundo está basado en el método de respuesta en frecuencia en el plano w. El tercer método es un método analítico en el cual intentamos obtener un comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado manipulando la función de transferencia de pulso del controlador digital.

Desde los años cincuenta han quedado bien establecidas las técnicas de diseño para los sistemas de control en tiempo continuo basados en métodos de transformadas convencionales (los del lugar geométrico de las raíces y de respuesta en frecuencia). Los métodos de transformadas convencionales son especialmente útiles para el diseño de sistemas de control industrial. De hecho, en el pasado, muchos sistemas digitales de control industrial fueron diseñados con éxito basándose en métodos de transformadas convencionales. Tanto la familiaridad con las técnicas del lugar geométrico de las raíces y de respuesta, en frecuencia, como la experiencia obtenida en el diseño de controladores analógicos son de gran valor en el diseño de sistemas de control en tiempo discreto.

Organización del capítulo. En la sección 4-1 presentamos material introductorio. La sección 4-2 se ocupa de la correspondencia del plano s hacia el plano z. La sección 4-3 analiza el criterio de estabilidad de Jury para sistemas de control en lazo cerrado en el plano z. La sección 4-4 resume las características de respuesta transitoria y en estado permanente de sistemas de control en tiempo discreto. La técnica de diseño basada en el método del lugar geométrico de las raíces se presenta en la sección 4-5. La sección 4-6 primero analiza el método de respuesta en frecuencia y a continuación presenta las técnicas de respuesta en frecuencia mediante la transformada w para diseñar sistemas de control en tiempo discreto. La sección 4-7 se ocupa de un método de diseño analítico.

4-2 CORRESPONDENCIA ENTRE EL PLANO s Y EL PLANO z

Tanto la estabilidad absoluta como la relativa del sistema de control en lazo cerrado en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo quedan determinadas por la localización de los polos en lazo cerrado en el plano s. Por ejemplo, los polos complejos en lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano s cercanos al eje $j\omega$ mostrarán un comportamiento oscilatorio, y los polos en lazo cerrado sobre el eje real negativo mostrarán decaimiento exponencial.

En vista de que las variables complejas z y s están relacionadas mediante $z = e^{Ts}$, la localización de los polos y de los ceros en el plano z está relacionada con la localización de los polos y los ceros del plano s. Por lo tanto, la estabilidad del sistema en lazo cerrado en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo puede determinarse con base en las posiciones de los polos de la función de transferencia en pulso en lazo cerrado. Debe observarse que el comportamiento dinámico del sistema de control en tiempo discreto depende del período de muestreo T. En función de los polos y los ceros en el plano z, sus localizaciones dependen del período de muestreo T. En otras palabras, un cambio en el período de muestreo T modifica las localizaciones de los polos y de los ceros en el plano z y hace que el comportamiento de respuesta se modifique.

Correspondencia del semiplano izquierdo del plano s hacia el plano z. En el diseño de un sistema de control en tiempo continuo, la localización de los polos y de los ceros en el plano s es de gran importancia para predecir el comportamiento dinámico del sistema. De igual manera, en el diseño de sistemas de control en tiempo discreto, es muy importante la localización de los polos y de los ceros en el plano z. A continuación investigaremos cómo se comparan las localizaciones de los polos y de los ceros en el plano s con las localizaciones de los polos y de los ceros en el plano z.

Cuando en el proceso se incorpora un muestreo por impulsos, las variables complejas z y s quedan relacionadas mediante la ecuación

$$z = e^{Ts}$$

Esto significa que un polo en el plano s puede quedar localizado en el plano z mediante la transformación $z = e^{Ts}$. Dado que la variable compleja s está formada de una parte real σ y una parte imaginaria ω, tenemos

$$s = \sigma + j\omega$$

y

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

De esta última ecuación vemos que los polos y los ceros en el plano s, donde las frecuencias difieran en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $2\pi/T$, corresponden a las mismas localizaciones en el plano z. Esto significa que por cada valor de z existirá un número infinito de valores de s.

Dado que σ es negativo en el semiplano izquierdo del plano s, el semiplano izquierdo del plano s corresponde a

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

El eje $j\omega$ en el plano s corresponde a $|z| = 1$. Esto es, el eje imaginario en el plano s (la línea $\sigma = 0$) corresponde al círculo unitario en el plano z, y el interior del círculo unitario corresponde al semiplano izquierdo del plano s.

Franja primaria y franjas complementarias. Observe que, en vista de que $\angle z = \omega T$, el ángulo de z varía desde $-\infty$ hasta ∞ conforme ω varía desde $-\infty$ a ∞. Tomemos un punto representativo en el eje $j\omega$ del plano s. Conforme este punto se mueve sobre el eje $j\omega$ desde $-j\frac{1}{2}\omega_s$ hasta $j\frac{1}{2}\omega_s$, siendo ω_s la frecuencia de muestreo, tenemos que $|z| = 1$, y $\angle z$ varía desde $-\pi$ hasta π, en dirección contraria a las manecillas del reloj en el plano z. Conforme el punto representativo se mueve desde $j\frac{1}{2}\omega_s$ hasta $j\frac{3}{2}\omega_s$ sobre el eje $j\omega$, el punto correspondiente en el plano z traza un círculo unitario en dirección contraria a las manecillas del reloj. Por lo tanto, conforme el punto en el plano s se mueve en el plano $j\omega$ desde $-\infty$ hasta ∞, dibujaremos el círculo unitario en el plano z un número infinito de veces. De este análisis, resulta claro que cada franja de ancho ω_s en el semiplano izquierdo del plano s se transformará al interior del círculo unitario del plano z. Esto implica que el semiplano izquierdo del plano s puede dividirse en un número infinito de franjas periódicas, tal y como se muestra en la figura 4-1. La franja primaria se extiende desde $j\omega = -j\frac{1}{2}\omega_s$ hasta $j\frac{1}{2}\omega_s$. Las franjas complementarias se extienden desde $j\frac{1}{2}\omega_s$ hasta $j\frac{3}{2}\omega_s$, $j\frac{3}{2}\omega_s$ hasta $j\frac{5}{2}\omega_s$, . . . , y desde $-j\frac{1}{2}\omega_s$ hasta $-j\frac{3}{2}\omega_s$, $-j\frac{3}{2}\omega_s$ hasta $-j\frac{5}{2}\omega_s$, ...

En la franja primaria, si trazamos la secuencia de los puntos 1-2-3-4-5-1 en el plano s, tal y como se muestra mediante los números encerrados en un círculo en la figura 4-2a), entonces esta trayectoria corresponde al círculo unitario con centro en el origen del plano z, como se muestra en la figura 4-2b). Los puntos correspondientes 1, 2, 3, 4 y 5 del plano z se muestran mediante números encerrados en un círculo en la figura 4-2b).

El área encerrada por cualquiera de las franjas complementarias se transforma en el mismo círculo unitario en el plano z. Esto significa que la correspondencia entre el plano z y el plano s no es

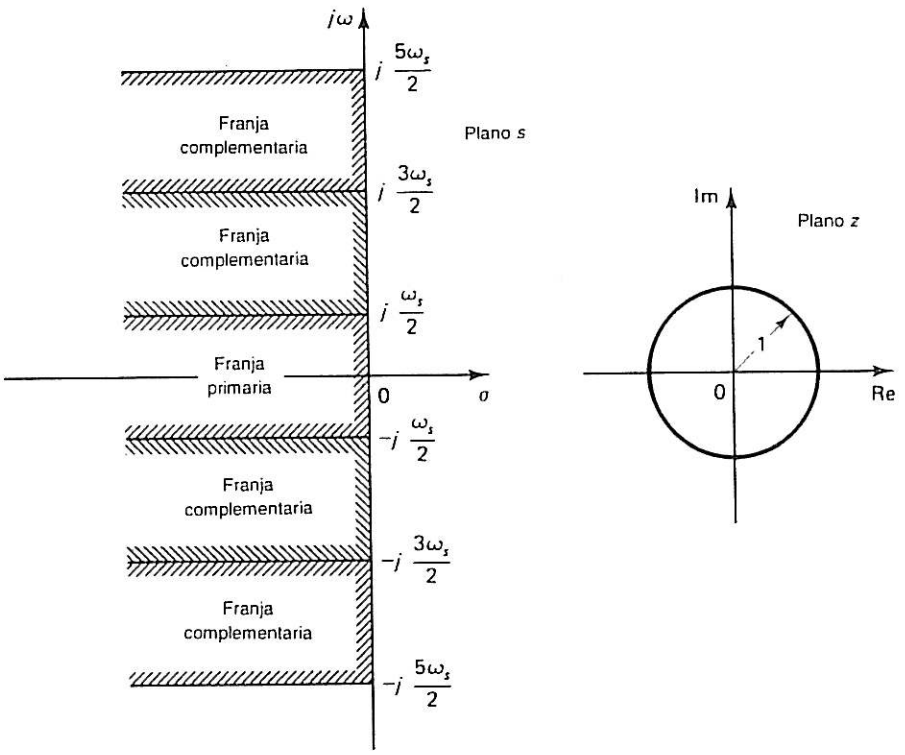


Figura 4-1 Franjas periódicas en el plano s y región correspondiente (círculo unitario con centro en el origen) en el plano z.

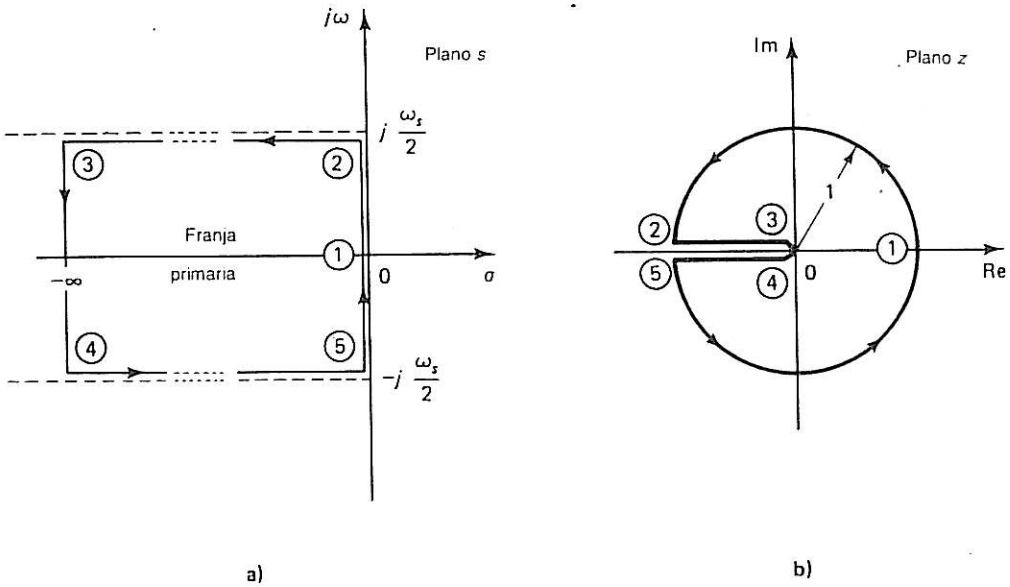


Figura 4-2 Diagramas que muestran la correspondencia entre la franja primaria en el plano s y el círculo unitario en el plano z: *a*) una trayectoria en el plano s; *b*) la trayectoria correspondiente en el plano z.

única. Un punto en el plano z corresponde a un número infinito de puntos en el plano s, aunque un punto en el plano s corresponda a un solo punto del plano z.

Dado que la totalidad del semiplano izquierdo del plano s corresponde al interior del círculo unitario en el plano z, la totalidad del semiplano derecho del plano s corresponde al exterior del círculo unitario en el plano z. Tal y como fue mencionado anteriormente, el eje $j\omega$ del plano s se transforma en el círculo unitario del plano z. Note que, si la frecuencia de muestreo es por lo menos dos veces mayor que la componente de frecuencia más alta involucrada en el sistema, entonces cada uno de los puntos del círculo unitario del plano z representarán frecuencias entre $-\frac{1}{2}\omega_s$ y $\frac{1}{2}\omega_s$.

Ahora investigaremos la correspondencia de algunos de los contornos de uso común del plano s hacia el plano z. De manera específica, haremos la correspondencia de los lugares geométricos de atenuación (factor de amortiguamiento real) constante, de frecuencia constante y de factor de amortiguamiento relativo constante.

Lugar geométrico de atenuación constante. Una línea de atenuación constante (una línea trazada con σ = constante) en el plano s corresponde a un círculo de radio $z = e^{j\omega T}$ con centro en el origen del plano z, como se muestra en la figura 4-3.

Tiempo de asentamiento t_s. El tiempo de asentamiento queda determinado por el valor de la atenuación σ de los polos dominantes en lazo cerrado. Si se especifica el tiempo de asentamiento, es posible dibujar una línea $\sigma = -\sigma_1$ en el plano s que corresponda a un tiempo de asentamiento dado. La región en el plano s a la izquierda de la línea $\sigma = -\sigma_1$ corresponde en el plano z a la parte interior de un círculo de radio $e^{-\sigma_1 T}$, tal y como se muestra en la figura 4-4.

Lugar geométrico de frecuencia constante. Un lugar geométrico de frecuencia constante $\omega = \omega_1$ en el plano s corresponde en el plano z a una línea radial de ángulo constante $T\omega_1$ (en radianes), como se muestra en la figura 4-5. Note que las líneas de frecuencia constante en $\omega = \pm\frac{1}{2}\omega_s$ en el

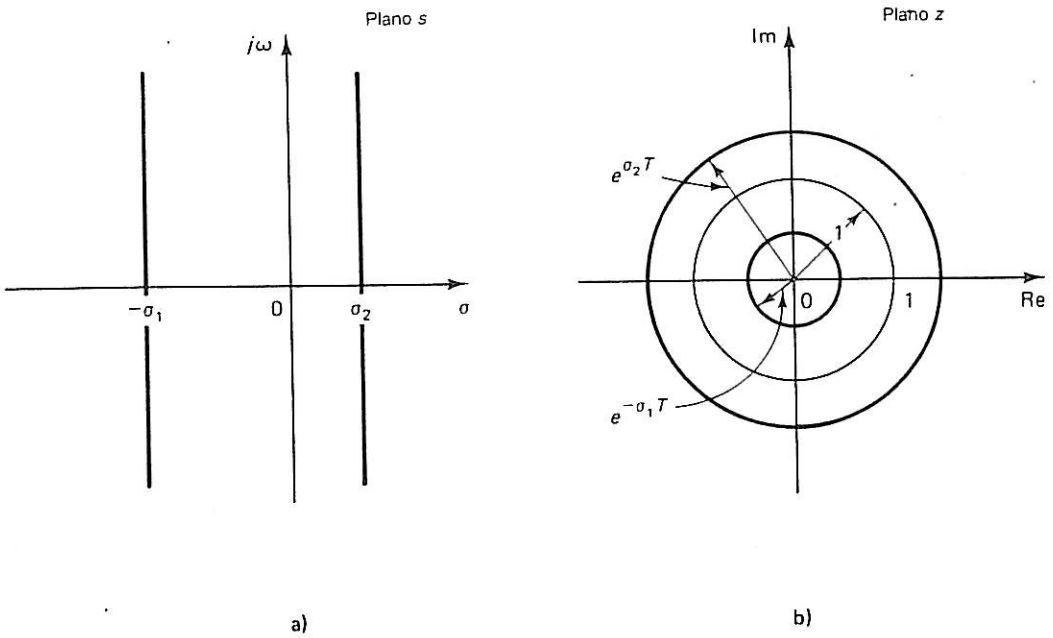


Figura 4-3 *a*) Líneas de atenuación constante en el plano s; *b*) lugar geométrico correspondiente en el plano z.

semiplano izquierdo del plano s corresponden al eje real negativo entre 0 y -1 en el plano z, dado que $T(\pm\frac{1}{2}\omega_s) = \pm\pi$. Las líneas de frecuencia constante en $\omega = \pm\frac{1}{2}\omega_s$ en el semiplano derecho del plano s corresponden al eje real negativo del plano z entre -1 y $-\infty$. El eje real negativo del plano s corresponde al eje real positivo del plano z entre 0 y 1. Y las líneas de frecuencia constante en $\omega = \infty n\omega_s$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) en el semiplano derecho del plano s corresponden al eje real positivo del plano z, entre 1 e ∞.

La región limitada por las líneas de frecuencia constante $\omega = \omega_1$ y $\omega = -\omega_2$ (donde tanto ω_1 como ω_2 ocurren entre $-\frac{1}{2}\omega_s$ y $\frac{1}{2}\omega_s$) y las líneas de atenuación constante $\sigma = -\sigma_1$ y $\sigma = -\sigma_2$, como se muestra en la figura 4-6*a*), corresponden a una región limitada por dos líneas radiales y dos arcos circulares, como se muestra en la figura 4-6*b*).

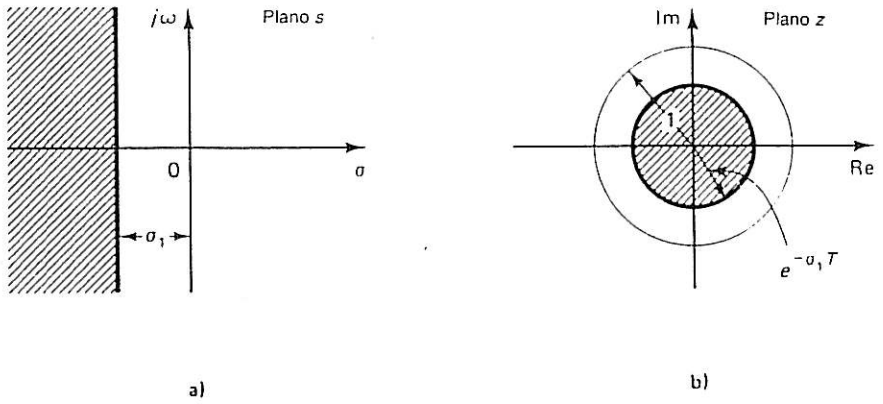


Figura 4-4 *a*) Región para un tiempo de asentamiento T_s menor que $4/\sigma_1$ en el plano s; *b*) región para un tiempo de asentamiento T_s menor que $4/\sigma_1$ en el plano z.

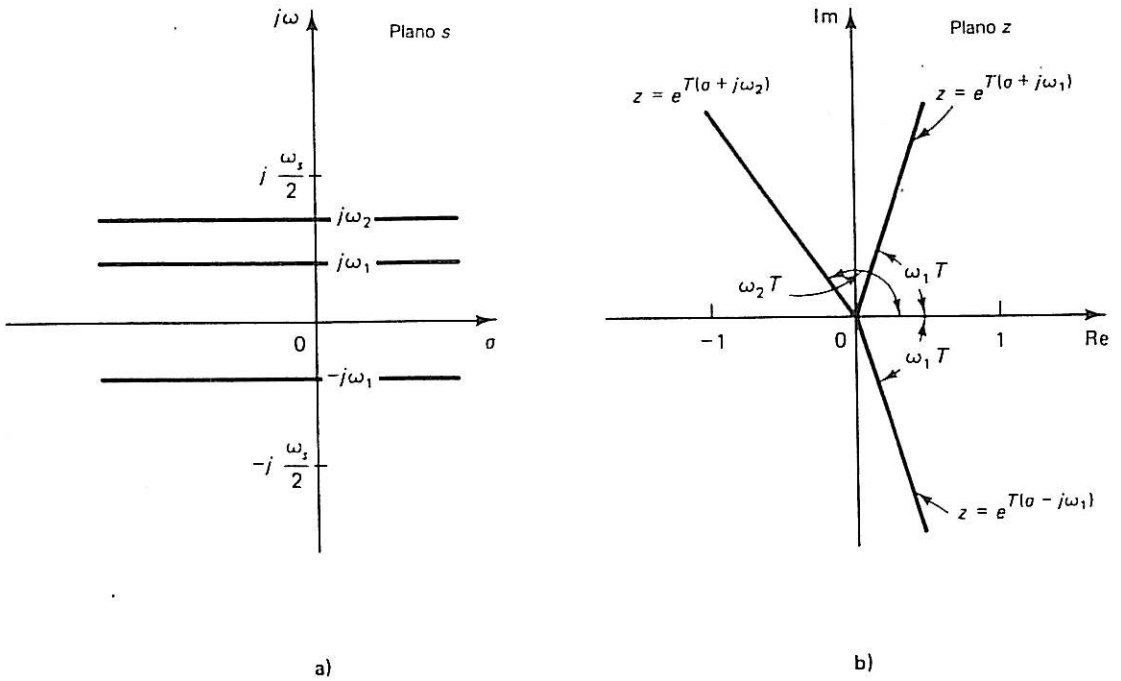


Figura 4-5 *a*) Lugares geométricos de frecuencia constante en el plano *s*; *b*) lugares geométricos correspondientes en el plano *z*.

Lugares geométricos de factor de amortiguamiento relativo constante. Una línea de factor de amortiguamiento relativo constante (una línea radial) en el plano *s* corresponde a una espiral en el plano *z*. Esto se puede observar como sigue. En el plano *s* una línea de factor de amortiguamiento relativo constante puede ser determinada por

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$

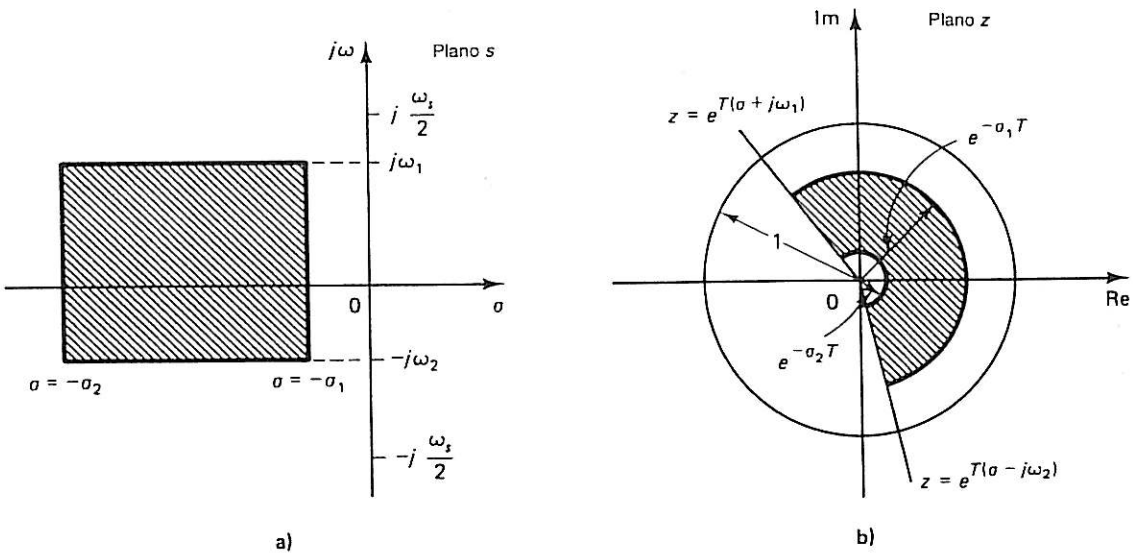


Figura 4-6 *a*) Región limitada por líneas $\omega = \omega_1$, $\omega = -\omega_2$, $\sigma = -\sigma_1$ y $\sigma = -\sigma_2$ en el plano *s*; *b*) región correspondiente en el plano *z*.

donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ [vea la figura 4-7*a*)]. En el plano z esta línea se convierte en

$$z = e^{Ts} = \exp(-\zeta\omega_n T + j\omega_d T)$$
$$= \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

Por lo tanto,

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \tag{4-1}$$

y

$$\angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} \tag{4-2}$$

Entonces, la magnitud de z se reduce y el ángulo de z aumenta linealmente conforme ω_d se incrementa y el lugar geométrico en el plano z se convierte en una espiral logarítmica, como se muestra en la figura 4-7*b*).

Observe que para una relación ω_d/ω_s dada, la magnitud $|z|$ se convierte en una función sólo de ζ, y el ángulo de z se convierte en una constante. Por ejemplo, si el factor de amortiguamiento relativo está especificado como 0.3, es decir $\zeta = 0.3$, entonces para $\omega_d = 0.25\omega_s$ tenemos

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi \times 0.3}{\sqrt{1-0.3^2}} \times 0.25\right) = 0.610$$
$$\angle z = 2\pi \times 0.25 = 0.5\pi = 90°$$

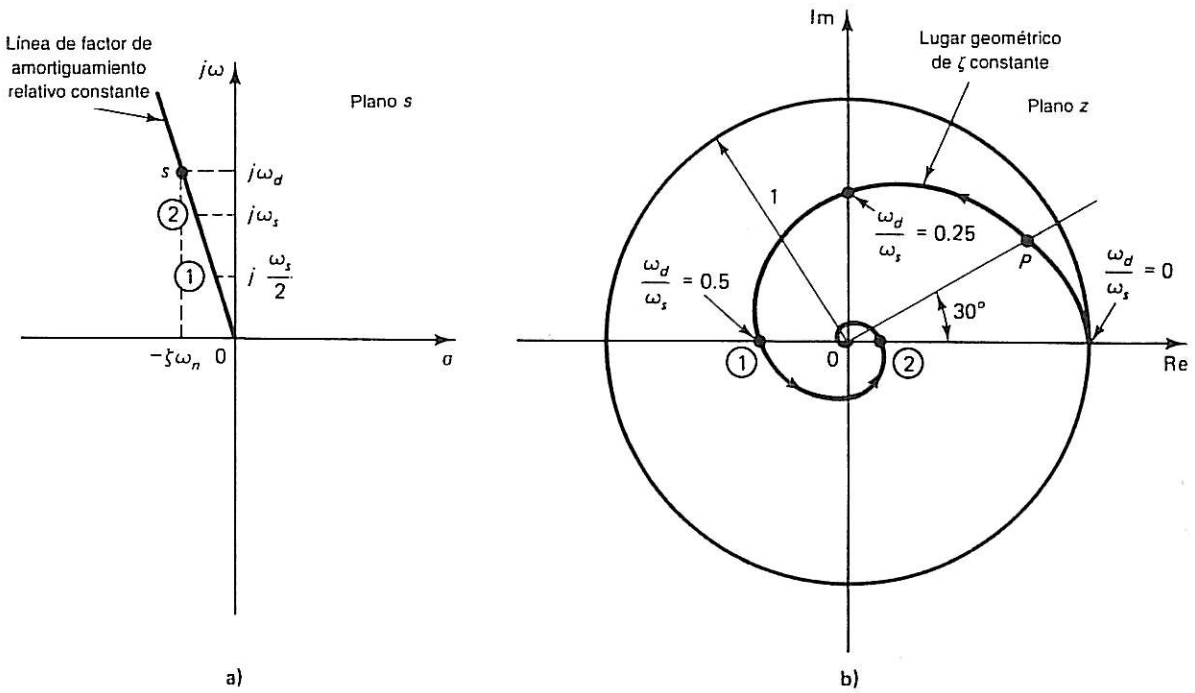


Figura 4-7 *a*) Línea de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano s; *b*) lugar geométrico correspondiente en el plano z.

Para $\omega_d = 0.5\omega_s$,

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi \times 0.3}{\sqrt{1 - 0.3^2}} \times 0.5\right) = 0.3725$$

$$\angle z = 2\pi \times 0.5 = \pi = 180°$$

Por lo tanto, se puede graduar la espiral en función de una frecuencia normalizada ω_d/ω_s [vea la figura 4-7*b*)]. Una vez especificada la frecuencia de muestreo ω_s, se puede determinar el valor numérico de ω_d en cualquiera de los puntos de la espiral. Por ejemplo, en el punto P de la figura 4-7*b*), se puede determinar ω_d como sigue. Si, por ejemplo, la frecuencia de muestreo está especificada como $\omega_s = 10\pi$ rad/s, entonces el punto P

$$\angle z = \frac{\pi}{6} = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

De ahí, ω_d en el punto P es

$$\omega_d = \tfrac{1}{12}\omega_s = \tfrac{5}{6}\pi \text{ rad/sec}$$

Observe que si una línea de factor de amortiguamiento relativo constante está en el segundo o en el tercer cuadrante del plano s, entonces la espiral decrece dentro del círculo unitario en el plano z. Sin embargo, si una línea de factor de amortiguamiento relativo constante aparece en el primero o en el cuarto cuadrante del plano s (lo que corresponde a una amortiguación negativa), entonces la espiral crece por fuera del círculo unitario. En la figura 4-8 se muestran los lugares geométricos de un factor de amortiguamiento relativo constante para $\zeta = 0$, $\zeta = 0.2$, $\zeta = 0.4$, $\zeta = 0.6$, $\zeta = 0.8$ y $\zeta = 1$. El lugar geométrico de $\zeta = 1$ es una línea horizontal entre los puntos $z = 0$ y $z = 1$. (Note que la figura 4-8 sólo muestra los lugares geométricos correspondientes al semiplano superior del plano z, lo que corresponde a $0 \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$. Los lugares geométricos correspondientes a $-\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le 0$ son las imágenes de espejo de los lugares geométricos del semiplano superior del plano z en relación con el eje horizontal.)

Adviértase que los lugares de ζ constante son normales a los lugares geométricos de ω_n constante en el plano s, como se ve en la figura 4-9*a*). En la correspondencia con el plano z, los lugares geométricos de ω_n constante intersectan las espirales de las ζ constantes en ángulos constantes, como se muestran en la figura 4-9*b*). Una correlación o transformación como ésta, que conserva tanto la dimensión como el sentido de los ángulos, se conoce como *mapeo o correspondencia conforme.*

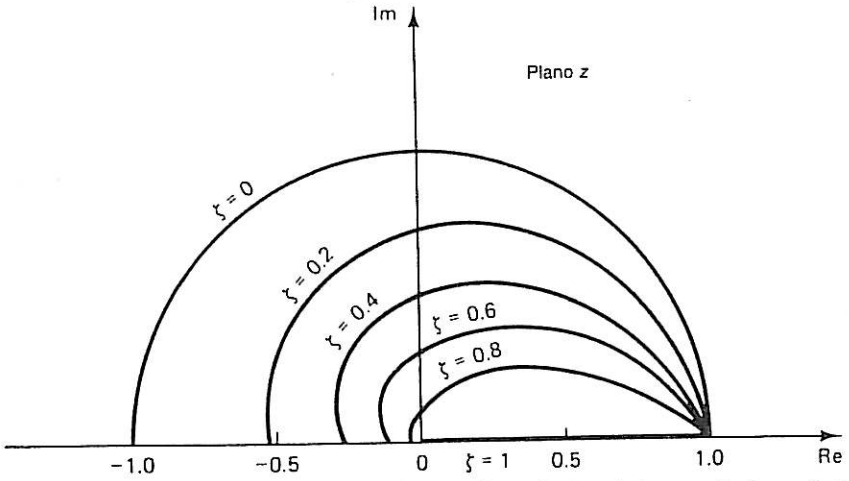


Figura 4-8 Lugares geométricos del factor de amortiguamiento relativo constante en el plano z.

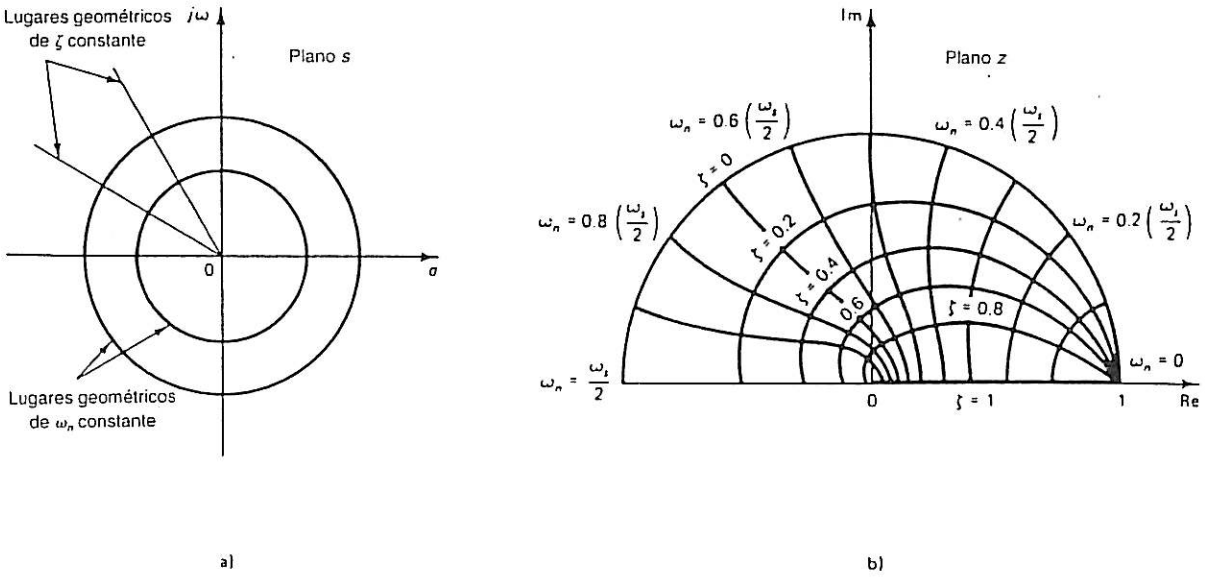


Figura 4-9 *a*) Diagrama que muestra la ortogonalidad o perpendicularidad de los lugares geométricos de las ζ constantes y de los lugares geométricos de los ω_n constantes dentro del plano *s*; *b*) diagrama correspondiente en el plano *z*.

Regiones del plano s y del plano z para $\zeta > \zeta_1$**.** La figura 4-10 muestra los lugares geométricos de ζ constante ($\zeta = \zeta_1$) tanto en el plano *s* como en el plano *z*. Note que las espirales logarítmicas mostradas corresponden a la franja primaria en el plano *s*. (Si se satisface el teorema de muestreo, sólo necesitaremos considerar la franja primaria del plano *s*.)

Si todos los polos del plano *s* se definen como con un factor de amortiguamiento relativo no menor que el valor especificado ζ_1, entonces los polos deberán ocurrir a la izquierda de la línea de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano *s* (la región sombreada). En el plano *z*, los polos deberán presentarse en la región limitada por las espirales logarítmicas correspondientes a $\zeta = \zeta_1$ (la región sombreada).

Ejemplo 4-1

Especifique la región en el plano *z* que corresponda a una región deseable (región sombreada) del plano *s* limitada por las líneas $\omega = \pm \omega_1$, las líneas $\zeta = \zeta_1$ y una línea $\sigma = -\sigma_1$, tal y como se muestra en la figura 4-11*a*).

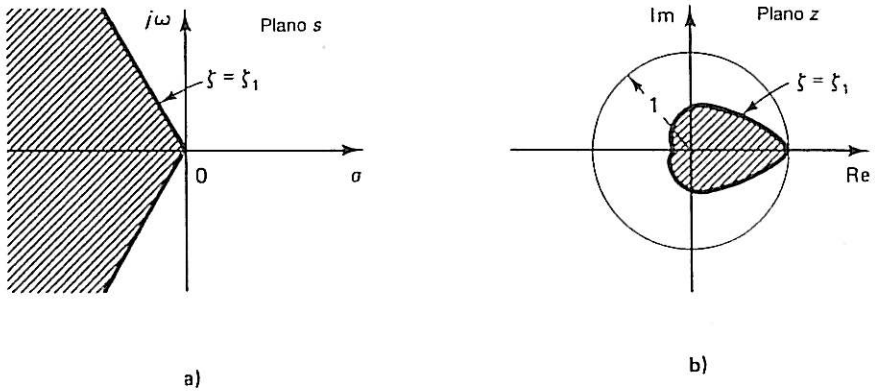


Figura 4-10 *a*) Región correspondiente a $\zeta > \zeta_1$ en el plano *s*; *b*) región correspondiente a $\zeta > \zeta_1$ en el plano *z*.

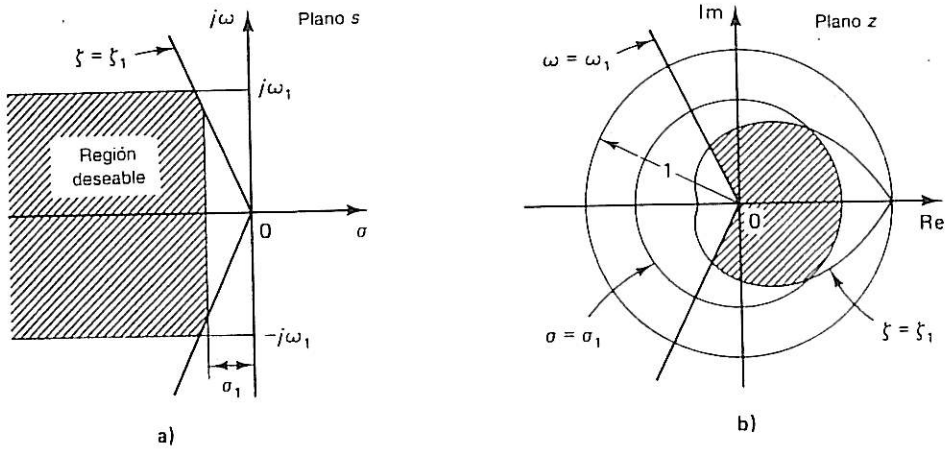


Figura 4-11 *a*) Una región deseable en el plano s para la localización de los polos en lazo cerrado; *b*) región correspondiente en el plano z.

Con base en los análisis anteriores sobre la correspondencia del plano s con el plano z, la región deseable puede ser transformada (mapeada) al plano z como aparece en la figura 4-11*b*).

Note que si los polos dominantes del sistema de control en tiempo continuo en lazo cerrado deben estar en la región deseable especificada en el plano s, entonces los polos dominantes del sistema de control equivalente en tiempo discreto en lazo cerrado deberán también ocurrir dentro de la región del plano z que corresponda a la región deseable del plano s. Una vez diseñado el sistema de control en tiempo discreto, deberán verificarse las características de respuesta del sistema mediante experimentos o simulación. Si las características de respuesta no son satisfactorias, entonces deberán modificarse las localizaciones de los polos y los ceros en lazo cerrado, hasta que se obtengan los resultados satisfactorios.

Comentarios. Para sistemas de control en tiempo discreto, es necesario tener especial cuidado con el período de muestreo T. Esto es en razón de que, si el período de muestreo es demasiado largo y el teorema de muestreo no es satisfecho, entonces ocurrirá un doblamiento de frecuencia y se modificarán las localizaciones efectivas de los polos y los ceros.

Suponga que un sistema de control en tiempo continuo tiene en el plano s polos en lazo cerrado en $s = -\sigma_1 \pm j\omega_1$. Si en ese sistema se involucra la operación de muestreo y si $\omega_1 > \frac{1}{2}\omega_s$, siendo ω_s la frecuencia de muestreo, entonces ocurrirá un doblamiento de frecuencia y el sistema se comportará como si tuviera polos en $s = -\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm n\omega_s)$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Esto significa que la operación de muestreo dobla los polos exteriores de la franja primaria hacia el interior de la franja primaria, y los polos volverán a aparecer en $s = -\sigma_1 \pm j(\omega_1 - \omega_s)$; vea la figura 4-12*a*). En el plano z estos polos serán transformados en un par de polos complejos conjugados, tal y como se muestra en la figura 4-12*b*). Cuando ocurre un doblamiento de frecuencia, se observarán oscilaciones con frecuencias $\omega_s - \omega_1$ en vez de la frecuencia ω_1.

4-3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO EN EL PLANO z

Análisis de estabilidad de un sistema en lazo cerrado. A continuación analizaremos la estabilidad de los sistemas de control en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo de una entrada/una salida. Considere el siguiente sistema con función de transferencia de pulso en lazo cerrado:

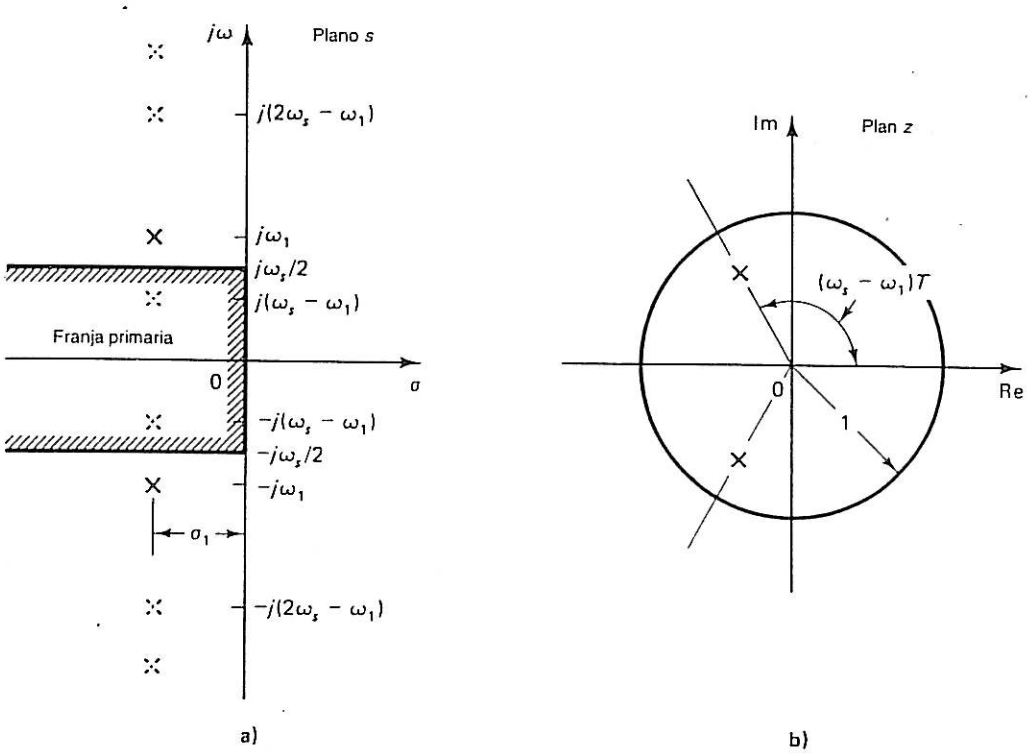


Figura 4-12 *a*) Diagrama que muestra los polos en el plano s en $-\sigma_1 \pm j\omega_1$ y los polos con doblamiento que aparecen en $-\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm \omega_s), -\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm 2\omega_s), \ldots$; *b*) correspondencia en el plano z de los polos del plano s en $-\sigma_1 \pm j\omega_1, -\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm \omega_s), -\sigma_1 \pm j(\omega_1 \pm 2\omega_s), \ldots$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \tag{4–3}$$

La estabilidad del sistema que define la ecuación (4-3), así como la de otros tipos de sistemas de control en tiempo discreto, puede determinarse por las localizaciones de los polos en lazo cerrado en el plano z, o por las raíces de la ecuación característica

$$P(z) = 1 + GH(z) = 0$$

como sigue:

1. Para que el sistema sea estable, los polos en lazo cerrado o las raíces de la ecuación característica deben presentarse en el plano z dentro del círculo unitario. Cualquier polo en lazo cerrado exterior al círculo unitario hace inestable al sistema.
2. Si un polo simple se presenta en $z = 1$, entonces el sistema se convierte en críticamente estable. También el sistema se convierte en críticamente estable si un solo par de polos complejos conjugados se presentan sobre el círculo unitario en el plano z. Cualquier polo múltiple en lazo cerrado sobre el círculo unitario hace al sistema inestable.
3. Los ceros en lazo cerrado no afectan la estabilidad absoluta y por lo tanto pueden quedar localizados en cualquier parte del plano z

Entonces, un sistema de control en lazo cerrado en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo de una entrada/una salida se vuelve inestable si cualquiera de los polos en lazo cerrado se presenta por fuera del círculo unitario y/o cualquier polo múltiple en lazo cerrado se presenta sobre el círculo unitario del plano z.

Ejemplo 4-2

Considere el sistema de control en lazo cerrado que aparece en la figura 4-13. Determine la estabilidad del sistema cuando $K = 1$. La función de transferencia en lazo cerrado $G(s)$ del sistema es

$$G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s + 1)}$$

Refiriéndose a la ecuación (3-58), la transformada z de $G(s)$ es

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s + 1)}\right] = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)} \tag{4-4}$$

En vista de que la función de transferencia pulso en lazo cerrado para el sistema es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

la ecuación característica es

$$1 + G(z) = 0$$

que se convierte en

$$(z - 0.3679)(z - 1) + 0.3679z + 0.2642 = 0$$

o bien

$$z^2 - z + 0.6321 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica se encuentra que son

$$z_1 = 0.5 + j0.6181, \qquad z_2 = 0.5 - j0.6181$$

En vista de que

$$|z_1| = |z_2| < 1$$

el sistema es estable.

Es importante observar que en ausencia del muestreador, un sistema de segundo orden es siempre estable. Sin embargo, en presencia del muestreador, un sistema de segundo orden como éste puede hacerse inestable para valores de ganancia grandes. De hecho, puede demostrarse que si $K > 2.3925$ el sistema de segundo orden que aparece en la figura 4-13 se puede convertir en inestable. (Vea el ejemplo 4-7.)

Métodos para probar la estabilidad absoluta. Se pueden aplicar tres pruebas de estabilidad directamente a la ecuación característica $P(z) = 0$, sin tener que resolver las raíces. Dos de ellas son la prueba de estabilidad de Schur-Cohn y la prueba de estabilidad de Jury. Estas dos pruebas revelan

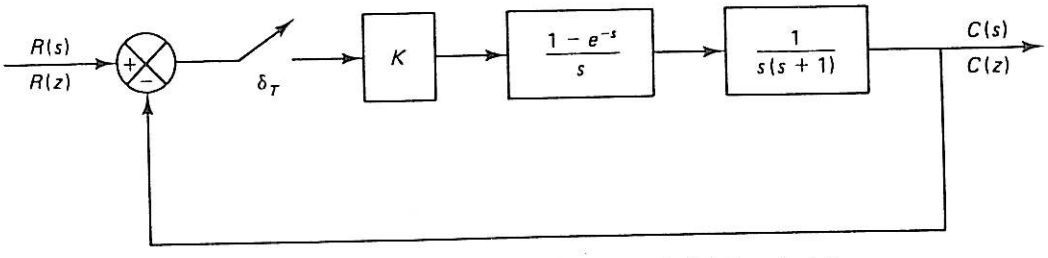


Figura 4-13 Sistemas de control en lazo cerrado del ejemplo 4-2.

la existencia de cualquier raíz inestable (raíces que en el plano z se presentan fuera del círculo unitario). Sin embargo, estas pruebas no dan las localizaciones de las raíces inestables, ni indican los efectos de cambios en los parámetros sobre la estabilidad del sistema, excepto en el caso sencillo de sistemas de bajo orden. (Vea el ejemplo 4-7.) El tercer método está basado en la transformación bilineal conjuntamente con el criterio de estabilidad Routh, que será descrito más adelante en esta sección. (En el capítulo 5 estudiaremos el análisis de estabilidad de Liapunov, que es aplicable a sistemas de control definidos en el espacio de estados.)

Tanto la prueba de estabilidad de Schur-Cohn como la prueba de estabilidad de Jury pueden aplicarse a ecuaciones polinómicas con coeficientes reales o complejos. Los cálculos requeridos en la prueba de Jury, cuando la ecuación polinómica implica únicamente coeficientes reales, son mucho más sencillos que los requeridos en la prueba de Schur-Cohn. En vista de que los coeficientes de las ecuaciones características correspondientes a sistemas físicamente realizables son siempre reales, es preferible la prueba de Jury sobre la prueba de Schur-Cohn.

La prueba de estabilidad de Jury. Al aplicar la prueba de estabilidad de Jury a una ecuación característica dada $P(z) = 0$, construimos una tabla cuyos elementos se basan en los coeficientes de $P(z)$. Suponga que la ecuación característica $P(z)$ es un polinomio en z, como sigue:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{4–5}$$

donde $a_0 > 0$. Entonces la tabla de Jury se construye como se ve en la tabla 4-1.

Observe que los elementos del primer renglón están formados por los coeficientes en $P(z)$ arreglados en orden de potencias ascendentes de z. Los elementos del segundo renglón están formados por los coeficientes de $P(z)$ arreglados en orden de potencias descendentes de z. Los elementos correspondientes a los renglones 3 hasta $2n - 3$ se obtienen mediante los siguientes determinantes:

TABLA 4-1 FORMA GENERAL DE LA TABLA DE ESTABILIDAD DE JURY

Renglón	z^0	z^1	z^2	z^3	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	$\cdots$	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	$\cdots$	c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-2}		
. . .	. . .							
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n-3$	q_2	q_1	q_0					

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2$$

Note que el último renglón de la tabla está formado por tres elementos. (Para sistemas de segundo orden, $2n-3=1$ y la tabla de Jury estará sólo formada por un renglón, que contiene tres elementos.) Observe que los elementos en cualquier renglón par son simplemente los inversos del renglón impar inmediatamente anterior.

Criterio de estabilidad mediante la prueba de Jury. Un sistema con la ecuación característica $P(z) = 0$ dado por la ecuación (4-5), y rescrito de la forma

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

donde $a_0 > 0$, es estable, si todas las condiciones siguientes se satisfacen:

1. $|a_n| < a_0$
2. $P(z)|_{z=1} > 0$
3. $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 \text{ para } n \text{ par} \\ < 0 \text{ para } n \text{ impar} \end{cases}$
4. $|b_{n-1}| > |b_0|$
   $|c_{n-2}| > |c_0|$
   $\vdots$
   $|q_2| > |q_0|$

Ejemplo 4-3

Construya la tabla de estabilidad de Jury para la siguiente ecuación característica:

$$P(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

donde $a_0 > 0$. Escriba las condiciones de estabilidad.

A partir del caso general de la tabla de estabilidad de Jury dado en la tabla 4-1, puede construirse una tabla de estabilidad de Jury para el sistema de cuarto orden, tal y como se muestra en la tabla 4-2. La tabla ha sido modificada ligeramente en relación con la forma estándar y resulta conveniente para los cálculos de las b y de las c. El determinante incluido en la parte intermedia de cada renglón da el valor de b o de c escrito en el lado derecho del mismo renglón.

Las condiciones de estabilidad son las siguientes:

1. $|a_4| < a_0$
2. $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$
3. $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0, \qquad n = 4 = \text{par}$
4. $|b_3| > |b_0|$
   $|c_3| > |c_0|$

TABLA 4-2 TABLA DE ESTABILIDAD DE JURY PARA EL SISTEMA DE CUARTO ORDEN

Renglón	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
	$\begin{vmatrix} a_4 & & & & a_0 \\ a_0 & & & & a_4 \end{vmatrix}$					$= b_3$
	$\begin{vmatrix} a_4 & & & a_1 \\ a_0 & & & a_3 \end{vmatrix}$					$= b_2$
	$\begin{vmatrix} a_4 & & a_2 \\ a_0 & & a_2 \end{vmatrix}$					$= b_1$
1	$\begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$					$= b_0$
2						
	$\begin{vmatrix} b_3 & & & b_0 \\ b_0 & & & b_3 \end{vmatrix}$					$= c_2$
	$\begin{vmatrix} b_3 & & b_1 \\ b_0 & & b_2 \end{vmatrix}$					$= c_1$
3	$\begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$					$= c_0$
4						
5	c_2	c_1	c_0			

Debe hacerse notar que el valor de c_1 (o bien, tratándose de un sistema de orden n, el valor de q_1) no es utilizado en la prueba de estabilidad y, por lo tanto, el cálculo de c_1 (o q_1) puede omitirse.

Ejemplo 4-4

Examine la estabilidad de la ecuación característica siguiente:

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

Note que, para esta ecuación característica

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -1.2$$
$$a_2 = 0.07$$
$$a_3 = 0.3$$
$$a_4 = -0.08$$

Es claro que la primera condición $|a_4| < a_0$ se satisface. Examinemos la segunda condición en relación con la estabilidad:

$$P(1) = 1 - 1.2 + 0.07 + 0.3 - 0.08 = 0.09 > 0$$

La segunda condición también es satisfecha. La tercera condición de estabilidad se convierte en

$$P(-1) = 1 + 1.2 + 0.07 - 0.3 - 0.08 = 1.89 > 0, \qquad n = 4 = \text{par}$$

Por lo tanto, se satisface la tercera condición.

Ahora construiremos la tabla de estabilidad de Jury. A partir del ejemplo 4-3, calculamos los valores de b_3, b_2, b_1 y b_0 y de c_2 y de c_0. El resultado aparece en la tabla 4-3. (Aunque en la tabla aparece el valor de c_1, éste no es necesario en la prueba de estabilidad y, por lo tanto, no necesita ser calculado.) De esta tabla, obtenemos

$$|b_3| = 0.994 > 0.204 = |b_0|$$

$$|c_2| = 0.946 > 0.315 = |c_0|$$

Por lo tanto, se satisfacen ambos elementos de la cuarta condición dados en el ejemplo 4-3. Una vez satisfechas todas las condiciones de estabilidad, la ecuación característica dada es estable o, lo que es lo mismo, todas las raíces están dentro del círculo unitario en el plano z.

De hecho, la ecuación característica dada $P(z)$ puede ser factorizada como sigue:

$$P(z) = (z - 0.8)(z + 0.5)(z - 0.5)(z - 0.4)$$

Como era de esperarse, el resultado obtenido concuerda con el hecho de que todas las raíces están en el interior del círculo unitario en el plano z.

TABLA 4-3 TABLA DE ESTABILIDAD DE JURY PARA EL SISTEMA DEL EJEMPLO 4-4

Renglón	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
	$\begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix}$					$= b_3 = -0.994$
	$\begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix}$					$= b_2 = 1.176$
	$\begin{vmatrix} -0.08 & 0.07 \\ 1 & 0.07 \end{vmatrix}$					$= b_1 = -0.0756$
1	$\begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix}$					$= b_0 = -0.204$
2						
	$\begin{vmatrix} -0.994 & -0.204 \\ -0.204 & -0.994 \end{vmatrix}$					$= c_2 = 0.946$
	$\begin{vmatrix} -0.994 & -0.0756 \\ -0.204 & 1.176 \end{vmatrix}$					$= c_1 = -1.184$
3	$\begin{vmatrix} -0.994 & 1.176 \\ -0.204 & -0.0756 \end{vmatrix}$					$= c_0 = 0.315$
4						
5	0.946	−1.184	0.315			

Ejemplo 4-5

Examine la estabilidad de la ecuación característica dada por

$$P(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0$$

Primero identificamos los coeficientes:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -1.1$$
$$a_2 = -0.1$$
$$a_3 = 0.2$$

Las condiciones de estabilidad en la prueba de Jury para el sistema de tercer orden son las siguientes:

1. $|a_3| < a_0$
2. $P(1) > 0$
3. $P(-1) < 0, \quad n = 3 = \text{impar}$
4. $|b_2| > |b_0|$

La primera condición, $|a_3| < a_0$, claramente se satisface. Ahora examinemos la segunda condición de la prueba de estabilidad de Jury:

$$P(1) = 1 - 1.1 - 0.1 + 0.2 = 0$$

Esto indica que por lo menos una raíz está en $z = 1$. Por lo tanto, como máximo el sistema es críticamente estable. Las pruebas siguientes determinarán si el sistema es críticamente estable o es inestable. (Si la ecuación característica dada representa un sistema de control, la estabilidad crítica no es deseable. Llegado a este punto puede detenerse la prueba de estabilidad.)

La tercera condición de la prueba de Jury nos da

$$P(-1) = -1 - 1.1 + 0.1 + 0.2 = -1.8 < 0, \qquad n = 3 = \text{impar}$$

La tercera condición se satisface. Ahora veamos la cuarta condición de la prueba de Jury. Cálculos sencillos dan $b_2 = -0.96$ y $b_0 = -0.12$. De ahí

$$|b_2| > |b_0|$$

La cuarta condición de la prueba de Jury se satisface.

Del análisis anterior concluimos que la ecuación característica dada tiene una raíz en el círculo unitario ($z = 1$) y las otras dos raíces en el interior del círculo unitario en el plano z. Por lo tanto, el sistema es críticamente estable.

Ejemplo 4-6

Un sistema de control tiene la siguiente ecuación característica:

$$P(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0$$

Determine la estabilidad del sistema.

Primero identificamos los coeficientes:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -1.3$$
$$a_2 = -0.08$$
$$a_3 = 0.24$$

Es claro que se satisface la primera condición de estabilidad, $|a_3| < a_0$. A continuación, examinamos la condición segunda para estabilidad:

$$P(1) = 1 - 1.3 - 0.08 + 0.24 = -0.14 < 0$$

La prueba indica que la segunda condición de estabilidad es violada. El sistema es, por lo tanto, inestable. Podemos detener la prueba aquí.

Ejemplo 4-7

Consideremos el sistema de control con realimentación unitaria en tiempo discreto (con período de muestreo $T = 1$ segundo) cuya función de transferencia pulso en lazo abierto está dada por

$$G(z) = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}$$

Determine el rango de valores de la ganancia K para estabilidad, mediante la prueba de estabilidad de Jury.

La función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}$$

Por lo tanto, la ecuación característica para el sistema es

$$P(z) = z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K = 0$$

Dado que se trata de un sistema de segundo orden, las condiciones de estabilidad de Jury pueden escribirse como sigue:

1. $|a_2| < a_0$
2. $P(1) > 0$
3. $P(-1) > 0, \quad n = 2 = \text{par}$

Aplicaremos ahora la primera condición de estabilidad. En vista de que $a_2 = 0.3679 + 0.2642K$ y $a_0 = 1$, la primera condición de estabilidad se convierte en

$$|0.3679 + 0.2642K| < 1$$

es decir

$$2.3925 > K > -5.1775 \tag{4-6}$$

La segunda condición de estabilidad se convierte en

$$P(1) = 1 + (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K = 0.6321K > 0$$

lo que da

$$K > 0 \tag{4-7}$$

La tercera condición de estabilidad da

$$P(-1) = 1 - (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642K = 2.7358 - 0.1037K > 0$$

que resulta

$$26.382 > K \tag{4-8}$$

Para estabilidad, la constante de ganancia K debe satisfacer las desigualdades (4–6), (4–7) y (4–8). Por lo tanto,

$$2.3925 > K > 0$$

El rango de la constante de ganancia K para estabilidad está entre 0 y 2.3925.

Si la ganancia K se define igual a 2.3925, entonces el sistema se convierte en críticamente estable (lo que significa que en la salida existirán oscilaciones sostenidas). La frecuencia de las oscilaciones sostenidas puede determinarse, si se escribe 2.3925 en lugar de K en la ecuación característica y se investiga la ecuación resultante. Con $K = 2.3925$, la ecuación característica se convierte en

$$z^2 - 0.4877z + 1 = 0$$

Las raíces características están en $z = 0.2439 \pm j0.9698$. Si observamos que el período de muestreo $T = 1$ segundo, de la ecuación (4–2) tenemos

$$\omega_d = \frac{\omega_s}{2\pi} \angle z = \frac{2\pi}{2\pi} \angle z = \tan^{-1} \frac{0.9698}{0.2439} = 1.3244 \text{ rad/seg}$$

La frecuencia de las oscilaciones sostenidas es 1.3244 rad/seg.

Análisis de estabilidad mediante la transformación bilineal y el criterio de estabilidad de Routh. Otro método muy utilizado en el análisis de estabilidad de los sistemas de control en tiempo discreto es el uso de la transformación bilineal, junto con el criterio de estabilidad de Routh. El método requiere de la transformación del plano z a otro plano complejo, el plano w. Aquellos que estén familiarizados con el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz encontrarán el método sencillo y sin rodeos. Sin embargo, la cantidad de cálculo requerido es mucho mayor que en el criterio de estabilidad de Jury.

La transformación bilineal definida por

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

misma que, al ser resuelta en función de w, da

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}$$

hace corresponder el interior del círculo unitario del plano z con el semiplano izquierdo del plano w. Esto puede verse como sigue. Hagamos que la parte real de w sea σ y la parte imaginaria ω, de tal forma que

$$w = \sigma + j\omega$$

En vista de que el interior del círculo unitario en el plano z es

$$|z| = \left| \frac{w + 1}{w - 1} \right| = \left| \frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma + j\omega - 1} \right| < 1$$

es decir

$$\frac{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}{(\sigma - 1)^2 + \omega^2} < 1$$

obtenemos

$$(\sigma + 1)^2 + \omega^2 < (\sigma - 1)^2 + \omega^2$$

lo que da

$$\sigma < 0$$

Entonces, el interior del círculo unitario ($|z| < 1$) en el plano z corresponde al semiplano izquierdo del plano w. El círculo unitario en el plano z corresponde al eje imaginario en el plano w, y la parte externa del círculo unitario en el plano z corresponde al semiplano derecho del plano w. (Debe señalarse que, aunque el plano w es similar al plano s en que éste corresponde al interior del círculo unitario hacia el semiplano izquierdo, de ninguna manera es cuantitativamente equivalente al plano s. Por lo tanto, la estimación de la estabilidad relativa del sistema a partir de las localizaciones de los polos en el plano w es difícil.)

En el análisis de estabilidad, utilizando la transformación bilineal junto con el criterio de estabilidad de Routh, primero pondremos $(w + 1)/(w - 1)$ en lugar de z en la ecuación característica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

como sigue:

$$a_0\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n + a_1\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{w+1}{w-1} + a_n = 0$$

Entonces, si simplificamos las fracciones multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(w - 1)^n$, obtenemos:

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_{n-1} w + b_n = 0$$

Una vez que transformemos $P(z) = 0$ en $Q(w) = 0$, es posible aplicar el criterio de estabilidad de Routh de la misma forma que en los sistemas en tiempo continuo.

Debe hacerse notar que la transformación bilineal junto con el criterio de estabilidad de Routh indicará exactamente cuántas raíces de la ecuación característica están en el semiplano derecho del plano w, y cuántas sobre el eje imaginario. Sin embargo, en el diseño de sistema de control, la información relacionada con el número exacto de polos no estables por lo general no es necesaria, porque no se desean sistemas de control inestables o críticamente estables. Tal y como fue mencionado antes, la cantidad de cálculos que este método necesita es mucho mayor que la requerida en la prueba de estabilidad de Jury. Por lo tanto, seguiremos más adelante con este tema. Nos permitimos referir al lector al problema A-4-3, donde el método presente es utilizado para el análisis de estabilidad.

Unos cuantos comentarios sobre la estabilidad de sistemas de control en lazo cerrado

1. Si estamos interesados en el efecto de algún parámetro de sistema sobre la estabilidad de un sistema de control en lazo cerrado, podría resultar útil un diagrama del lugar geométrico de las raíces. Puede usarse MATLAB para calcular y graficar un diagrama del lugar geométrico de las raíces.
2. Debe notarse que, en la prueba de la estabilidad de una ecuación característica, pudiera resultar más simple, en algunos casos, determinar directamente las raíces de la ecuación característica mediante el uso de MATLAB.
3. Es importante observar que la estabilidad no tiene nada que ver con la habilidad de un sistema para seguir una entrada específica. La señal de error en un sistema de control en lazo cerrado puede aumentar sin límite, aun si el sistema es estable. (Vea la sección 4-4 en relación con un análisis de las constantes de los errores.)

4-4 ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA Y EN ESTADO PERMANENTE

La estabilidad absoluta es un requisito básico de todos los sistemas de control. Además, en cualquier sistema de control también se requiere de una buena estabilidad relativa y precisión en estado permanente, ya sea en tiempo continuo o en tiempo discreto.

En esta sección estudiaremos las características de las respuestas transitorias y en estado permanente de los sistemas de control en lazo cerrado. La respuesta transitoria corresponde a aquella parte de la respuesta debida a los polos del sistema en lazo cerrado y la respuesta en estado permanente corresponde a aquella parte de la respuesta debida a los polos de la función de entrada o excitación.

Con frecuencia los sistemas de control en tiempo discreto son analizados mediante entradas "estándar", como son entradas escalón, entradas rampa o entradas senoidales. Esto es debido a que la respuesta del sistema a una entrada arbitraria puede ser estimada a partir de su respuesta correspondiente a dichas entradas estándar. En esta sección, consideraremos la respuesta del sistema de control en tiempo discreto a entradas en el dominio del tiempo, como son entradas escalón.

Especificaciones de la respuesta transitoria. En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas de los sistemas de control, sean en tiempo continuo o en tiempo discreto, se especifican en términos de cantidades en el dominio de tiempo. Esto ocurre debido a que los sistemas con almacenamiento de energía no pueden responder en forma instantánea y siempre que estén sujetos a entradas o perturbaciones mostrarán algunas respuestas transitorias.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control están especificadas en términos de su respuesta transitoria a una entrada escalón unitario, ya que la entrada escalón unitario es fácil de generar y es lo suficientemente drástica para proporcionar información útil tanto de las características de la respuesta transitoria como de la respuesta en estado permanente del sistema.

La respuesta transitoria de un sistema a una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por comodidad, al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es común utilizar la condición inicial estándar: el sistema está inicialmente en reposo y la salida y todas sus derivadas con respecto al tiempo son cero. Las características de respuesta pueden entonces compararse sin dificultad.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico, donde la señal de salida es en tiempo continuo, a menudo muestra oscilaciones amortiguadas antes de llegar al estado permanente. (Esto es cierto para la mayoría de los sistemas de control en tiempo discreto o digitales, porque las plantas a controlarse en la mayor parte de los casos son en tiempo continuo y, por lo tanto, las señales de salida son en tiempo continuo.)

Considere, por ejemplo, el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-14. La salida

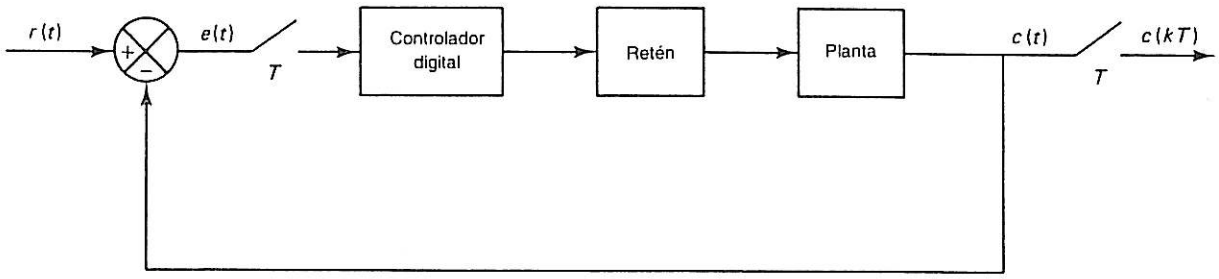
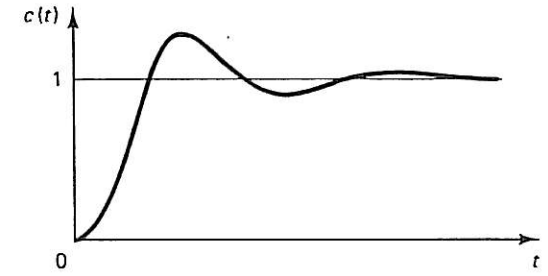
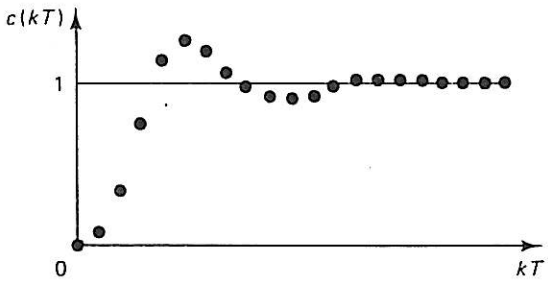


Figura 4-14 Un sistema de control digital.



a)



b)

Figura 4-15 *a*) Respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la figura 4-14; *b*) salida en tiempo discreto correspondiente a la respuesta escalón unitario.

$c(t)$ de un sistema como éste a una entrada escalón unitario puede mostrar oscilaciones amortiguadas, tal y como se muestra en la figura 4-15*a*). En la figura 4-15*b*) aparece la salida en tiempo discreto $c(kT)$.

Igual que en el caso de los sistemas de control en tiempo continuo, la respuesta transitoria de un sistema de control digital puede caracterizarse no sólo por el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural amortiguada, sino también por el tiempo de levantamiento, los sobrepasos máximos, el tiempo de asentamiento y así sucesivamente, en respuesta a una entrada escalón. De hecho, en la especificación de distintas características de la respuesta transitoria, es común especificar las cantidades siguientes:

ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

1. Tiempo de retardo t_d
2. Tiempo de levantamiento t_r
3. Tiempo pico t_p
4. Sobrepaso máximo M_p
5. Tiempo de asentamiento t_s

Las especificaciones de la respuesta transitoria antes mencionadas en la respuesta escalón unitario son definidas a continuación y aparecen en forma gráfica en la figura 4-16.

1. *Tiempo de retardo* t_d. El tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta llegue a la mitad del valor final la primera vez.

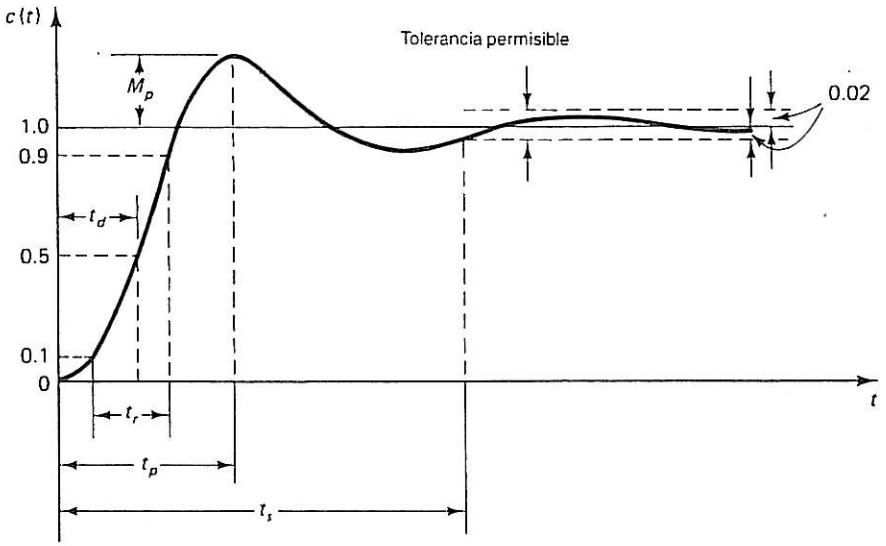


Figura 4-16 Curva de respuesta escalón unitario que muestra las especificaciones de respuesta transitorias t_d, t_r, t_p, M_p y t_s.

2. *Tiempo de levantamiento* t_r. El tiempo de levantamiento es el tiempo que requiere la respuesta para pasar de 10% hasta 90%, de 5% a 95% o de 0% a 100% de su valor final, según la situación. Para sistemas de segundo orden subamortiguados, por lo regular se utiliza el tiempo de levantamiento de 0% a 100%. Para sistemas sobreamortiguados y sistemas con atraso de transporte, comúnmente se utiliza el tiempo de levantamiento de 10% a 90%.
3. *Tiempo pico* t_p. El tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta llegue a la primera cresta del sobrepaso.
4. *Sobrepaso máximo* M_p. El sobrepaso máximo es el valor máximo de la curva de respuesta medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado permanente de la respuesta difiere de la unidad, entonces es común utilizar el sobrepaso porcentual máximo. Queda definido por la relación

$$\text{Sobrepaso máximo en porcentaje} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica en forma directa la estabilidad relativa del sistema.

5. *Tiempo de asentamiento* t_s. El tiempo de asentamiento es el tiempo requerido para que una curva de respuesta llegue y se quede dentro de un rango alrededor del valor final de un tamaño especificado, en función de un porcentaje absoluto de valor final, por lo general 2%. El tiempo de asentamiento está relacionado con la constante de tiempo de mayor valor en el sistema de control.

Las especificaciones en el dominio del tiempo que acabamos de dar son muy importantes, ya que la mayor parte de los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; esto es, deben mostrar respuestas aceptables en el tiempo. (Lo que significa que el sistema de control bajo diseño deberá ser modificado hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.)

No todas las especificaciones que acabamos de definir se aplican necesariamente a un caso

dado. Por ejemplo, en el caso de un sistema sobreamortiguado, no son aplicables los términos correspondientes al tiempo pico y el sobrepaso máximo. Por otra parte, algunas especificaciones pudieran incluirse: para aquellos sistemas que generan errores en estado permanente en caso de entradas escalón, el error deberá conservarse dentro de un nivel porcentual especificado. (Más adelante en esta sección se hará un análisis detallado de los errores en estado permanente.)

Supongamos que se satisface el teorema de muestreo y que no ocurre doblamiento de frecuencia. La naturaleza de la respuesta transitoria de un sistema de control en tiempo discreto a una entrada dada depende de las localizaciones reales de los polos y ceros en lazo cerrado en el plano z. Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{4-9}$$

donde $R(z)$ es la transformada z de la entrada y $C(z)$ es la trasformada z de la salida. Con MATLAB, es fácil obtener la respuesta transitoria de un sistema como éste, a entradas delta Kronecker, a entradas escalón, a entradas rampa, y así sucesivamente. Vea, por ejemplo, el ejemplo 4-8.

Ejemplo 4-8

Considére el sistema de control en tiempo discreto definido por

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607} \tag{4-10}$$

Obtenga la respuesta escalón unitario de este sistema.

En el programa MATLAB 4-1 aparece un programa MATLAB para obtener la respuesta escalón unitario. La gráfica resultante de $c(k)$ en función de k se muestra en la figura 4-17.

MATLAB Programa 4-1

```
% ------ Respuesta escalón unitario ------

num = [0   0.4673   -0.3393];
den = [1   -1.5327   0.6607];
r = ones(1,41);
v = [0   40   0   1.6];
axis(v);
k = 0: 40;
c = filter(num,den,r);
plot(k,c'o')
grid
title('Unit-Step ResponseÆ)
xlabel('k')
ylabel('c(k)')
```

Análisis de error en estado permanente. Una característica importante asociada con la respuesta transitoria es el error en estado permanente. El desempeño en estado permanente de un sistema de control estable se juzga en general por el error en estado permanente debido a entradas escalón, rampa y de aceleración. A continuación investigaremos un tipo de error en estado permanente que es causado por la incapacidad de un sistema para seguir tipos especiales de entradas. (Deberá notarse que, además de este tipo de error en estado permanente, existen errores que pueden ser atribuidos a otras causas, como imperfecciones en los componentes del sistema, fricción estática,

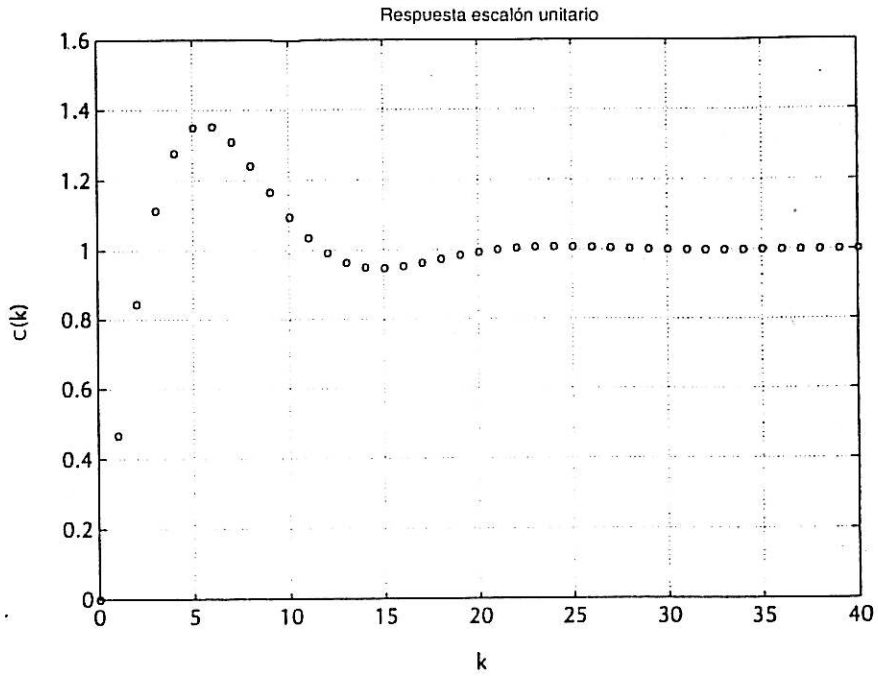


Figura 4-17 Respuesta escalón unitario del sistema definido por la ecuación (4-10).

zonas muertas, o el deterioro o edad de los componentes. En esta sección, sin embargo, no analizaremos errores en estado permanente debidos a estas causas.)

En forma inherente, cualquier sistema físico de control sufre de error en estado permanente en respuesta a ciertos tipos de entrada. Esto es, un sistema pudiera no tener ningún error en estado permanente a entradas escalón, pero el mismo sistema puede mostrar error en estado permanente distinto de cero en respuesta a entradas rampa. Dependerá del tipo de la función de transferencia en lazo abierto del sistema si un sistema dado muestra o no error en estado permanente en respuesta a un tipo dado de entrada.

Considere el sistema de control en tiempo continuo cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ está dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)}$$

El término s^N en el denominador representa un polo de multiplicidad N en el origen. Es costumbre clasificar el sistema de acuerdo con el número de integradores en la función de transferencia en lazo abierto.

Se dice que un sistema es de tipo 0, tipo 1, tipo 2, . . . , si $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, . . . , respectivamente. Los sistemas de tipo 0 mostrarán errores finitos en estado permanente en respuesta a entradas escalón y errores infinitos en respuesta a entradas rampa o de orden superior. Los sistemas de tipo 1 no mostrarán ningún error en estado permanente en respuesta a entradas escalón, errores finitos en estado permanente en respuesta a entradas rampa, y errores infinitos en estado permanente en respuesta a entradas de aceleración y de orden mayor. Conforme se incrementa el número de tipo, la precisión aumenta. Sin embargo, al incrementar el tipo, el problema de estabilidad se complica. Siempre será necesario un término medio entre la precisión en estado permanente y la estabilidad relativa (características de la respuesta transitoria).

Los conceptos de las constantes de error estático pueden extenderse al sistema de control en tiempo discreto, como se analiza a continuación.

Los sistemas de control en tiempo discreto pueden clasificarse según el número de polos en lazo abierto en $z = 1$. (Un polo en lazo abierto en $z = 1$ corresponde a un integrador en el lazo.) Suponga que la función de transferencia pulso en lazo abierto está dada por la ecuación

$$\text{Función de transferencia pulso en lazo abierto} = \frac{1}{(z-1)^N}\frac{B(z)}{A(z)}$$

donde $B(z)/A(z)$ no contiene ni polos ni ceros en $z = 1$. Entonces el sistema se puede clasificar como sistema de tipo 0, sistema de tipo 1 o sistema de tipo 2, según si $N = 0$, $N = 1$ o $N = 2$, respectivamente. El tipo de sistema define las características del sistema en estado permanente o la precisión en estado permanente.

El significado físico de las constantes de error estático para sistemas de control en tiempo discreto es el mismo que en los sistemas de control en tiempo continuo, excepto que el primero sólo transmite información en los instantes de muestreo.

Considere el sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 4-18. Suponemos que el sistema es estable, de tal forma que el teorema de valor final puede aplicarse para la determinación de los valores en estado permanente. Del diagrama tenemos el error de actuación

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

Consideraremos el error de actuación en estado permanente en los instantes de muestreo. Note que a partir del teorema del valor final tenemos

$$\lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})E(z)] \tag{4-11}$$

Para el sistema mostrado en la figura 4-18, definimos

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

y

$$GH(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)H(s)}{s}\right]$$

Entonces tenemos

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

y

$$E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z)E(z)$$

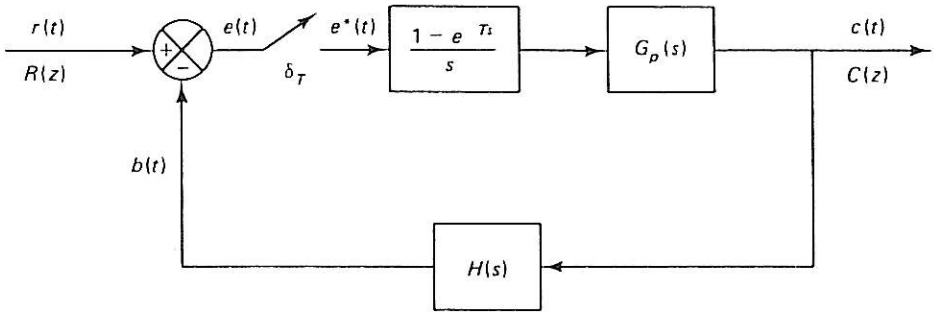


Figura 4-18 Sistema de control en tiempo discreto.

o

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \tag{4–12}$$

Al escribir la ecuación (4-12) en la ecuación (4-11) obtenemos

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \right] \tag{4-13}$$

Como en el caso del sistema de control en tiempo continuo, consideraremos tres tipos de entradas: escalón unitario, rampa unitaria y entradas de aceleración unitaria.

Constante de error de posición estática. Para una entrada escalón unitario $r(t) = 1(t)$, tenemos

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Si escribimos esta última ecuación en la ecuación (4-13), el error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada escalón unitario se puede obtener como sigue:

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1 + GH(z)}$$

Definimos la constante de error de posición estática K_p como sigue:

$$K_p = \lim_{z \to 1} GH(z) \tag{4-14}$$

Entonces el error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada escalón unitario puede obtenerse a partir de la ecuación

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \tag{4-15}$$

El error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada escalón unitario se convierte en cero si $K_p = \infty$, lo que requiere que $GH(z)$ tenga por lo menos un polo en $z = 1$.

Constante de error de velocidad estática. Para una entrada rampa unitaria $r(t) = t1(t)$, tenemos

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Al colocar esta última ecuación en la ecuación (4-13), tenemos

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \to 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})GH(z)}$$

Ahora definimos la constante de error de velocidad estática K_v como sigue:

$$K_v = \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})GH(z)}{T} \tag{4-16}$$

Entonces el error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada rampa unitaria puede ser dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \tag{4.17}$$

Si $K_v = \infty$, entonces el error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada rampa unitaria es cero. Esto requiere que $GH(z)$ posea un polo doble en $z = 1$.

Constante de error de aceleración estática. Para una entrada de aceleración unitaria $r(t) = \frac{1}{2}t^2 1(t)$, tenemos

$$R(z) = \frac{T^2(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}$$

Al escribir esta última ecuación en la ecuación (4-13), obtenemos

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1}\left[(1 - z^{-1})\frac{1}{1 + GH(z)}\frac{T^2(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}\right] = \lim_{z \to 1}\frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 GH(z)}$$

Definimos la constante de error de aceleración estática K_a como sigue:

$$K_a = \lim_{z \to 1}\frac{(1 - z^{-1})^2 GH(z)}{T^2} \tag{4-18}$$

Entonces el error de actuación en estado permanente se convierte en

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \tag{4-19}$$

El error de actuación en estado permanente en respuesta a una entrada de aceleración unitaria se convierte en cero si $K_a = \infty$. Esto requiere que $GH(z)$ posea un polo triple en $z = 1$.

Las ecuaciones (4-15), (4-17) y (4-19) dan las expresiones para los errores de actuación en estado permanente del sistema de control en tiempo discreto que aparece en la figura 4-18, en los instantes de muestreo para entradas escalón unitario, rampa unitaria y de aceleración unitaria, respectivamente.

Resumen. Es importante enfatizar que el error de actuación es la diferencia entre la entrada de referencia y la señal de realimentación, y no la diferencia entre la entrada de referencia y la salida. Del análisis anterior vemos que un sistema de tipo 0 mostrará un error de actuación en estado permanente constante, en respuesta a una entrada escalón y un error de actuación infinito, en respuesta a entradas rampa, de aceleración o de orden superior. Un sistema de tipo 1 mostrará un error de actuación en estado permanente cero de respuesta escalón, un error en estado permanente constante en respuesta a una entrada rampa y un error de actuación en estado permanente infinito en respuesta a entradas de aceleración o de orden superior.

TABLA 4-4 TIPOS DE SISTEMAS Y LOS ERRORES CORRESPONDIENTES AL ESTADO PERMANENTE EN RESPUESTA A ENTRADAS ESCALÓN, RAMPA Y ACELERACIÓN PARA EL SISTEMA DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA 4-18

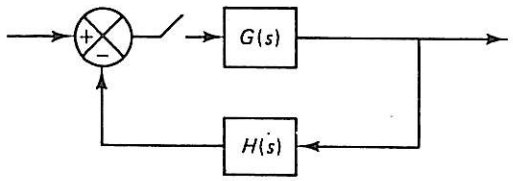
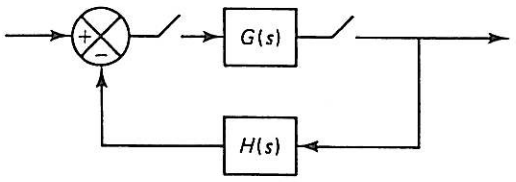
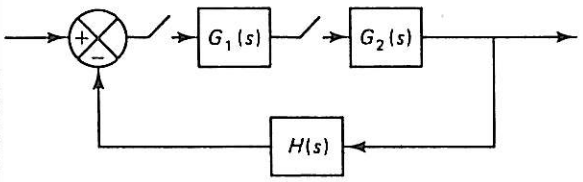
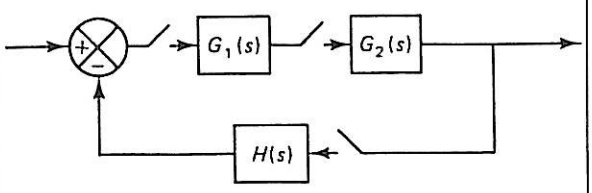
Sistema	Errores en estado permanente en respuesta a		
	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada de aceleración $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
Sistema de tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Sistema de tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

La tabla 4-4 lista los tipos de sistemas y los errores correspondientes al estado permanente, en respuesta a entradas escalón, rampa y de aceleración para el sistema de control en tiempo discreto de la configuración mostrada en la figura 4-18.

El análisis de error en estado permanente que acabamos de presentar es aplicable al sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado mostrado en la figura 4-18. Para una configuración distinta en lazo cerrado, debe hacerse notar que si el sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado tiene una función de transferencia pulso en lazo cerrado, entonces se pueden determinar las constantes de error estáticas mediante un análisis similar al que acaba de presentarse. La tabla 4-5 muestra las constantes de errores básicos para configuraciones en lazo cerrado típicas de sistemas de control en tiempo discreto. Si el sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado no tiene una función de transferencia pulso en lazo cerrado, sin embargo, las constantes de error estático no pueden definirse, porque la señal de entrada no puede separarse de la dinámica del sistema.

Es importante notar que los términos "error de posición", "error de velocidad" y "error de aceleración" significan desviaciones en estado permanente de la posición de salida. Un error de velocidad finito implica que después de que los transitorios hayan desaparecido, la entrada y la salida se mueven a la misma velocidad, pero tienen una diferencia finita de posición.

TABLA 4-5 CONSTANTES DE ERROR ESTÁTICO PARA CONFIGURACIONES EN LAZO CERRADO TÍPICAS DE SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO.

Configuración en lazo cerrado	Valores de K_p, K_v y K_a
	$K_p = \lim_{z\to 1} GH(z)$ $K_v = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})GH(z)}{T}$ $K_a = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 GH(z)}{T^2}$
	$K_p = \lim_{z\to 1} G(z)H(z)$ $K_v = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)H(z)}{T}$ $K_a = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)H(z)}{T^2}$
	$K_p = \lim_{z\to 1} G_1(z)HG_2(z)$ $K_v = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})G_1(z)HG_2(z)}{T}$ $K_a = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G_1(z)HG_2(z)}{T^2}$
	$K_p = \lim_{z\to 1} G_1(z)G_2(z)H(z)$ $K_v = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})G_1(z)G_2(z)H(z)}{T}$ $K_a = \lim_{z\to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G_1(z)G_2(z)H(z)}{T^2}$

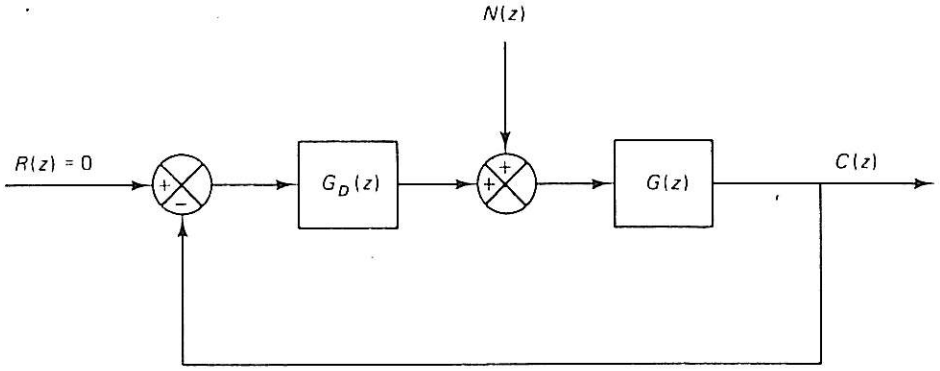
Respuesta a perturbaciones. Al examinar las características de respuesta transitoria y los errores en estado permanente, es importante observar que, además de los correspondientes a las entradas de referencia, deberán ser explorados los efectos de perturbaciones.

Para el sistema mostrado en la figura 14-19*a*), supongamos que la entrada de referencia es cero, es decir $R(z) = 0$, pero el sistema está sujeto a la perturbación $N(z)$. Para este caso, el diagrama de bloques del sistema puede volverse a dibujar como se muestra en la figura 4-19*b*). Entonces la respuesta $C(z)$ a la perturbación $N(z)$ puede encontrarse a partir de la función de transferencia pulso en lazo cerrado

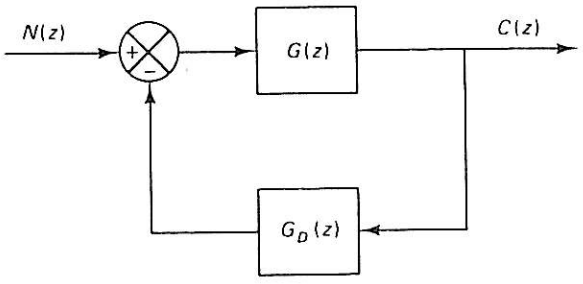
$$\frac{C(z)}{N(z)} = \frac{G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}$$

Si $|G_D(z)G(z)| >> 1$, entonces encontramos

$$\frac{C(z)}{N(z)} \cong \frac{1}{G_D(z)}$$



a)



b)

Figura 4-19 *a*) Sistema de control digital en lazo cerrado sujeto a una entrada de referencia y a una entrada de perturbación; *b*) diagrama de bloques modificado donde la entrada de perturbación se considera la entrada al sistema.

Dado que el error del sistema es

$$E(z) = R(z) - C(z) = -C(z)$$

encontramos que el error $E(z)$ debido a la perturbación $N(z)$ es

$$E(z) = -\frac{1}{G_D(z)}N(z)$$

Por lo tanto, mientras mayor sea la ganancia de $G_D(z)$ menor será el error de $E(z)$. Si $G_D(z)$ incluye un integrador [lo que significa que $G_D(z)$ tiene un polo de $z = 1$] entonces el error en estado permanente debido a una perturbación constante es cero. Esto se puede ver como sigue. Dado que para una perturbación constante de magnitud N tenemos

$$N(z) = \frac{N}{1 - z^{-1}}$$

si $G_D(z)$ implica un polo en $z = 1$ entonces puede ser escrito en la forma

$$G_D(z) = \frac{\hat{G}_D(z)}{z - 1} = \frac{\hat{G}_D(z)z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

donde $\hat{G}_D(z)$ no implica ningún cero en $z = 1$. Entonces el error en estado permanente puede estar dado por

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1})E(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1})\frac{-N(z)}{G_D(z)}\right]$$

$$= -\lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1})\frac{N}{1 - z^{-1}}\frac{1}{G_D(z)}\right] = -\lim_{z\to 1}\frac{(1 - z^{-1})N}{\hat{G}_D(z)z^{-1}} = 0$$

Si un sistema lineal está sujeto tanto a una entrada de referencia como a una entrada de perturbación, entonces el error resultante es la suma de los errores debidos a la entrada de referencia y a la entrada de perturbación. El error total deberá de conservarse dentro de límites aceptables.

Observe que el punto donde la perturbación entra en el sistema es muy importante en el ajuste de la ganancia de $G_D(z)G(z)$. Por ejemplo, considere el sistema mostrado en la figura 4-20*a*). La función de transferencia pulso en lazo cerrado para la perturbación es

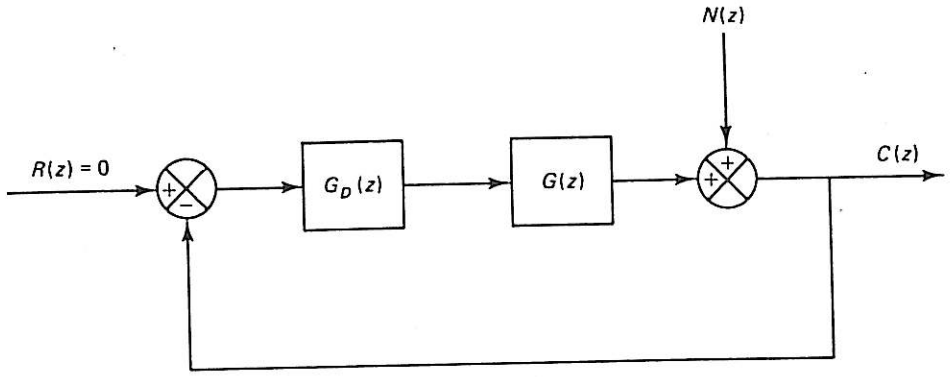
$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{1}{1 + G_D(z)G(z)}$$

A fin de minimizar los efectos de la perturbación $N(z)$ en el error del sistema $E(z)$, la ganancia de $G_D(z)G(z)$ debe hacerse lo más grande posible. Sin embargo, para el sistema mostrado en la figura 4-20*b*), la función de transferencia pulso en lazo cerrado para la perturbación es

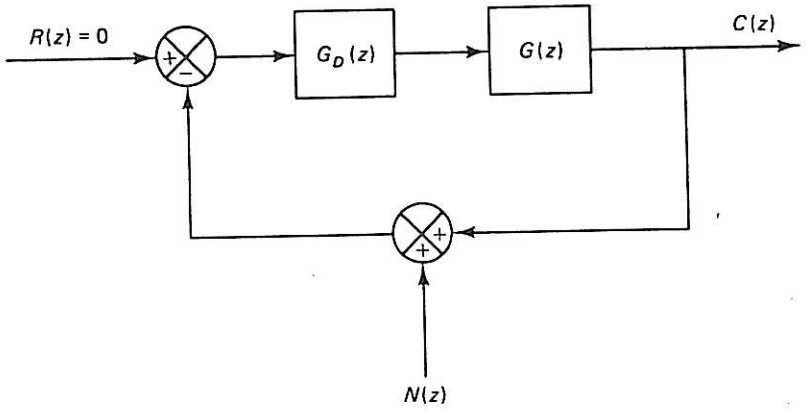
$$\frac{C(z)}{N(z)} = -\frac{E(z)}{N(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)}$$

y para minimizar los efectos de la perturbación $N(z)$ en el error de sistema $E(z)$, la ganancia de $G_D(z)G(z)$ debe hacerse tan pequeña como sea posible.

Por lo tanto, resulta ventajoso obtener la expresión para $E(z)/N(z)$ antes de concluir si la ganancia de $G_D(z)G(z)$ deberá ser grande o pequeña para minimizar el error debido a perturbaciones. Es importante recordar, sin embargo, que la magnitud de la ganancia no puede ser determinada sólo a partir de consideraciones de perturbación. Debe determinarse considerando las respuestas tanto de las entradas de referencia como de perturbación. Si las regiones de frecuencia para la entrada de



a)



b)

Figura 4-20 *a*) Sistema de control digital en lazo cerrado sujeto a la entrada de referencia y a la entrada de perturbación; *b*) sistema de control digital en lazo cerrado donde la perturbación entra al lazo de realimentación.

referencia y para la entrada de perturbación están suficientemente separadas, puede insertarse un filtro adecuado en el sistema. Si las regiones de frecuencia se superponen, deberá entonces modificarse la configuración del diagrama de bloques para obtener respuestas aceptables tanto a entradas de referencia como de perturbación.

4-5 DISEÑO BASADO EN EL MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Tal como se discutió en la sección 4-4, la estabilidad relativa del sistema de control en tiempo discreto puede ser investigada en relación con el círculo unitario en el plano z. Por ejemplo, si los polos en lazo cerrado son complejas conjugadas y ocurren dentro del círculo unitario, la respuesta escalón unitario será oscilatoria.

Además de las características de respuesta transitoria de un sistema dado, a menudo resulta necesario investigar los efectos de la ganancia del sistema o del período de muestreo del sistema sobre la estabilidad absoluta y relativa del sistema en lazo cerrado. Para estos fines, el método del lugar geométrico de las raíces es muy útil.

El método del lugar geométrico de las raíces desarrollado para sistemas en tiempo continuo puede ser extendido sin modificaciones a sistemas en tiempo discreto, excepto por que el límite de estabilidad queda modificado del eje $j\omega$ en el plano s al círculo unitario en el plano z. La razón por la cual el método del lugar geométrico de las raíces puede extenderse a sistemas en tiempo discreto es porque la ecuación característica correspondiente al sistema en tiempo discreto tiene la misma forma que la del sistema en tiempo continuo en el plano s. Por ejemplo, para el sistema mostrado en la figura 4-21 la ecuación característica es

$$1 + G(z)H(z) = 0$$

que es exactamente de la misma forma que la ecuación del análisis del lugar geométrico de las raíces en el plano s. Sin embargo, la localización de los polos para los sistemas en lazo cerrado en el plano z debe ser interpretada en forma distinta a la correspondiente en el plano s.

En esta sección demostraremos la aplicación del método del lugar geométrico de las raíces al diseño de sistemas de control en tiempo discreto o digitales.

Los programas de computadora para el cálculo y graficación de los lugares geométricos de las raíces están disponibles para la mayor parte de los sistemas de computación. En particular, MATLAB proporciona un medio conveniente para graficar el lugar geométrico de las raíces tanto para sistemas en lazo cerrado en tiempo continuo como en tiempo discreto. La gráfica exacta del lugar geométrico de las raíces se puede llevar a cabo en la computadora y, por lo tanto, quizás no necesitaremos de procedimientos de tipo gráfico. Sin embargo, es una ventaja tener cierta destreza en el graficado del lugar geométrico de las raíces, porque ello permitirá al ingeniero de control llevar a cabo gráficas rápidas para problemas específicos y así acelerar etapas preliminares del diseño del sistema. De hecho, un ingeniero de control experimentado a menudo utiliza el método del lugar geométrico de las raíces para un diseño preliminar, a fin de localizar los polos dominantes en lazo cerrado en las posiciones deseadas del plano z y a continuación utilizar simulación digital para mejorar el desempeño en lazo cerrado.

Condiciones de ángulo y magnitud. En muchos sistemas de control en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo, la ecuación característica puede tener cualquiera de las dos siguientes formas:

$$1 + G(z)H(z) = 0$$

y

$$1 + GH(z) = 0$$

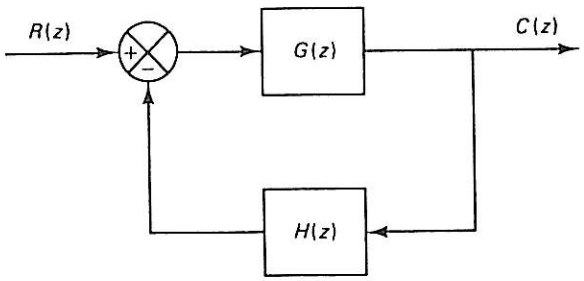


Figura 4-21 Sistema de control en lazo cerrado.

Para combinar estas dos formas en una, definamos la ecuación característica como

$$1 + F(z) = 0 \tag{4-20}$$

donde

$$F(z) = G(z)H(z) \qquad \text{o} \qquad F(z) = GH(z)$$

Observe que $F(z)$ es la función de transferencia pulso en lazo abierto. La ecuación característica dada por la ecuación (4-20) se puede escribir en la forma

$$F(z) = -1$$

Dado que $F(z)$ es una cantidad compleja, esta última ecuación se puede dividir en dos ecuaciones al igualar primero los ángulos y a continuación las magnitudes de ambos miembros para obtener

CONDICIÓN DE ÁNGULO:

$$\angle F(z) = \pm 180°(2k + 1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

CONDICIÓN DE MAGNITUD:

$$|F(z)| = 1$$

Los valores de z que satisfacen tanto las condiciones de ángulo como de magnitud son las raíces de la ecuación característica, es decir los polos en lazo cerrado.

Una gráfica de los puntos en el plano complejo que satisfacen solamente la condición de ángulo es el lugar geométrico de las raíces. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor dado de la ganancia pueden localizarse en el lugar geométrico de las raíces mediante la condición de magnitud. Los detalles de la aplicación de las condiciones de ángulo y de magnitud para obtener los polos en lazo cerrado se presentan a continuación.

Procedimiento general para construir el lugar geométrico de las raíces. Para un sistema complicado con muchos polos y ceros en lazo abierto, la construcción de una gráfica del lugar geométrico de las raíces pudiera parecer complicado, pero de hecho no es difícil si se aplican las reglas establecidas para la construcción de un lugar geométrico de las raíces.

Mediante la localización de puntos y asíntotas particulares y al calcular los ángulos de partida de los polos complejos y los ángulos de llegada a los ceros complejos, es posible construir el lugar geométrico de las raíces sin dificultad. Note que mientras el lugar geométrico de las raíces puede ser dibujado en forma conveniente mediante una computadora digital, si se intenta la elaboración manual de la gráfica del lugar geométrico de las raíces, esencialmente procederemos con base en prueba y error, pero el número de pruebas requeridas puede reducirse en gran medida si se utilizan las reglas establecidas.

Dado que los polos complejos conjugados en lazo abierto y los ceros complejos conjugados, de haber alguno, siempre estarán localizados simétricamente en relación con el eje real, los lugares geométricos de las raíces siempre serán simétricos respecto al eje real. Por lo tanto, sólo necesitamos construir la parte superior del lugar geométrico de las raíces y dibujar la imagen en espejo de la parte superior en la parte inferior del plano z. Recuerde que los ángulos de las cantidades complejas que se originan de los polos en lazo abierto y de los ceros en lazo abierto y dibujados al punto de prueba z se miden en dirección contraria a las manecillas del reloj. Presentaremos ahora las reglas generales y los procedimientos para la construcción del lugar geométrico de las raíces.

Reglas generales para la construcción de los lugares geométricos de la raíz

1. Obtenga la ecuación característica

$$1 + F(z) = 0$$

y a continuación reacomode esta ecuación de tal forma que el parámetro de interés como la ganancia K aparezca como factor multiplicador en la forma

$$1 + \frac{K(z + z_1)(z + z_2)\cdots(z + z_m)}{(z + p_1)(z + p_2)\cdots(z + p_n)} = 0$$

En el análisis presente, suponemos que el parámetro de interés es la ganancia K, donde $K > 0$. De la forma factorizada de la función de transferencia pulso en lazo abierto, localice los polos y ceros en lazo abierto en el plano z. [Note que si $F(z) = G(z)H(z)$, entonces los ceros en lazo abierto son ceros de $G(z)H(z)$ en tanto que los ceros en lazo cerrado están formados de los ceros de $G(z)$ y de los polos de $H(z)$.]

2. Determine los puntos de inicio y los puntos de terminación del lugar geométrico de las raíces. Encuentre también el número de ramas separadas del lugar geométrico de las raíces. Los puntos en el lugar geométrico de las raíces que corresponden a $K = 0$ son los polos en lazo abierto y aquellos que corresponden a $K = \infty$ son los ceros en lazo abierto. Por lo tanto, conforme K se incrementa desde 0 hasta ∞, un lugar geométrico de las raíces empieza a partir de un polo en lazo abierto y termina en un cero finito en lazo abierto o un cero en lazo abierto en el infinito. Esto significa que un trazo del lugar geométrico de las raíces tendrá exactamente tantas ramificaciones como existan raíces en la ecuación característica. [Si se cuentan los ceros en el infinito, $F(z)$ tiéne el mismo número de ceros que de polos.]

Si el número n de polos en lazo cerrado es el mismo número que el número de polos en lazo abierto, entonces el número de ramificaciones individuales del lugar geométrico de las raíces que terminan en ceros en lazo abierto finitos es igual al número m de ceros en lazo abierto. Las ramificaciones $n - m$ restantes terminan en el infinito (en los ceros implícitos $n - m$ en infinito) a lo largo de las asíntotas.

3. Determine el lugar geométrico de las raíces sobre el eje real. El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real se determina por los polos en lazo abierto y los ceros que quedan sobre él. Los polos y ceros complejos conjugados de la función de transferencia pulso en lazo abierto no tienen efecto en la localización del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real porque la contribución angular de los polos y ceros de un par de polos complejos conjugados es de 360° sobre el eje real. Cada parte del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real se extiende sobre un segmento desde un polo o cero hasta otro polo o cero.

Al construir el lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, escoja sobre él un punto de prueba. Si el número total de polos y ceros reales a la derecha de este punto de prueba es impar, entonces este punto cae sobre un lugar geométrico de las raíces. El lugar geométrico de las raíces y su complemento forman segmentos alternos a lo largo del eje real.

4. Determine las asíntotas del lugar geométrico de las raíces. Si el punto de prueba z está localizado lejos del origen, entonces los ángulos de todas las cantidades complejas pueden considerarse iguales. Entonces un cero en lazo abierto y un polo en lazo abierto cada uno cancela los efectos del otro.

Por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces para valores muy grandes de z debe ser asintótico a líneas rectas cuyos ángulos están dados como sigue:

$$\text{Ángulo de la asíntota} = \frac{\pm 180°(2N+1)}{n-m}, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

donde

n = número de polos finitos de $F(z)$

m = número de ceros finitos de $F(z)$

Aquí, $N = 0$ corresponde a la asíntota que forma el ángulo más pequeño con respecto al eje real. Aunque N supone un número infinito de valores, el ángulo se repite a sí mismo, conforme N aumenta, y el número de asíntotas diferentes es $n - m$.

Todas las asíntotas se cruzan en el eje real. El punto en el cual lo hacen se obtiene de la siguiente manera. Dado que

$$F(z) = \frac{K[z^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)z^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m]}{z^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)z^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n}$$

$$= \frac{K}{z^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]z^{n-m-1} + \cdots}$$

para un valor grande de z esta última ecuación se puede aproximar como sigue:

$$F(z) \doteq \frac{K}{\left[z + \dfrac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n - m}\right]^{n-m}}$$

Si la abscisa de la intersección de las asíntotas y del eje real se identifica como $-\sigma_a$, entonces

$$-\sigma_a = -\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n - m} \tag{4-21}$$

Debido a que todos los polos y ceros complejos se presentan en pares conjugados, $-\sigma_a$ dado por la ecuación (4-21) siempre es una cantidad real.

Una vez encontrada la intersección de las asíntotas con el eje real, las asíntotas se pueden dibujar de inmediato en el plano complejo z.

5. Encuentre los puntos de ruptura de salida y de ruptura de entrada. En vista de la simetría conjugada de los lugares geométricos de las raíces, los puntos de ruptura de salida y de ruptura de entrada se presentan o sobre el eje real o en pares complejos conjugados.

Si un lugar geométrico de las raíces se presenta entre dos polos adyacentes en lazo abierto sobre el eje real, entonces existirá por lo menos un punto de ruptura de salida entre ambos polos. En forma similar, si el lugar geométrico de las raíces se presenta entre dos ceros adyacentes (un cero pudiera estar localizado en $-\infty$) sobre el eje real, entonces siempre existirá por lo menos un punto de ruptura de entrada entre los dos ceros.

Si el lugar geométrico de las raíces se presenta entre un polo y un cero (finito o infinito) sobre el eje real, entonces pudieran no existir puntos ni de ruptura de salida ni de entrada o pudieran existir tanto puntos de ruptura de salida como de entrada.

Si la ecuación característica

$$1 + F(z) = 0$$

se escribe en la forma

$$1 + \frac{KB(z)}{A(z)} = 0$$

donde $KB(z)/A(z) = F(z)$, entonces

$$K = -\frac{A(z)}{B(z)} \tag{4-22}$$

y los puntos de ruptura de salida y de entrada (que corresponden a raíces múltiples) se pueden determinar a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B^2(z)} = 0 \tag{4-23}$$

donde el apóstrofo indica diferenciación respecto a z. (Vea el problema 4-5 para una prueba.)

Si el valor de K correspondiente a una raíz $z = z_0$ de $dK/dz = 0$ es positivo, el punto $z = z_0$ es un punto real de ruptura de salida o de entrada. Dado que se supone que K no es negativo y si el valor de K así obtenido es negativo, entonces el punto $z = z_0$ no es ni punto de ruptura de salida ni de entrada.

Observe que este método puede usarse cuando existen polos complejos o ceros complejos.

6. Determine el ángulo de salida (o el ángulo de llegada) del lugar geométrico de las raíces a partir de los polos complejos (o en los ceros complejos). Para dibujar el lugar geométrico de las raíces con una precisión razonable, debemos encontrar la dirección del lugar geométrico de las raíces cerca de los polos y de los ceros complejos. El ángulo de salida (o ángulo de llegada) del lugar geométrico de las raíces correspondiente a un polo complejo (o a un cero complejo), puede determinarse al sustraer de 180° la suma de todos los ángulos de líneas (cantidades complejas) correspondiente a todos los demás polos y ceros del polo complejo (o del cero complejo) en cuestión, si se incluyen los signos apropiados. El ángulo de salida se muestra en la figura 4-22.

7. Encuentre los puntos donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario. Los puntos donde el lugar geométrico de las raíces cruza el eje imaginario pueden determinarse definiendo $z = j\nu$ en la ecuación característica (lo que implica la ganancia K no determinada), e igualando tanto la parte real como la imaginaria con cero, y se resuelve en función de ν y de K. Los valores de ν y de K que así se encuentren darán la localización en la cual el lugar geométrico de las raíces cruza el eje imaginario y el valor de la ganancia correspondiente K, respectivamente.

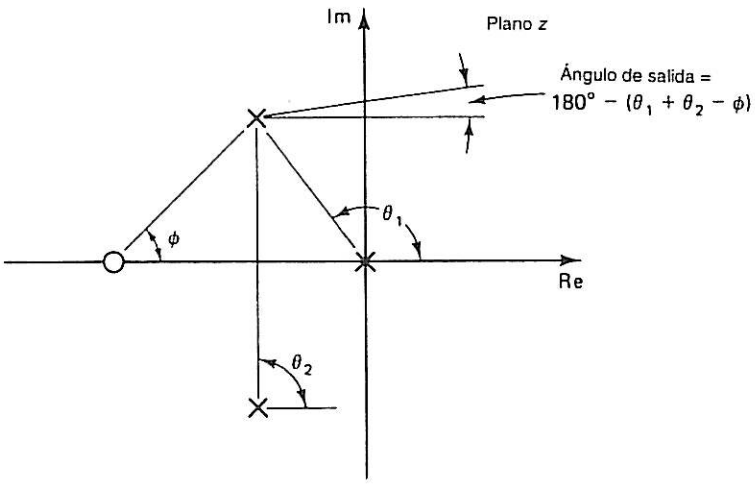


Figura 4-22 Diagrama que muestra el ángulo de salida.

8. Cualquier punto de los lugares geométricos de las raíces es un polo en lazo cerrado posible. Un punto determinado será un polo en lazo cerrado cuando el valor de la ganancia K satisfaga la condición de magnitud. Por otra parte, la condición de magnitud nos permite determinar el valor de la ganancia K en un lugar específico de las raíces dentro del lugar geométrico. La condición de magnitud es

$$|F(z)| = 1$$

es decir

$$\left| \frac{(z + z_1)(z + z_2) \cdots (z + z_m)}{(z + p_1)(z + p_2) \cdots (z + p_n)} \right| = \frac{1}{K} \tag{4-24}$$

Si la ganancia K de la función de transferencia pulso en lazo abierto está dada en el problema, entonces mediante la aplicación de la condición de magnitud, ecuación (4-24), es posible localizar los polos en lazo cerrado para una K dada en cada una de las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces mediante un método de prueba y error.

Cancelación de los polos de G(z) con los ceros de H(z). Es importante notar que si $F(z) = G(z)H(z)$ y el denominador de $G(z)$ y el numerador de $H(z)$ involucran factores comunes, entonces los polos y los ceros en lazo abierto correspondientes se cancelarán unos a los otros, si se reduce el grado de la ecuación característica en uno o más. La gráfica del lugar geométrico de las raíces de $G(z)H(z)$ no mostrará todas las raíces de la ecuación característica, sino sólo las raíces de la ecuación reducida.

A fin de obtener el conjunto completo de polos en lazo cerrado, deberemos añadir los polos cancelados o polos de $G(z)H(z)$ a aquellos polos en lazo cerrado obtenidos de la graficación del lugar geométrico de las raíces de $G(z)H(z)$. Es importante recordar que un polo cancelado de $G(z)H(z)$ es un polo del sistema en lazo cerrado.

Como ejemplo, veamos el caso donde $G(z)$ y $H(z)$ del sistema mostrado en la figura 4-21 están dados por

$$G(z) = \frac{z + c}{(z + a)(z + b)}$$

y

$$H(z) = \frac{z + a}{z + d}$$

Entonces, claramente el polo $z = -a$ de $G(z)$ y el cero $z = -a$ de $H(z)$ se cancelan uno al otro, lo que resulta en

$$G(z)H(z) = \frac{z + c}{(z + a)(z + b)} \frac{z + a}{z + d} = \frac{z + c}{(z + b)(z + d)}$$

Sin embargo, la función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{(z + c)(z + d)}{(z + a)[(z + b)(z + d) + z + c]}$$

y vemos que $z = -a$, el polo cancelado de $G(z)H(z)$, es un polo en lazo cerrado del sistema realimentado.

Observe, sin embargo, que si la cancelación de polos y ceros se presenta en la función de transferencia pulso de la trayectoria directa, entonces la misma cancelación de polos y ceros se presenta en la función de transferencia pulso en lazo cerrado. Considere otra vez el sistema mostrado en la figura 4-21 donde suponemos

$$G(z) = G_D(z)G_1(z), \qquad H(z) = 1$$

Suponga que ocurren cancelaciones de polos y ceros en $G_D(z)G_1(z)$. Por ejemplo, suponga

$$G_D(z)G_1(z) = \frac{z + b}{z + a}\frac{z + d}{(z + b)(z + c)} = \frac{z + d}{(z + a)(z + c)}$$

Entonces la función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G_1(z)}{1 + G_D(z)G_1(z)} = \frac{(z + b)(z + d)}{(z + b)[(z + a)(z + c) + z + d]}$$

$$= \frac{z + d}{(z + a)(z + c) + z + d}$$

En razón de la cancelación de polos y ceros, el sistema de tercer orden se convierte en uno de segundo orden.

Es importante concluir que el efecto de la cancelación de polos y ceros en $G(z)$ y $H(z)$ es distinto al de la cancelación de polos y ceros en la función de transferencia pulso de la trayectoria directa (como es la cancelación de polos y ceros en el controlador digital y en la planta). En el primero, el polo cancelado sigue siendo un polo del sistema en lazo cerrado, en tanto que en el último, los polos cancelados no aparecen como polos en el sistema en lazo cerrado (en este último el orden del sistema queda reducido por el número de polos cancelados).

Diagramas del lugar geométrico de las raíces de los sistemas de control digital. Ahora investigaremos los efectos de la ganancia K y del período de muestreo T sobre la estabilidad relativa del sistema de control en lazo cerrado. Veamos el sistema mostrado en la figura 4-23. Suponga que el controlador digital es del tipo integral, es decir que

$$G_D(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} = K\frac{z}{z - 1}$$

Dibujemos los diagramas del lugar geométrico de las raíces para el sistema, para tres valores del período de muestreo T: 0.5 seg, 1 seg y 2 seg. También determinemos el valor crítico de K en cada uno de los casos. Y, finalmente, localicemos los polos en lazo cerrado correspondientes a $K = 2$ para cada uno de los tres casos.

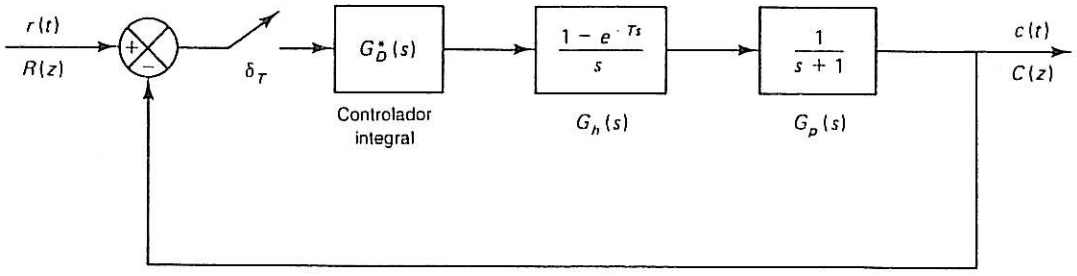


Figura 4-23 Sistema de control digital.

Primero obtenemos la transformada z de $G_h(s)G_p(s)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[G_h(s)G_p(s)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}\right) \\ &= \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}\end{aligned}$$

La función de transferencia pulso de la trayectoria directa se convierte en

$$G(z) = G_D(z)\mathcal{Z}[G_h(s)G_p(s)] = \frac{Kz}{z-1}\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \tag{4-25}$$

La ecuación característica es

$$1 + G(z) = 0$$

es decir

$$1 + \frac{Kz(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} = 0 \tag{4-26}$$

1. *Período de muestreo $T = 0.5$ seg:* para este caso, la ecuación (4-25) se convierte en

$$G(z) = \frac{0.3935Kz}{(z-1)(z - 0.6065)}$$

Observe que $G(z)$ tiene polos en $z = 1$ y en $z = 0.6065$ y un cero en $z = 0$.

Para dibujar un diagrama del lugar geométrico de las raíces, primero localizaremos los polos y el cero sobre el plano z y a continuación encontraremos el punto de ruptura de salida y el de entrada. Note que esta función de transferencia pulso en lazo abierto con dos polos y un cero da como resultado un lugar geométrico de las raíces circular con centro en el cero. El punto de ruptura de salida y el punto de ruptura de entrada se determinan escribiendo la ecuación característica en la forma de la ecuación (4-22),

$$K = -\frac{(z-1)(z - 0.6065)}{0.3935z} \tag{4-27}$$

y diferencia K con respecto a z igualando el resultado con cero:

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{z^2 - 0.6065}{0.3935z^2} = 0$$

De ahí,

$$z^2 = 0.6065$$

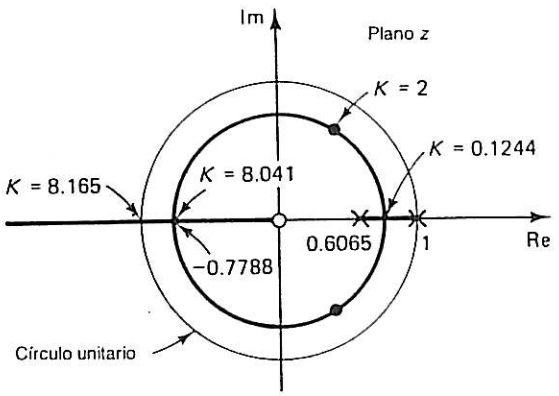
es decir,

$$z = 0.7788 \qquad \text{y} \qquad z = -0.7788$$

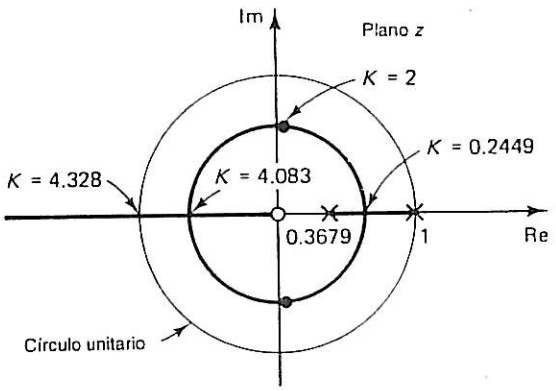
Observe que la sustitución de z por 0.7788 en la ecuación (4-27) da un valor de $K = 0.1244$, en tanto que si se supone que $z = -0.7788$ da un valor de $K = 8.041$. Dado que ambos valores de K son positivos, $z = 0.7788$ resulta el punto de ruptura de salida real y $z = -0.7788$ es el punto de ruptura de entrada real.

La figura 4-24*a*) muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces cuando $T = 0.5$ seg. El valor crítico de ganancia K para este caso se obtiene mediante la condición de magnitud, que se puede obtener a partir de la ecuación (4-26) como sigue:

a)



b)



c)

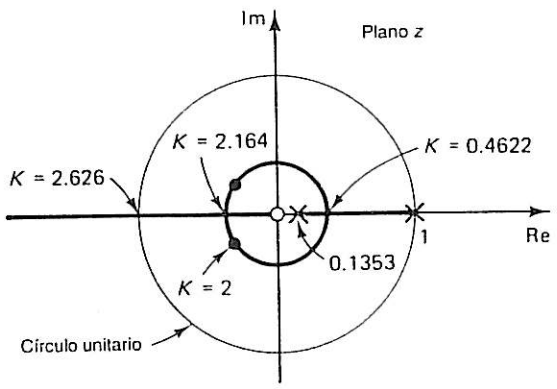


Figura 4-24 *a*) Diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema mostrado en la figura 4-23 cuando $T = 0.5$ seg; *b*) diagrama del lugar geométrico de las raíces cuando $T = 1$ seg; *c*) diagrama del lugar geométrico de las raíces cuando $T = 2$ seg.

$$\left| \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})} \right| = \frac{1}{K}$$

Para el caso presente, $T = 0.5$ y esta última ecuación se convierte en

$$\left| \frac{0.3935z}{(z - 1)(z - 0.6065)} \right| = \frac{1}{K} \tag{4-28}$$

En vista de que la ganancia crítica K_c corresponde al punto $z = z - 1$, sustituimos z por -1 en la ecuación (4-28):

$$\left| \frac{0.3935(-1)}{(-2)(-1.6065)} \right| = \frac{1}{K}$$

es decir

$$K = 8.165$$

La ganancia crítica K_c es por lo tanto 8.165.

Los polos en lazo cerrado que corresponden a $K = 2$ se pueden determinar como

$$z_1 = 0.4098 + j0.6623 \qquad \text{y} \qquad z_2 = 0.4098 - j0.6623$$

Estos polos en lazo cerrado quedan indicados por puntos en el diagrama del lugar geométrico de las raíces.

2. *Período de muestreo $T = 1$ seg:* para este caso, la ecuación (4-25) se convierte en:

$$G(z) = \frac{0.6321Kz}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

Por lo tanto, $G(z)$ tiene polos en $z = 1$ y en $z = 0.3679$ y un cero en $z = 0$.

Se llega a la conclusión de que el punto de ruptura de salida y el punto de ruptura de entrada son $z = 0.6065$ y $z = -0.6065$, respectivamente. Los valores correspondientes de ganancia son $K = 0.2449$ y $K = 4.083$, respectivamente.

En la figura 4-24*b*) se muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces cuando $T = 1$ seg. El valor crítico de la ganancia K es 4.328. Los polos en lazo cerrado correspondientes a $K = 2$ se determinan del siguiente valor

$$z_1 = 0.05185 + j0.6043 \qquad \text{y} \qquad z_2 = 0.05185 - j0.6043$$

y se muestran en el diagrama del lugar geométrico de las raíces mediante puntos.

3. *Período de muestreo $T = 2$ seg:* para este caso, la ecuación (4-25) se convierte en

$$G(z) = \frac{0.8647Kz}{(z - 1)(z - 0.1353)}$$

Vemos que $G(z)$ tiene polos en $z = 1$ y en $z = 0.1353$ y un cero en $z = 0$.

El punto de ruptura de salida y el punto de ruptura de entrada se encuentran en $z = 0.3678$ y en $z = -0.3678$, con valores de ganancia correspondientes $K = 0.4622$ y $K = 2.164$ respectivamente. El valor crítico de ganancia K para este caso es 2.626.

La figura 4-24*c*) muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces cuando $T = 2$ seg. Los polos en lazo cerrado correspondientes a $K = 2$ son

$$z_1 = 0.2971 + j0.2169 \qquad \text{y} \qquad z_2 = -0.2971 - j0.2169$$

Estos polos en lazo cerrado se muestran en forma de puntos en el diagrama del lugar geométrico de las raíces.

Efectos del período de muestreo T sobre las características de la respuesta transitoria. Las características de la respuesta transitoria del sistema de control en tiempo discreto dependen del período de muestreo T. Un período de muestreo grande tiene efectos dañinos o detrimentales sobre la estabilidad relativa del sistema. Una regla práctica es muestrear de ocho a diez veces durante un ciclo de las oscilaciones senoidales amortiguadas de la salida del sistema en lazo cerrado, si es que éste está subamortiguado. Para sistemas sobreamortiguados, pruebe de ocho a diez veces durante el tiempo de levantamiento de la respuesta escalón.

Como se ha visto en los análisis precedentes, para un valor dado de ganancia K, aumentar el período de muestreo T hará que el sistema de control en tiempo discreto sea menos estable y que eventualmente se convierta en inestable. De manera alternativa, al reducir el período de muestreo T se permite que el valor crítico de la ganancia K respecto a la estabilidad sea mayor. De hecho, reducir el período de muestreo más y más tiende a hacer que el sistema se comporte muy parecido a un sistema en tiempo continuo. (Para un sistema de control de segundo orden en tiempo continuo, la ganancia crítica para la estabilidad es infinita, es decir, $K = \infty$.)

Para el sistema mostrado en la figura 4-23, el factor de amortiguamiento relativo ζ para los polos en lazo cerrado para $K = 2$ para cada uno de los tres casos anteriores puede determinarse a partir de la figura 4-25. Gráficamente, los factores de amortiguamiento relativo para los polos en lazo cerrado correspondientes a $T = 0.5$, $T = 1$ y $T = 2$ se determinan en forma aproximada como $\zeta = 0.24$, $\zeta = 0.32$ y $\zeta = 0.37$, respectivamente.

El factor de amortiguamiento relativo ζ de un polo en lazo cerrado se puede determinar en forma analítica a partir de la localización del polo en lazo cerrado en el plano z. Si el factor de amortiguamiento relativo de un polo en lazo cerrado es ζ, entonces en el plano s la localización del polo en lazo cerrado (en la parte superior) puede darse mediante

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Dado que $z = e^{Ts}$, el punto correspondiente en el plano z es

$$z = \exp[T(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})]$$

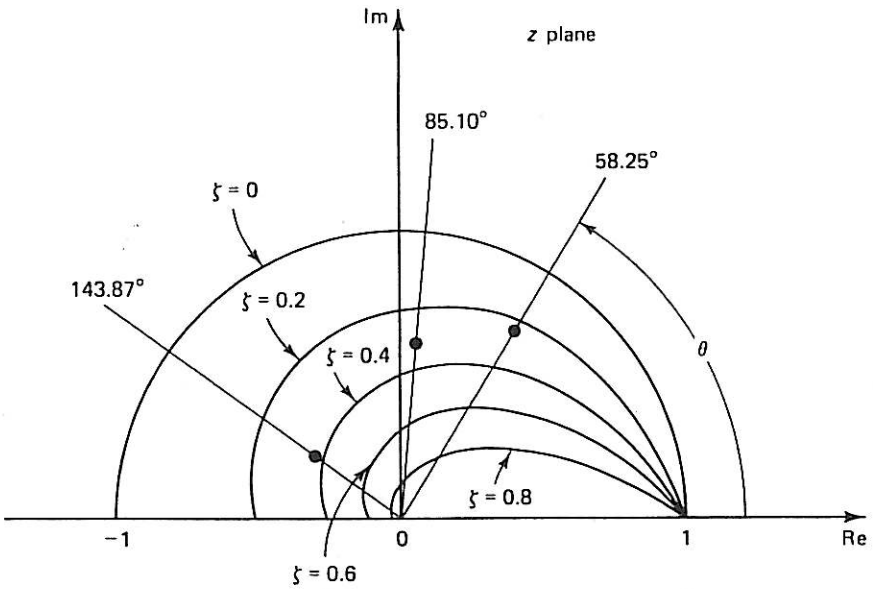


Figura 4-25 Localizaciones de los polos en lazo cerrado en los planos z mostrados con lugares geométricos de ζ constante.

del cual obtenemos

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} \tag{4-29}$$

y

$$\angle z = T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = T\omega_d = \theta \text{ (rad)} \tag{4-30}$$

De las ecuaciones (4-29) y (4-30) se puede calcular el valor de z. Por ejemplo, en el caso en que el período de muestreo T es de 0.5 segundos, tenemos el polo en lazo cerrado para $K = 2$ en $z = 0.4098 + j0.6623$. Por lo tanto,

$$|z| = \sqrt{0.4098^2 + 0.6623^2} = 0.7788$$

Resolviendo

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} = 0.7788$$

para el exponente encontramos

$$T\zeta\omega_n = 0.25 \tag{4-31}$$

También,

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{0.6623}{0.4098} = 58.25° = 1.0167 \text{ rad}$$

Por lo tanto,

$$\angle z = T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.0167 \text{ rad} \tag{4-32}$$

De las ecuaciones (4-31) y (4-32), obtenemos

$$\frac{T\zeta\omega_n}{T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{0.25}{1.0167}$$

es decir,

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.2459$$

lo que nos da

$$\zeta = 0.2388$$

(De la figura 4-25 obtuvimos en forma gráfica 0.24 para ζ, lo cual es muy cercano al valor real ζ de 0.2388.)

Es importante notar que en un sistema de segundo orden el factor de amortiguamiento relativo ζ es indicador de la estabilidad relativa (por ejemplo, en relación con el sobrepaso máximo en respuesta a un escalón unitario) sólo si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta (de tal forma que existan de ocho a diez muestras en un ciclo de oscilación). Si una frecuencia de muestreo no es lo suficientemente alta, el sobrepaso máximo de la respuesta escalón unitario será mucho mayor de lo que podría predecirse por el factor de amortiguamiento relativo ζ.

Para comparar los efectos de los distintos períodos de muestreo T sobre la respuesta transitoria, compararemos las frecuencias de respuestas escalón unitario correspondientes a los tres valores de T tomados en cuenta en el análisis precedente.

La función de transferencia pulso en lazo cerrado para el sistema de la figura 4-23, cuya función de transferencia pulso de la trayectoria directa $G(z)$ está dada por la ecuación (4-25), es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{Kz(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T}) + Kz(1 - e^{-T})}$$

Para $T = 0.5$ seg y $K = 2$, la respuesta escalón unitario puede estar dada por

$$C(z) = \frac{0.3935 \times 2z}{(z - 1)(z - 0.6065) + 0.3935 \times 2z} R(z)$$

$$= \frac{0.7870z^{-1}}{1 - 0.8195z^{-1} + 0.6065z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

de la cual obtenemos la secuencia de respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT como se muestra en la figura 4-26*a*).

De la figura 4-25 vemos que el ángulo θ de la línea que conecta el origen y el polo dominante en lazo cerrado en $z = 0.4098 + j0.6623$ (esta línea es una línea ω constante en el plano s) es de alrededor de 58.25°. El ángulo θ de los polos dominantes en lazo cerrado determina el número de muestras por ciclo de oscilación senoidal. Observe que

$$\cos \theta k = \cos \theta \left(k + \frac{360°}{\theta} \right)$$

Por lo tanto, para el caso en que $\theta = 58.25°$, tenemos que $360°/\theta = 360°/58.25° = 6.18$ muestras por ciclo de oscilación amortiguada, como se ve en la figura 4-26*a*).

Similarmente, en el caso en que $T = 1$ seg y $K = 2$, la respuesta escalón unitario está dada por

$$C(z) = \frac{1.2642z^{-1}}{1 - 0.1037z^{-1} + 0.3679z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La secuencia de respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT aparece en la figura 4-26*b*). Dado que el ángulo en la línea que conecta el origen y el polo en lazo cerrado en este caso es 85.10°, como se muestra en la figura 4-25, tenemos aproximadamente $360°/85.10° = 4.23$ muestras por ciclo, lo que es mucho menos de lo que por lo regular recomendaríamos. (Recomendamos 8 o más muestras por ciclo de oscilación de la senoidal amortiguada.)

Por último, en el caso de $T = 2$ seg y $K = 2$, la respuesta escalón unitario está dada por

$$C(z) = \frac{1.7294z^{-1}}{1 + 0.5941z^{-1} + 0.1353z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La secuencia de respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT aparece en la figura 4-26*c*). De la figura 4-25, el ángulo de la línea que conecta el origen y el polo en lazo cerrado para este caso es 143.87° y en consecuencia tenemos que $360°/143.87° = 2.50$ muestras por ciclo, como se ve en la figura 4-26*c*). (Adviértase que una frecuencia de muestreo lenta como son 2.50 muestras por ciclo no es aceptable.)

En la figura 4-26 se han mostrado tres gráficas distintas de la respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT. Como se puede observar de estas gráficas, si el período de muestreo es pequeño, una gráfica de $c(kT)$ en función de kT dará una imagen bastante precisa de la respuesta $c(t)$. Sin embargo, si el período de muestreo no es lo suficientemente pequeño, entonces la gráfica de $c(kT)$ en función de kT no representará un resultado preciso. Es muy importante seleccionar un período de muestreo adecuado basado en la satisfacción del teorema de muestreo, de la dinámica del sistema y

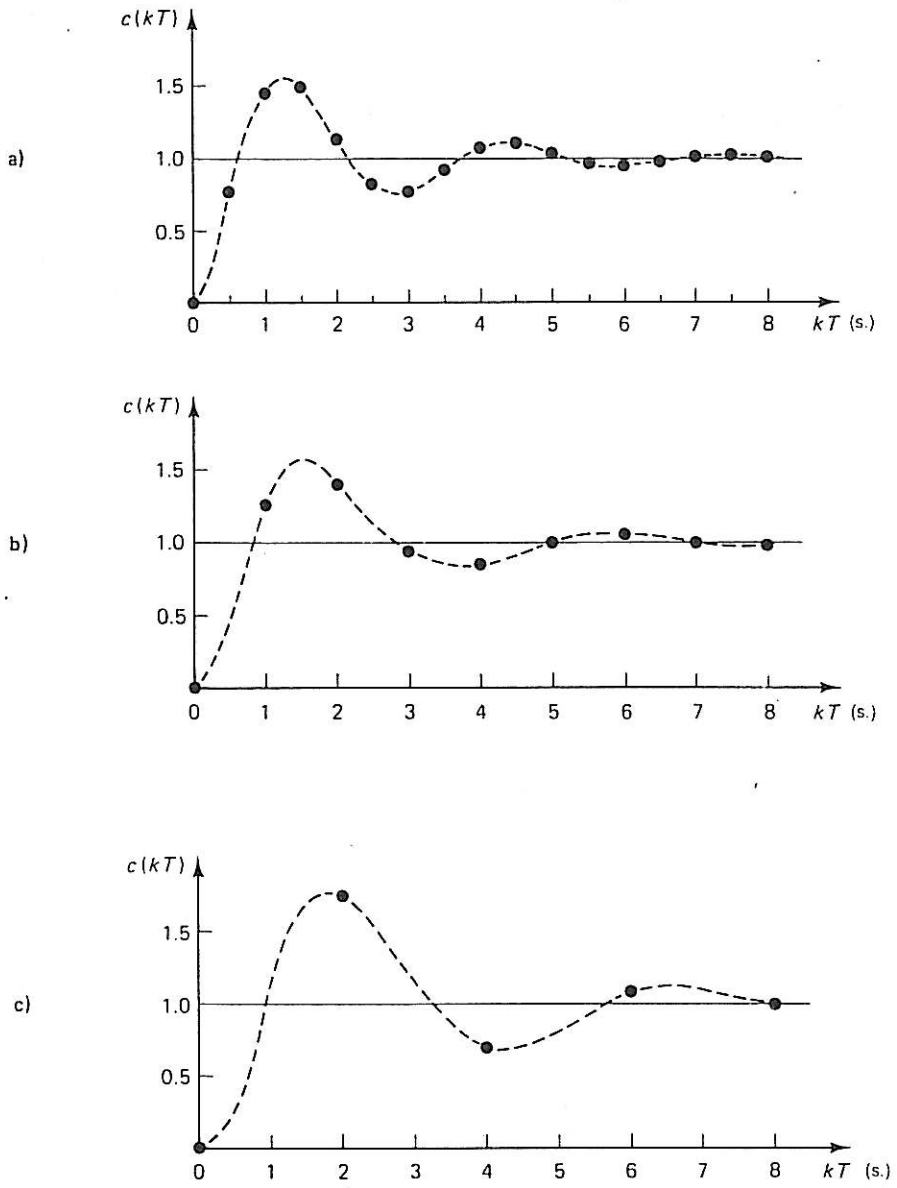


Figura 4-26 *a*) Secuencia de la respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la figura 4-23 cuando $T = 0.5$ seg y $K = 2$; *b*) secuencia de la respuesta escalón unitario cuando $T = 1$ seg y $K = 2$; *c*) secuencia de la respuesta escalón unitario cuando $T = 2$ seg y $K = 2$.

de las consideraciones reales del equipo. Note que la simple satisfacción del teorema de muestreo no es suficiente. Una regla práctica aceptable es de ocho a diez muestras por ciclo (seis muestras por ciclo es marginal) si el sistema es subamortiguado y muestra oscilaciones en la respuesta.

A continuación, analicemos el efecto del período de muestreo T sobre la exactitud en estado permanente. Veremos la respuesta rampa unitaria para cada uno de los tres casos.

Para el caso en que el período de muestreo T es 0.5 seg y la ganancia K es 2, la función de transferencia pulso en lazo abierto es

$$G(z) = \frac{0.7870z}{(z - 1)(z - 0.6065)}$$

y la constante de error de velocidad estática K_v está dada por

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} \\ &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{z - 1}{0.5z} \frac{0.7870z}{(z - 1)(z - 0.6065)} \right] \\ &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el error en estado permanente en respuesta a una entrada rampa unitaria es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{4} = 0.25$$

De igual manera, para el caso en que $T = 1$ seg y $K = 2$, la función de transferencia pulso en lazo abierto es

$$G(z) = \frac{1.2642z}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

la constante de error de velocidad estática K_v está dado por

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} \\ &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{z - 1}{z} \frac{1.2642z}{(z - 1)(z - 0.3679)} \right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

y el error en estado permanente en respuesta a una entrada rampa unitaria es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Finalmente, en el caso donde $T = 2$ seg y $K = 2$, la función de transferencia pulso en lazo abierto es

$$G(z) = \frac{1.7294z}{(z - 1)(z - 0.1353)}$$

y la constante de error de velocidad estática K_v y el error en estado permanente en respuesta a una entrada rampa unitaria se obtienen, respectivamente, en la forma

$$K_v = 1$$

y

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1$$

Las partes *a*), *b*) y *c*) de la figura 4-27 muestran, en forma respectiva, las gráficas de la secuencia de la respuesta rampa unitaria $c(kT)$ en función de kT para los tres casos en consideración.

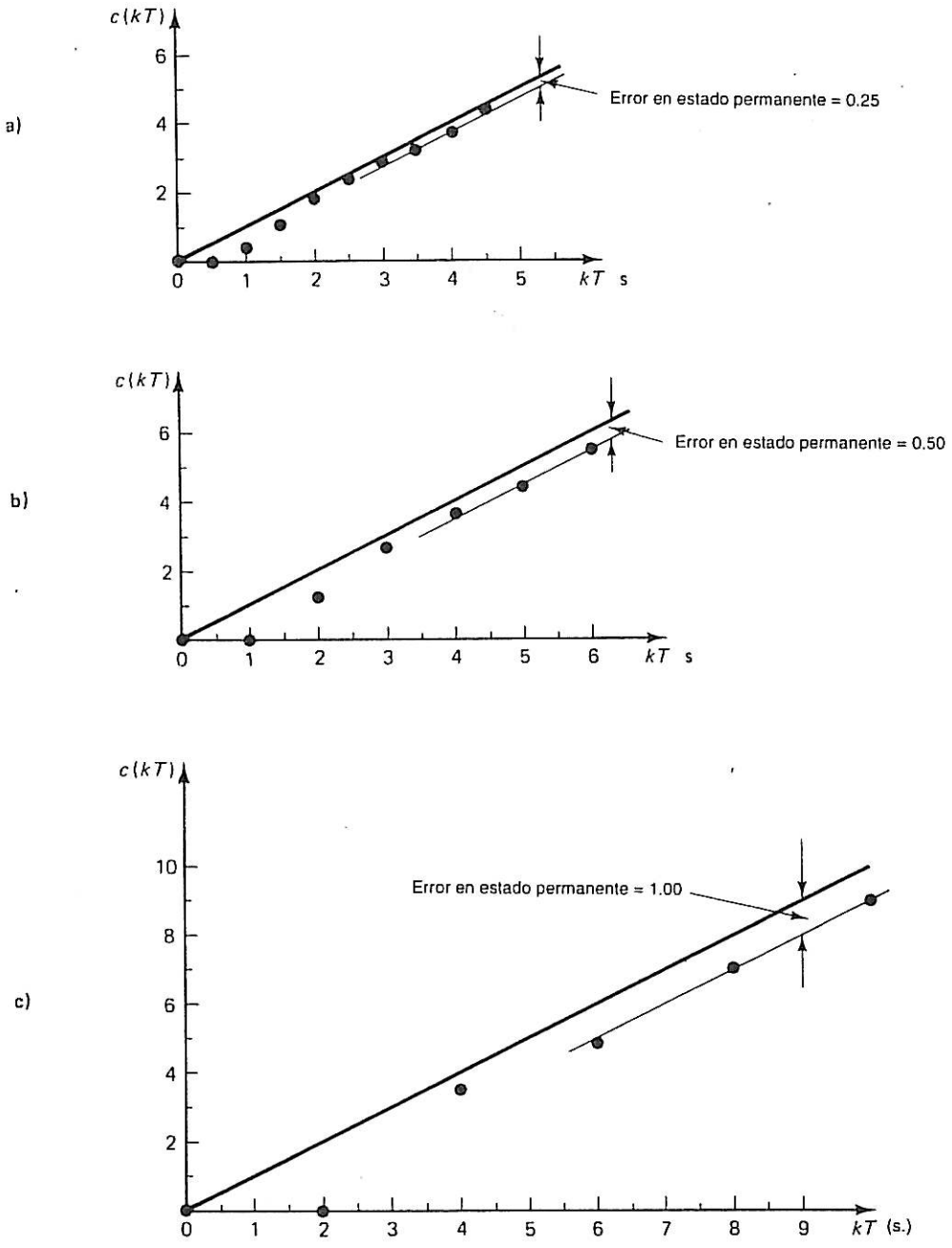


Figura 4-27 *a*) Secuencia de la respuesta rampa unitaria del sistema mostrado en la figura 4-23 cuando $T = 0.5$ seg y $K = 2$; *b*) secuencia de la respuesta rampa unitaria cuando $T = 1$ seg y $K = 2$; *c*) secuencia de la respuesta rampa unitaria cuando $T = 2$ seg y $K = 2$.

Los tres casos que hemos visto demuestran que al aumentar el período de muestreo T se afecta en forma adversa la estabilidad relativa del sistema. (Incluso puede en algunos casos causar inestabilidad.) Es importante recordar que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo cerrado del sistema de control digital indica la estabilidad relativa sólo si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta (es decir, de ocho o más muestras por ciclo de oscilación de la senoidal amortiguada). Si la frecuencia de muestreo es baja (es decir, de menos de seis muestras por ciclo de

oscilación de la senoidal amortiguada), entonces predecir la estabilidad relativa a partir del valor del factor de amortiguamiento relativo resultará erróneo.

Ejemplo 4-9

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-28. En el plano z, diseñe un controlador digital de tal forma que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.5 y un tiempo de asentamiento de 2 seg. El período de muestreo se supone en 0.2 seg, es decir, $T = 0.2$. Obtenga la respuesta del sistema de control digital diseñado a una entrada escalón unitario. También obtenga la constante de error de velocidad estática K_v del sistema.

Para el sistema de segundo orden estándar con un par de polos dominantes en lazo cerrado, el tiempo de asentamiento de 2 seg significa que

$$\text{tiempo de asentamiento} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5\omega_n} = 2$$

lo que da el valor de la frecuencia natural no amortiguada ω_n de los polos dominantes en lazo cerrado como

$$\omega_n = 4$$

La frecuencia natural amortiguada ω_d se determina como

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 4\sqrt{1 - 0.5^2} = 3.464$$

En vista de que el período de muestreo T es 0.2 seg, tenemos

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi = 31.42$$

[Note que existen aproximadamente nueve muestras por cada ciclo de oscilación amortiguada (31.42/3.464 = 9.07). Por lo tanto, es satisfactorio el período de muestreo de 0.2 seg.]

Primero localizaremos los polos dominantes en lazo cerrado deseados en el plano z. Refiriéndonos a las ecuaciones (4-29) y (4-30), para un lugar geométrico de los factores de amortiguamiento relativo constante, tenemos

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

y

$$\angle z = T\omega_d = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

De las especificaciones dadas ($\zeta = 0.5$ y $\omega_d = 3.464$), la magnitud y el ángulo del polo dominante en lazo cerrado en la parte superior del plano z se determinan como sigue:

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi \times 0.5}{\sqrt{1 - 0.5^2}}\frac{3.464}{31.42}\right) = e^{-0.400} = 0.6703$$

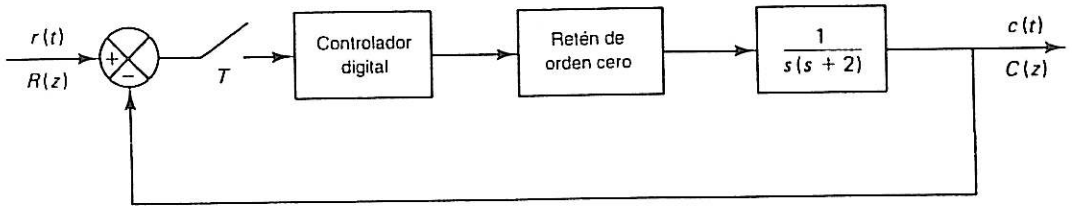


Figura 4-28 Sistema de control digital para el ejemplo 4-9.

y

$$\angle z = 2\pi\frac{3.464}{31.42} = 0.6927 \text{ rad} = 39.69°$$

Podemos ahora localizar el polo dominante en lazo cerrado deseado en la parte superior del plano z, que se muestra como punto P en la figura 4-29. Note que en el punto P

$$z = 0.6703\angle 39.69° = 0.5158 + j0.4281$$

Al observar que el período de muestreo T es de 0.2 seg, la función de transferencia pulso $G(z)$ de la planta precedida por el retenedor, o retén, de orden cero puede obtenerse como sigue

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-0.2s}}{s}\frac{1}{s(s + 2)}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s + 2)}\right]$$

Esta última ecuación se puede escribir en la forma

$$G(z) = \frac{0.01758(z + 0.8760)}{(z - 1)(z - 0.6703)}$$

A continuación, localizamos los polos ($z = 1$ y $z = 0.6703$) y el cero ($z = -0.8760$) de $G(z)$ en el plano z, tal y como se muestra en la figura 4-29. Si el punto P debe ser la localización del polo dominante en lazo cerrado deseado en la parte superior del plano z, entonces los ángulos en el punto P deben ser iguales a $\pm 180°$. Sin embargo, la suma de las contribuciones angulares en el punto P es

$$17.10° - 138.52° - 109.84° = -231.26°$$

Por lo tanto, la deficiencia angular es

$$-231.26° + 180° = -51.26°$$

La función de transferencia pulso del controlador debe proporcionar +51.26°. La función de transferencia pulso para el controlador se supone como

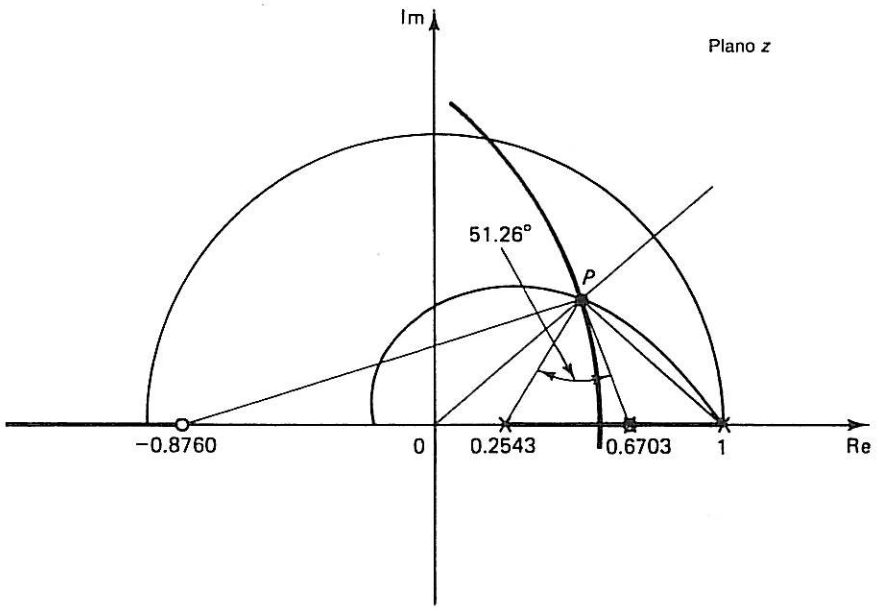


Figura 4-29 Diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema considerado en el ejemplo 4-9.

$$G_D(z) = K\frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

donde K es la constante de ganancia del controlador.

Si decidimos cancelar el polo en $z = 0.6703$ mediante el cero del controlador en $z = -\alpha$, entonces el polo del controlador podrá determinarse (si se parte de la condición de que el controlador debe proveer +51.26°) como un punto en $z = 0.2543$ ($\beta = -0.2543$). Por lo tanto, la transferencia pulso para el controlador puede ser determinada como

$$G_D(z) = K\frac{z - 0.6703}{z - 0.2543}$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto ahora se convierte en

$$G_D(z)G(z) = K\frac{z - 0.6703}{z - 0.2543}\frac{0.01758(z + 0.8760)}{(z - 1)(z - 0.6703)}$$
$$= K\frac{0.01758(z + 0.8760)}{(z - 0.2543)(z - 1)}$$

La constante de ganancia K puede ser determinada a partir de la siguiente condición de magnitud

$$|G_D(z)G(z)|_{z = 0.5158 + j0.4281} = 1$$

Por lo tanto,

$$K\left|\frac{0.01758(z + 0.8760)}{(z - 0.2543)(z - 1)}\right|_{z=0.5158+j0.4281} = 1$$

lo que da

$$K = 12.67$$

El controlador digital diseñado es

$$G_D(z) = 12.67\frac{z - 0.6703}{z - 0.2543} \tag{4-33}$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto para el sistema actual es

$$G_D(z)G(z) = \frac{12.67 \times 0.01758(z + 0.8760)}{(z - 0.2543)(z - 1)} = \frac{0.2227(z + 0.8760)}{(z - 0.2543)(z - 1)}$$

Por lo tanto, la función de transferencia pulso en lazo cerrado es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = \frac{0.2227z + 0.1951}{z^2 - 1.0316z + 0.4494}$$

La respuesta a la entrada escalón unitario $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$ se puede obtener a partir de

$$C(z) = \frac{0.2227z + 0.1951}{z^2 - 1.0316z + 0.4494}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$
$$= \frac{0.2227z^{-1} + 0.1951z^{-2}}{1 - 1.0316z^{-1} + 0.4494z^{-2}}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La figura 4-30 muestra la secuencia de respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT. El trazo muestra que el sobrepaso máximo es aproximadamente 16% (lo que significa que el factor de amortiguamiento relativo es de alrededor de 0.5) y el tiempo de asentamiento es de aproximadamente 2 seg. El controlador digital que acabamos de diseñar satisface las especificaciones dadas y es satisfactorio.

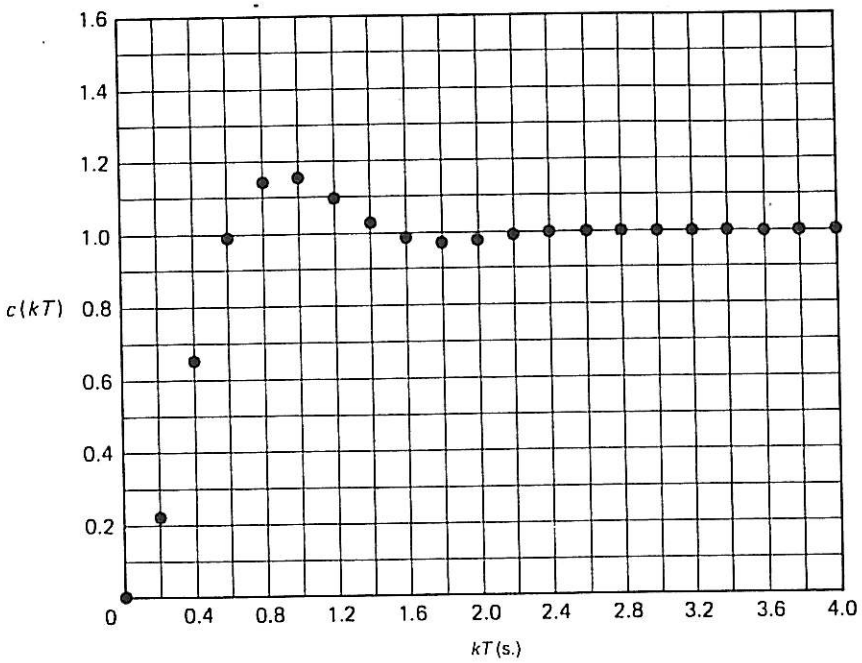


Figura 4-30 Secuencia de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado en el ejemplo 4-9.

La constante de error de velocidad estática K_v del sistema está dada por

$$K_v = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} G_D(z) G(z) \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[\frac{z - 1}{0.2z} \frac{0.2227(z + 0.8760)}{(z - 0.2543)(z - 1)} \right]$$

$$= 2.801$$

Si se requiere tener un valor grande de K_v, entonces pudiéramos incluir un compensador de atraso. Por ejemplo, añadir un cero en $z = 0.94$ y un polo en $z = 0.98$ elevaría tres veces el valor de K_v, ya que $(1 - 0.94)/(1 - 0.98) = 3$. (Es importante que el polo y el cero del compensador de atraso se presenten en un número finito de puntos discretos asignables.) Un compensador de atraso, que tiene un polo y un cero muy cercanos el uno del otro, no cambia en forma significativa el lugar geométrico de las raíces cerca de los polos dominantes en lazo cerrado. El efecto de un compensador de atraso sobre la respuesta transitoria es el de introducir una componente transitoria pequeña pero que se reduce lentamente. Sin embargo, ese transitorio pequeño pero lento, no es deseable desde el punto de vista de las perturbaciones o de la atenuación de ruido, ya que la respuesta a las perturbaciones no se atenuaría rápidamente.

Por último, debe hacerse notar que aunque el sistema diseñado es del tercer orden, funciona como un sistema de segundo orden, ya que un polo de la planta ha sido cancelado por el cero del controlador. En vista de lo anterior, el presente sistema tiene solamente dos polos en lazo cerrado. Los polos dominantes en lazo cerrado en este caso son los únicos polos en lazo cerrado. Si un polo y un cero no se cancelan el uno al otro, entonces el sistema será del tercer orden.

Comentarios. Es importante señalar que los polos de una función de transferencia pulso en lazo cerrado determinan los modos naturales del sistema. No obstante, los comportamientos de la respuesta transitoria y de la respuesta a la frecuencia quedan influidos en gran medida por los ceros de la función de transferencia pulso en lazo cerrado.

Resulta útil familiarizarse con la relación entre las localizaciones de los polos y de los ceros del plano z y las características de respuesta en el tiempo para el diseño de los sistemas de control en tiempo discreto. Es importante notar que en el plano s la adición de un cero en el eje real negativo cerca del origen aumenta el sobrepaso máximo en respuesta a una entrada escalón. Un cero como éste en el plano s es transformado en un cero en el eje real positivo en el plano z entre 0 y 1.

Por lo tanto, en el plano z, la adición de un cero en el eje real positivo entre 0 y 1 aumenta el sobrepaso má-ximo. De hecho, mover un cero hacia el punto $z = 1$ aumentará en gran medida el sobrepaso máximo.

De forma similar, en el plano s un polo en lazo cerrado sobre el eje real negativo cerca del origen aumenta el tiempo de asentamiento. En el plano z, ese polo en lazo cerrado se transforma en un polo en lazo cerrado sobre el eje real positivo entre 0 y 1. Por lo tanto, un polo en lazo cerrado en el plano z entre 0 y 1 (en particular, cerca de $z = 1$) aumenta el tiempo de asentamiento. Sin embargo, la presencia de un polo en lazo cerrado o de un cero en el eje real negativo entre 0 y -1 en el plano z, afectará sólo ligeramente la respuesta transitoria.

4-6 DISEÑO BASADO EN EL MÉTODO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

El concepto de respuesta en frecuencia juega un poderoso papel en los sistemas de control digital, de la misma forma que lo hace en los sistemas de control en tiempo continuo. Como se indicó antes, en este libro se supone que el lector está familiarizado con las técnicas convencionales de diseño mediante la respuesta en frecuencia para los sistemas de control en lazo cerrado. De hecho, es necesaria la familiarización con los diagramas de Bode (trazas logarítmicas) en la extensión de las técnicas convencionales de la respuesta en frecuencia al análisis y el diseño de los sistemas de control en tiempo discreto.

A menudo han sido utilizados los métodos de respuesta en frecuencia en el diseño de compensadores. La razón básica es la sencillez de los métodos. Al llevar a cabo pruebas de respuesta en frecuencia sobre un sistema en tiempo discreto, es importante que el sistema tenga un filtro de paso bajas antes del muestreador, de tal manera que las bandas laterales estén centradas. Entonces el sistema lineal e invariante con el tiempo a una entrada senoidal conserva la frecuencia y modifica solamente la amplitud y la fase de la señal de entrada. Por lo tanto, las dos únicas cantidades que deben ser manejadas serán la frecuencia y la fase.

Ahora, analizaremos la respuesta del sistema lineal en tiempo discreto de tiempo invariante correspondiente a la entrada senoidal; ese análisis será confirmado mediante la definición de la función y transferencia pulso senoidal.

A continuación estudiaremos el diseño de un sistema de control en tiempo discreto en el plano w mediante la utilización de un diagrama de Bode.

Respuesta de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo a una entrada senoidal. Ya hemos indicado que la respuesta en frecuencia de $G(z)$ puède obtenerse sustituyendo $z = e^{j\omega T}$ en $G(z)$. A continuación demostraremos que esto es cierto.

Considere el sistema estable en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo que se muestra en la figura 4-31. La entrada del sistema $G(z)$ antes del muestreo es

$$u(t) = \text{sen } \omega t$$

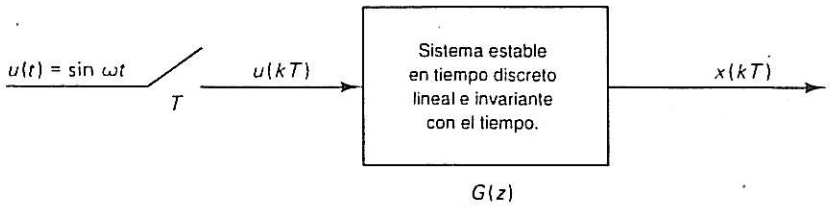


Figura 4-31 Sistema estable en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo.

La señal muestreada $u(kT)$ es

$$u(kT) = \text{sen}k\omega T$$

La transformada z de la entrada muestreada es

$$U(z) = \mathcal{Z}\,[\text{sen}k\omega T] = \frac{z\,\text{sen}\,\omega T}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

La respuesta del sistema está dada por

$$X(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{z\,\text{sen}\,\omega T}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

$$= \frac{az}{z - e^{j\omega T}} + \frac{\bar{a}z}{z - e^{-j\omega T}} + [\text{término debido a los polos de } G(z)] \qquad (4\text{-}34)$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (4-34) por $(z - e^{j\omega T})/z$, obtenemos

$$G(z)\frac{\text{sen}\,\omega T}{z - e^{-j\omega T}} = a + \frac{\bar{a}(z - e^{j\omega T})}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{z - e^{j\omega T}}{z}\,[\text{término debido a los polos de } G(z)]$$

El segundo término del segundo miembro de esta última ecuación se acerca a cero conforme z se acerca a $e^{j\omega T}$. Dado que el sistema considerado aquí es estable, el tercer término del segundo miembro también se acerca a cero conforme z se acerca a $e^{j\omega T}$. Por lo tanto, al dejar que z se acerque a $e^{j\omega T}$, tenemos

$$a = G(z)\frac{\text{sen}\,\omega T}{z - e^{-j\omega T}}\bigg|_{z = e^{j\omega T}} = \frac{G(e^{j\omega T})}{2j}$$

El coeficiente $\bar{a}$, que es el complejo conjugado de a, se obtiene como sigue:

$$\bar{a} = -\frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$$

Definamos

$$G(e^{j\omega T}) = Me^{j\theta}$$

Entonces

$$G(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\theta}$$

La ecuación (4-34) ahora puede escribirse como

$$X(z) = \frac{Me^{j\theta}}{2j}\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{Me^{-j\theta}}{2j}\frac{z}{z - e^{-j\omega T}} + [\text{término debido a los polos de } G(z)]$$

o bien

$$X(z) = \frac{M}{2j}\left(\frac{e^{j\theta}z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j\theta}z}{z - e^{-j\omega T}}\right) + [\text{término debido a los polos de } G(z)]$$

La transformada z inversa de esta última ecuación es

$$x(kT) = \frac{M}{2j}(e^{jk\omega T}e^{j\theta} - e^{-jk\omega T}e^{-j\theta}) + \mathcal{Z}^{-1}[\text{término debido a los polos de } G(z)] \qquad (4\text{-}35)$$

El último término del segundo miembro de la ecuación (4-35) representa la respuesta transitoria. Dado que el sistema $G(z)$ se ha supuesto estable, todos los términos de la respuesta transitoria desaparecerán en estado permanente y obtendremos la siguiente respuesta en estado permanente $x_{ss}(kT)$:

$$x_{ss}(kT) = \frac{M}{2j}[e^{j(k\omega T+\theta)} - e^{-j(k\omega T+\theta)}] = M \operatorname{sen}(k\omega T + \theta) \qquad (4\text{-}36)$$

donde M, que es la ganancia del sistema en tiempo discreto al ser sujeto a una entrada senoidal, está dada por

$$M = M(\omega) = |G(e^{j\omega T})|$$

y θ, el ángulo de fase, está dado por

$$\theta = \theta(\omega) = \underline{/G(e^{j\omega T})}$$

En términos de $G(e^{j\omega T})$, se puede escribir la ecuación (4-36) como sigue:

$$x_{ss}(kT) = |G(e^{j\omega T})| \operatorname{sen}(k\omega T + \underline{/G(e^{j\omega T})})$$

Hemos demostrado que $G(e^{j\omega T})$ realmente proporciona la magnitud de la fase de la respuesta en frecuencia de $G(z)$. Por lo tanto, para obtener la respuesta en frecuencia de $G(z)$, sólo necesitamos escribir $e^{j\omega T}$ en lugar de z en $G(z)$. La función $G(e^{j\omega T})$ se conoce comúnmente como función de transferencia pulso senoidal. Si observamos que

$$e^{j(\omega+(2\pi/T))T} = e^{j\omega T}e^{j2\pi} = e^{j\omega T}$$

encontramos que la función de transferencia pulso senoidal $G(e^{j\omega T})$ es periódica, con un período = T.

Ejemplo 4-10

Considere el sistema definido por

$$x(kT) = u(kT) + ax((k-1)T), \qquad 0 < a < 1$$

donde $u(kT)$ es la entrada y $x(kT)$ la salida. Obtenga la salida en estado permanente $x(kT)$ cuando la entrada $u(kT)$ es la senoidal de muestra, es decir $u(kT) = A$ sen $k\omega T$.

La transformada z de la ecuación del sistema es

$$X(z) = U(z) + az^{-1}X(z)$$

Al definir $G(z) = X(z)/U(z)$, tenemos

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Sustituyamos z por $e^{j\omega T}$ en $G(z)$. De ahí se puede obtener la función de transferencia pulso senoidal $G(e^{j\omega T})$ en la forma

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - a\cos\omega T + ja\,\text{sen}\,\omega T}$$

La amplitud de $G(e^{j\omega T})$ es

$$|G(e^{j\omega T})| = M = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega T}}$$

y el ángulo de fase de $G(e^{j\omega T})$ es

$$\angle G(e^{j\omega T}) = \theta = -\tan^{-1}\frac{a\,\text{sen}\,\omega T}{1 - a\cos\omega T}$$

Entonces, la salida en estado permanente $x_{ss}(kT)$ se puede escribir como sigue:

$$x_{ss}(kT) = AM\,\text{sin}\,(k\omega T + \theta)$$
$$= \frac{A}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega T}}\,\text{sen}\left(k\omega T - \tan^{-1}\frac{a\,\text{sen}\,\omega T}{1 - a\cos\omega T}\right)$$

Transformación bilineal y el plano w. Antes de aplicar con ventaja los métodos bien desarrollados de la respuesta en frecuencia al análisis y diseño de sistemas de control en tiempo discreto, son necesarias ciertas modificaciones al método del plano z. Dado que en el plano z la frecuencia aparece en la forma $z = e^{j\omega T}$, si tratamos la respuesta en frecuencia del plano z, la simplicidad de las trazas logarítmicos se perderá totalmente. Por lo tanto, la aplicación directa de los métodos de respuesta en frecuencia no merece tomarse en consideración. De hecho, en vista de que la transformada z transforma las franjas primarias y complementarias en el semiplano izquierdo del plano s al círculo unitario del plano z, los métodos convencionales de la respuesta en frecuencia, que se ocupan de la totalidad del semiplano izquierdo del plano, no se aplican al plano z.

La dificultad, sin embargo, puede resolverse transformando la función de transferencia pulso en el plano z en la correspondiente en el plano w. La transformada llamada comúnmente transformada w, es decir una transformada bilineal, queda definida por

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \tag{4-37}$$

donde T es el período de muestreo involucrado en el sistema de control en tiempo discreto bajo consideración. Al convertir una función de transferencia pulso dada en el plano z en una función racional de w, se pueden extender los métodos de respuesta en frecuencia a los sistemas de control en tiempo discreto. Si se resuelve la ecuación (4-37) en función de w, obtenemos la relación inversa

$$w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1} \tag{4-38}$$

Mediante la transformada z y la transformada w, la franja primaria del semiplano izquierdo del plano s es primero transformada al interior del círculo unitario en el plano z y a continuación transformada a la totalidad del semiplano izquierdo del plano w. Estos dos procesos de correspondencia se ilustran en la figura 4-32. (Note que en el plano s únicamente consideramos la franja primaria.) Observe que el origen del plano z corresponde al punto $w = -2/T$ en el plano w. También note que, conforme s varía desde cero hasta $j\omega_s/2$ a lo largo del eje $j\omega$ en el plano s, z varía desde 1 hasta -1 a

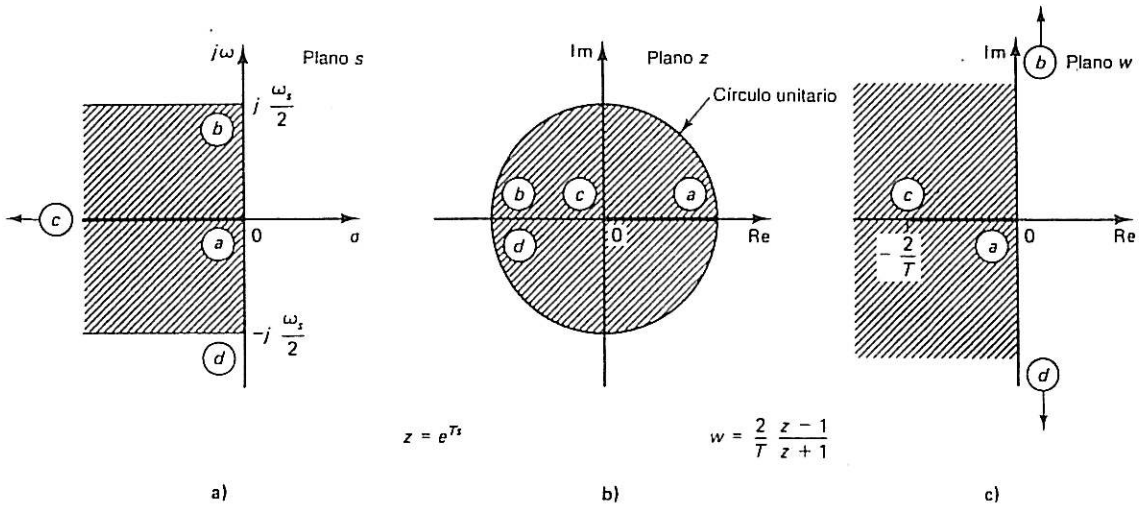


Figura 4-32 Diagramas que muestran las correspondencias del plano s con el plano z y del plano z con el plano w. *a*) Franja primaria en el semiplano izquierdo del plano s; *b*) correspondencia en el plano z de la franja primaria en el plano s; *c*) correspondencia en el plano w del círculo unitario en el plano z.

lo largo del círculo unitario en el plano z y w varía desde 0 hasta ∞ en el eje imaginario del plano w.

A pesar de que el semiplano izquierdo del plano w corresponde al semiplano izquierdo del plano s y que el eje imaginario del plano w corresponde al eje imaginario del plano s, existen diferencias entre ambos planos. La diferencia principal es que el comportamiento en el plano s sobre el intervalo de frecuencia $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \omega_s$ corresponde al intervalo $-\infty < \nu < \infty$, donde ν es la frecuencia ficticia en el plano w. Esto significa que, a pesar de que las características de la respuesta en frecuencia del filtro analógico serán reproducidas en el filtro discreto o digital, la escala de frecuencias en la cual se presenta la respuesta se comprimirá de un intervalo infinito en el filtro analógico a un intervalo finito en el filtro digital.

Una vez que la función de transferencia pulso $G(z)$ haya sido transformada en $G(w)$ mediante la transformada w, podrá ser tratada como una función transferencia convencional en w. Se podrán utilizar las técnicas convencionales de respuesta en frecuencia en el plano w y, por lo tanto, podrán aplicarse las técnicas bien establecidas de diseño mediante la respuesta en frecuencia al diseño de los sistemas de control en tiempo discreto.

Como se observó antes, ν representa la frecuencia ficticia. Al reemplazar w por $j\nu$ se pueden usar técnicas convencionales de respuesta en frecuencia para dibujar el diagrama Bode correspondiente a la función de transferencia en w. (En la breve revisión de los Bode en esta sección, utilizaremos la frecuencia ficticia ν como variable.)

Aunque el plano w se parece geométricamente al plano s, el eje de frecuencias en el plano w está distorsionado. La frecuencia ficticia ν y la frecuencia real ω están relacionadas como sigue:

$$w\Big|_{w=j\nu} = j\nu = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{e^{j(1/2)\omega T}-e^{-j(1/2)\omega T}}{e^{j(1/2)\omega T}+e^{j(1/2)\omega T}} = \frac{2}{T}j\tan\frac{\omega T}{2}$$

es decir,

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{4-39}$$

La ecuación (4-39) da la relación entre la frecuencia real ω y la frecuencia ficticia ν. Note que conforme la frecuencia real ω pasa de $-\frac{1}{2}\omega_s$ hasta 0 la frecuencia ficticia ω pasa desde $-\infty$ hasta 0, y conforme ω pasa de 0 hasta $\frac{1}{2}\omega_s$, ν pasa desde 0 hasta ∞.

Refiriéndose a la ecuación (4-39), la frecuencia real ω se puede traducir a la frecuencia ficticia ν. Por ejemplo,si el ancho de franja se especifica como ω_b, entonces el ancho de franja correspondiente al plano w es $(2/T)\tan(\omega_b T/2)$. De igual manera, $G(j\nu_1)$ corresponde a $G(j\omega_1)$, donde $\omega_1 = (2/T)\tan^{-1}(\nu_1 T/2)$. En la figura 4-33 se da la relación entre la frecuencia ficticia ν multiplicada por $\frac{1}{2}T$ y la frecuencia real ω del rango de frecuencias entre 0 y $\frac{1}{2}\omega_s$.

Observe que en la ecuación (4-39), si ωT es pequeño, entonces

$$\nu \doteq \omega$$

Esto significa que para un ωT pequeño las funciones de transferencia $G(s)$ y $G(w)$ se parecen una a la otra. Observe que éste es el resultado directo de la inclusión del factor de escala $2/T$ en la ecuación (4-38). La presencia de este factor de escala en la transformación nos permite mantener las mismas constantes de error antes y después de la transformación en w. (Esto significa que la función de transferencia en el plano w se acercará a la del plano s conforme T se acerque a 0. Vea el ejemplo 4-11 a continuación.)

Ejemplo 4-11

Considere la función de transferencia del sistema que se muestra en la figura 4-34. El periodo de muestreo T se supone de 0.1 seg. Obtenga $G(w)$.

La transformada z de $G(s)$ es

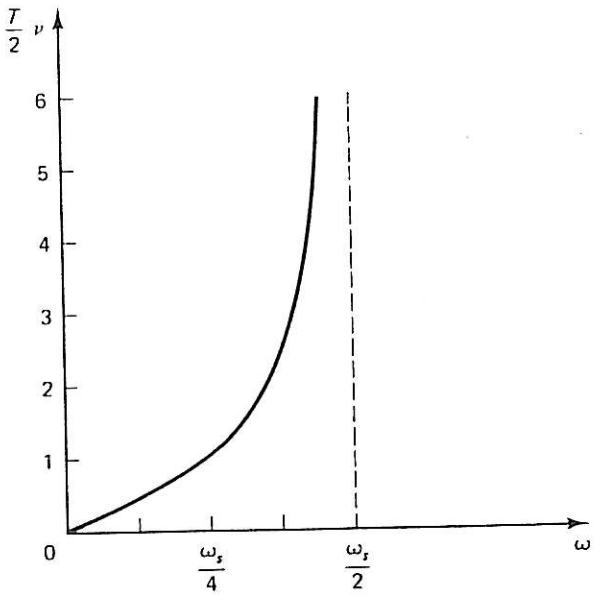


Figura 4-33 Relación entre la frecuencia ficticia ν multiplicada por $\frac{1}{2}T$ y la frecuencia real ω para el intervalo de frecuencias entre 0 y $\frac{1}{2}\omega_s$.

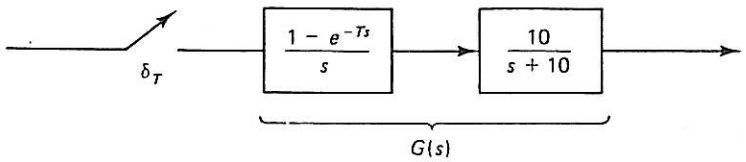


Figura 4-34 Función de transferencia del sistema del ejemplo 4-11.

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{10}{s + 10}\right]$$
$$= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s(s + 10)}\right]$$
$$= \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

Mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-37), es decir,

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} = \frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}$$

$G(z)$ puede ser transformada en $G(w)$ como sigue:

$$G(w) = \frac{0.6321}{\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} - 0.3679} = \frac{0.6321(1 - 0.05w)}{0.6321 + 0.06840w}$$
$$= 9.241\frac{1 - 0.05w}{w + 9.241}$$

Observe que la localización del polo de la planta es $s = -10$ y que el polo en el plano w es $w = -9.241$. El valor de ganancia en el plano s es 10 y el correspondiente en el plano w es 9.241. (Así, tanto las localizaciones de los polos como los valores de ganancia son similares en el plano s y en el plano w.) Sin embargo, $G(w)$ tiene un cero en $w = 2/T = 20$, a pesar de que la planta no tiene ningún cero. Conforme se hace más pequeño el período de muestreo T, el cero del plano w en $w = 2/T$ se acerca a ∞ en el semiplano derecho del plano w. Observe que tenemos

$$\lim_{w \to 0} G(w) = \lim_{s \to 0} \frac{10}{s + 10}$$

Este hecho es muy útil para verificar los cálculos numéricos para la transformación de $G(s)$ en $G(w)$.

Para resumir, la transformada w, transformada bilineal, hace corresponder el interior del círculo unitario del plano z con el semiplano izquierdo del plano w. El resultado general de las transformaciones del plano s en el plano z y en el plano w es que el plano w y el plano s son similares sobre las regiones de interés del plano s. Esto es debido a que algunas de las distorsiones causadas por la transformación del plano s en el plano z están parcialmente compensadas por la transformación del plano z en el plano w.

Observe que si

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}, \qquad m \leq n$$

donde las a_i y las b_i son constantes, se transforma en el plano w mediante la transformación

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w}$$

entonces, $G(w)$ asume la forma

$$G(w) = \frac{\beta_0 w^n + \beta_1 w^{n-1} + \cdots + \beta_n}{\alpha_0 w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \cdots + \alpha_n}$$

donde las α_i y las β_i son constantes (algunas de ellas pueden ser 0). Entonces, $G(w)$ es un cociente de polinomios en w, donde los grados del numerador o del denominador pueden ser o no iguales. Dado que $G(j\nu)$ es una función racional de ν, se puede aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist a $G(j\nu)$. En términos del diagrama Bode, se aplican a $G(j\nu)$ la aproximación convencional de línea recta a la curva de magnitud, así como el concepto del margen de fase y el margen de ganancia.

Diagramas Bode. En los sistemas de control en tiempo continuo de una entrada-una salida se ha utilizado mucho el diseño mediante diagramas Bode. En particular, si la función de transferencia está en forma factorizada, es bien conocida la simplicidad y rapidez con la cual se puede dibujar y reformar un diagrama Bode asintótico.

Tal y como se indicó antes, los métodos convencionales de respuesta en frecuencia se aplican a las funciones de transferencia en el plano w. Recuerde que el diagrama Bode consiste en dos trazas por separado, la magnitud logarítmica $|G(j\nu)|$ en función del logaritmo de ν y el ángulo de fase $G(j\nu)$ en función del logaritmo de ν. La traza de la magnitud logarítmica se basa en la factorización de $G(j\nu)$, de tal forma que funciona en el principio de sumar los términos individuales factorizados, en vez de multiplicar los términos individuales. Las técnicas conocidas de trazas asintóticas son aplicables y, por lo tanto, se puede dibujar con rapidez la curva de magnitud si se utilizan asíntotas con líneas rectas. Mediante el uso del diagrama Bode, se puede diseñar un compensador digital o un controlador digital a través de técnicas de diseño convencionales.

Es importante notar que puede existir una diferencia en las magnitudes en alta frecuencia para $G(j\omega)$ y $G(j\nu)$. La asíntota de alta frecuencia de la curva de magnitud logarítmica para $G(j\nu)$ puede ser una línea constante a ciertos decibeles (que es lo mismo que una línea horizontal). Por otra parte, si $\lim_{s \to \infty} G(s) = 0$, entonces la magnitud de $G(j\omega)$ siempre se acercará a cero ($-\infty$dB) conforme ω se acerque a infinito. Por ejemplo, en relación con el ejemplo 4-11, obtuvimos $G(w)$ para $G(s)$ como sigue:

$$G(w) = 9.241\left(\frac{1 - 0.05w}{w + 9.241}\right)$$

La magnitud en alta frecuencia de $G(j\nu)$ es

$$\lim_{\nu \to \infty} |G(j\nu)| = \lim_{\nu \to \infty} \left| 9.241\left(\frac{1 - 0.05j\nu}{j\nu + 9.241}\right) \right| = 0.4621$$

en tanto que la magnitud en alta frecuencia de la planta es

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{10}{j\omega + 10} \right| = 0$$

La diferencia en los diagramas Bode en el extremo de alta frecuencia puede explicarse como sigue: primero, recuerde que sólo estamos interesados en el rango de frecuencia $0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$, lo que corresponde a $0 \leq \nu \leq \infty$. Entonces, al observar que $\nu = \infty$ en el plano w corresponde a $\omega = \frac{1}{2}\omega_s$ en el plano s, se puede decir que $\lim_{\nu \to \infty} |G(j\nu)|$ corresponde a $\lim_{\omega \to \omega/2} |10/(j\omega + 10)|$, que es una constante. (Es

importante señalar que estos dos valores no suelen ser iguales entre sí.) Desde el punto de vista de polos y ceros, se puede decir que cuando $|G(jv)|$ es una constante distinta de cero en $v = \infty$, está implícito que $G(w)$ contiene el mismo número de polos y de ceros.

En general, uno o más ceros de $G(w)$ se presentan en el semiplano derecho del plano w. La presencia de un cero en el semiplano derecho del plano w significa que $G(w)$ es una función de transferencia de fase no mínima. Por lo tanto, debemos tener cuidado al dibujar la curva de ángulo de fase en el diagrama Bode.

Ventajas del método del diagrama Bode para el diseño. El método del diagrama Bode es en particular útil en lo que se refiere al análisis y el diseño de los sistemas de control, por las siguientes razones:

1. En el diagrama Bode, la asíntota de baja frecuencia de la curva de magnitud indica una de las constantes de error estáticas K_p, K_v o K_a.
2. Se pueden traducir las especificaciones de la respuesta transitoria a las correspondientes de la respuesta en frecuencia en términos del margen de fase, del margen de ganancia, del ancho de franja y así sucesivamente. Estas especificaciones se pueden manejar fácilmente en el diagrama Bode. En particular, los márgenes de fase y de ganancia se pueden leer en forma directa del diagrama Bode.
3. El diseño de un compensador digital (o un controlador digital) para satisfacer las especificaciones dadas (en función del margen de fase o del margen de ganancia) puede llevarse a cabo en el diagrama Bode de una forma sencilla y simple.

Compensación de adelanto de fase, atraso de fase y atraso-adelanto de fase. Antes de que analicemos los procedimientos de diseño en el plano w, revisemos las técnicas de compensación mediante el adelanto de fase, el atraso de fase y el atraso-adelanto de fase.

La compensación mediante el adelanto de fase es comúnmente utilizada para mejorar los márgenes de estabilidad. Este tipo de compensación aumenta el ancho de franja del sistema. Por lo tanto, el sistema tiene más velocidad para responder. Sin embargo, un sistema que utilice compensación mediante adelanto de fase puede estar sujeto a problemas de ruido de alta frecuencia, en vista de su incremento en la ganancia en alta frecuencia.

La compensación mediante atraso de fase reduce la ganancia del sistema en frecuencias más altas, sin reducir la ganancia del sistema en frecuencias más bajas. El ancho de franja del sistema queda reducido y, por lo tanto, el sistema tiene una velocidad de respuesta más baja. Debido a la reducida ganancia en alta frecuencia, se puede aumentar la ganancia total del sistema y, por lo tanto, incrementarse la ganancia en baja frecuencia y mejorarse la precisión en estado permanente. También puede atenuarse cualquier ruido de alta frecuencia que se presente en el sistema.

En algunas aplicaciones, un compensador de atraso de fase es colocado en cascada con un compensador de adelanto de fase. Un compensador en cascada como éste se conoce como un compensador de *atraso-adelanto* de fase. Al utilizar un compensador de atraso-adelanto se puede incrementar la ganancia en baja frecuencia (lo que significa una mejoría en la precisión en estado permanente), mientras que al mismo tiempo se puede aumentar el ancho de franja y los márgenes de estabilidad.

Observe que el controlador PID es un caso especial de controlador de atraso-adelanto de fase. La acción del control PD, que afecta la región de alta frecuencia, aumenta el ángulo del adelanto de fase y mejora la estabilidad del sistema, así como también incrementa el ancho de banda del sistema (lo que mejora la velocidad de respuesta). Esto es, el controlador PD se comporta de una manera

similar al compensador de adelanto de fase. La acción de control PI afecta la parte de baja frecuencia y, de hecho, aumenta la ganancia en baja frecuencia al mejorar la precisión en estado permanente. Por lo tanto, el controlador PI actúa como un compensador de atraso de fase. La acción de control PID es una combinación de las acciones de control PI y PD. Las técnicas de diseño para los controladores PID básicamente siguen los correspondientes a los compensadores de atraso-adelanto de fase. (En los sistemas de control industrial, sin embargo, cada acción de control PID en el controlador PID puede ser ajustada en forma experimental.)

Algunas observaciones sobre el problema de cuantización de los coeficientes. Desde el punto de vista de la implementación en un microprocesador de los compensadores de adelanto de fase, atraso de fase y atraso-adelanto de fase, los compensadores de adelanto de fase no presentan problemas de cuantización de los coeficientes, porque las localizaciones de los polos y de los ceros están bien separadas. Sin embargo, en el caso de los compensadores de atraso de fase y de los compensadores de atraso-adelanto de fase, la red de atraso de fase plantea un problema de cuantización de los coeficientes porque las localizaciones de polos y de ceros están cercanas entre sí. (Están cerca del punto $z = 1$.)

Dado que los coeficientes de filtro deben realizarse mediante palabras binarias que utilizan un número limitado de bits, si el número de bits empleados no es suficiente, las localizaciones de los polos y los ceros del filtro pudieran no llevarse a cabo con tanta exactitud como se desea y el filtro resultante no se comportará como se espera.

Debido a que pequeñas desviaciones en las localizaciones de polos y de ceros en relación con las localizaciones deseadas pueden tener efectos significativos en las características de la respuesta en frecuencia del compensador, la versión digital del compensador pudiera no funcionar como se espera. Para minimizar el efecto del problema de cuantización de los coeficientes, es necesario estructurar el filtro de tal forma que resulte lo menos sujeto posible a inexactitudes de coeficientes debidas a la cuantización.

En razón de la sensibilidad de las raíces de los polinomios a las variaciones de los parámetros que se vuelven más severos conforme aumenta el orden del polinomio, la realización directa de un orden superior no es deseable. Es preferible colocar elementos de orden inferior en cascada o en paralelo, tal y como se analiza en la sección 3-6. Si desde el inicio seleccionamos polos y ceros desde el compensador digital a partir de puntos discretos permisibles, se puede evitar el problema de cuantización de los coeficientes.

En el compensador analógico, los polos y los ceros del compensador pueden colocarse con una precisión arbitraria. En la conversión de un compensador analógico a uno digital, la versión digital del compensador de atraso puede tener imprecisiones considerables en las localizaciones de los polos y de los ceros. (Lo que es importante recordar es que los polos y los ceros en el filtro en el plano z deben presentarse en un número finito de puntos discretos permisibles.)

Procedimiento de diseño en el plano w. Refiriéndonos al sistema de control digital que se muestra en la figura 4-35, el procedimiento de diseño en el plano w puede enunciarse como sigue:

1. Primero obtenga $G(z)$, la transformada z de la planta precedida por un retén. A continuación transforme $G(z)$ en una función de transferencia $G(w)$ mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-37):

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w}$$

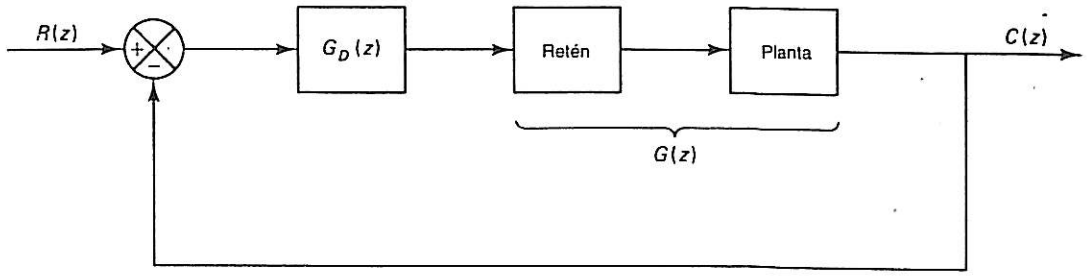


Figura 4-35 Sistema de control digital.

Esto es,

$$G(w) = G(z)|_{z=[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]}$$

Es importante que se seleccione adecuadamente el período de muestreo T. Una regla práctica es muestrea con una frecuencia de 10 veces el ancho de franja del sistema en lazo cerrado. (Aunque los controles digitales y el procesamiento de señales utilizan procedimientos similares en el muestreo en las señales en tiempo continuo, las frecuencias de muestreo involucradas son muy distintas. En el campo de procesamiento de señales, las frecuencias de muestreo por lo general son muy altas, en tanto que en el campo de los sistemas de control digital, las frecuencias de muestreo usadas son por lo regular bajas. Esta diferencia en las frecuencias de muestreo se debe en principio a las distintas dinámicas involucradas y a las ventajas y desventajas existentes en ambos campos.)

2. Sustituya $w = jv$ en $G(w)$ y trace el diagrama Bode para $G(jv)$.
3. Lea del diagrama Bode las constantes de error estático, el margen de fase y el margen de ganancia.
4. Suponiendo que la ganancia en baja frecuencia de la función de transferencia del controlador en tiempo discreto (o controlador digital) $G_D(w)$ es la unidad, determine la ganancia del sistema al satisfacer el requisito para una constante dada de error estático. A continuación, utilizando técnicas de diseño convencionales para sistema de control en tiempo continuo, determine los polos y los ceros de la función de transferencia del controlador digital. [$G_D(w)$ es un cociente de dos polinomios en w.] Entonces la función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado está dado por $G_D(w)G(w)$.
5. Transforme la función de transferencia del controlador $G_D(w)$ en $G_D(z)$ mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-38)

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Entonces

$$G_D(z) = G_D(w)|_{w=(2/T)(z-1)/(z+1)}$$

es la función de transferencia pulso del controlador digital.

6. Lleve a cabo la función de transferencia pulso $G_D(z)$ mediante un algoritmo de cálculo.

Siguiendo el procedimiento de diseño que acabamos de proporcionar, es importante observar lo siguiente:

1. La función de transferencia $G(w)$ es una función de transferencia de fase no mínima. Por lo tanto, la curva del ángulo de fase es distinta de la correspondiente a la función de transferencia de fase mínima más típica. Es necesario asegurarse de que la curva del ángulo de fase quede bien dibujada tomando en consideración el término de fase no mínimo.
2. El eje de frecuencia en el plano w está distorsionado. La relación entre la frecuencia ficticia ν y la frecuencia real ω es

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

Si, por ejemplo, se define un ancho de franja ω_b necesitamos diseñar el sistema para un ancho de franja ν_b, donde

$$\nu_b = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_b T}{2}$$

Ejemplo 4-12

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-36. Diseñe un controlador digital en el plano w de tal forma que el margen de fase sea 50°, el margen de ganancia sea de por lo menos 10 dB, y la constante de error de velocidad estática K_v sea 2 seg^{-1}. Suponga que el período de muestreo es 0.2 segundos, es decir, que $T = 0.2$.

Primero obtenemos la función de transferencia pulso $G(z)$ de la planta que está precedida por un retenedor de orden cero:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-0.2s}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{K}{s^2(s+1)}\right] \\ &= 0.01873\left[\frac{K(z + 0.9356)}{(z-1)(z-0.8187)}\right] \\ &= \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187} \end{aligned}$$

A continuación, transformamos la función de transferencia pulso $G(z)$ en una función de transferencia $G(w)$ mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-37):

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

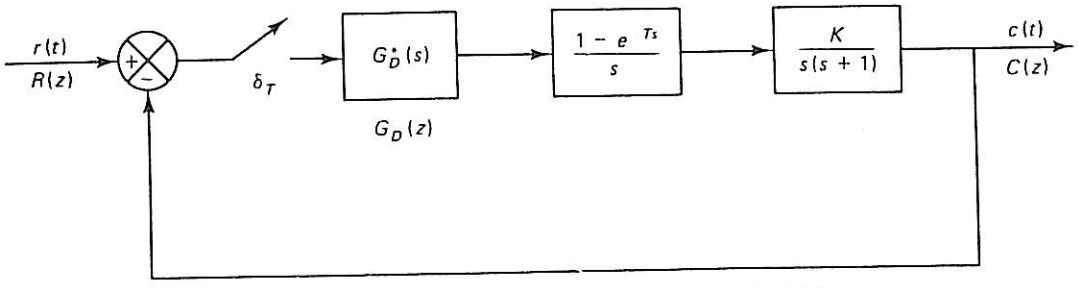


Figura 4-36 Sistema de control digital del ejemplo 4-12.

1. La función de transferencia $G(w)$ es una función de transferencia de fase no mínima. Por lo tanto, la curva del ángulo de fase es distinta de la correspondiente a la función de transferencia de fase mínima más típica. Es necesario asegurarse de que la curva del ángulo de fase quede bien dibujada tomando en consideración el término de fase no mínimo.
2. El eje de frecuencia en el plano w está distorsionado. La relación entre la frecuencia ficticia ν y la frecuencia real ω es

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

Si, por ejemplo, se define un ancho de franja ω_b necesitamos diseñar el sistema para un ancho de franja ν_b, donde

$$\nu_b = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_b T}{2}$$

Ejemplo 4-12

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-36. Diseñe un controlador digital en el plano w de tal forma que el margen de fase sea 50°, el margen de ganancia sea de por lo menos 10 dB, y la constante de error de velocidad estática K_v sea 2 seg^{-1}. Suponga que el período de muestreo es 0.2 segundos, es decir, que $T = 0.2$.

Primero obtenemos la función de transferencia pulso $G(z)$ de la planta que está precedida por un retenedor de orden cero:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-0.2s}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{K}{s^2(s+1)}\right] \\ &= 0.01873\left[\frac{K(z + 0.9356)}{(z-1)(z-0.8187)}\right] \\ &= \frac{K(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187} \end{aligned}$$

A continuación, transformamos la función de transferencia pulso $G(z)$ en una función de transferencia $G(w)$ mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-37):

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

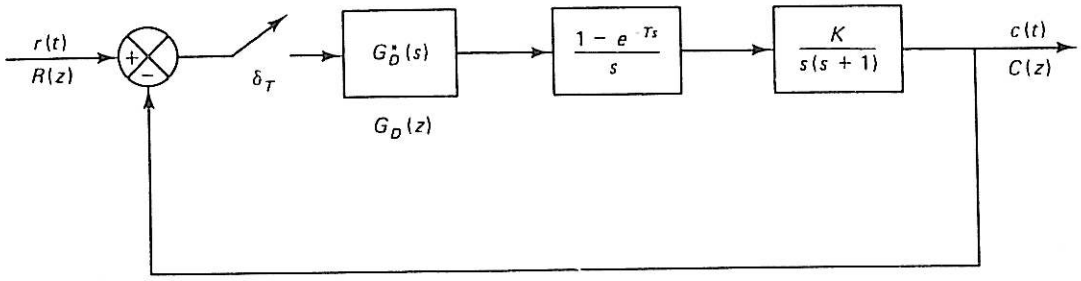


Figura 4-36 Sistema de control digital del ejemplo 4-12.

Entonces,

$$G(w) = \frac{K\left[0.01873\left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}\right) + 0.01752\right]}{\left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}\right)^2 - 1.8187\left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}\right) + 0.8187}$$

$$= \frac{K(-0.000333w^2 - 0.09633w + 0.9966)}{w^2 + 0.9969w}$$

$$\doteq \frac{K\left(1 + \frac{w}{300}\right)\left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w + 1)}$$

Un *compensador simple de adelanto de fase* probablemente satisfará todos los requisitos. Por lo tanto, probaremos compensación mediante adelanto. (Si la compensación mediante adelanto no satisface todos los requisitos, será menester utilizar un tipo distinto de compensación.)

Ahora supongamos que la función de transferencia del controlador digital $G_D(w)$ tiene una ganancia unitaria para el intervalo de baja frecuencia y tiene la forma siguiente:

$$G_D(w) = \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha\tau w}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

(Se trata de un compensador de atraso de fase.) Ésta es una de las formas más sencillas de la función de transferencia del controlador digital. (Otras formas se pueden suponer también para este problema.) La función de transferencia en lazo abierto es

$$G_D(w)G(w) = \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha\tau w} \frac{K(-0.000333w^2 - 0.09633w + 0.9966)}{w^2 + 0.9969w}$$

La constante de error de velocidad estática K_v queda especificada como 2 seg^{-1}. Por lo tanto,

$$K_v = \lim_{w \to 0} wG_D(w)G(w) \doteq K = 2$$

La ganancia K se determina entonces como el valor 2.

Al definir $K = 2$, trazamos el diagrama Bode de $G(w)$:

$$G(w) = \frac{2(-0.000333w^2 - 0.09633w + 0.9966)}{w^2 + 0.9969w}$$

$$\doteq \frac{2\left(1 + \frac{w}{300}\right)\left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w + 1)}$$

La figura 4-37 muestra el diagrama Bode para el sistema. Para las curvas de magnitud hemos utilizado asíntotas con líneas rectas. La magnitud y el ángulo de fase de $G(j\nu)$ aparecen como curvas punteadas. (Note que el cero en $\nu = 10$ que ocurre en el semiplano derecho del plano w da retraso de fase.) El margen de fase se puede leer del diagrama Bode (curvas punteadas) como 30° y el margen de ganancia como 14.5 dB.

Las especificaciones requieren, además de $K_v = 2$, de un margen de fase de 50° y una ganancia de por lo menos 10 dB. Diseñemos un controlador digital que satisfaga estas especificaciones.

Diseño del compensador de adelanto. Ya que las especificaciones exigen un margen de fase de 50°, el ángulo adicional del adelanto de fase necesario para satisfacer este requisito es de 20°. Para obtener un margen de fase de 50° sin reducir el valor de K, el compensador de adelanto debe de contribuir el ángulo de adelanto de fase requerido.

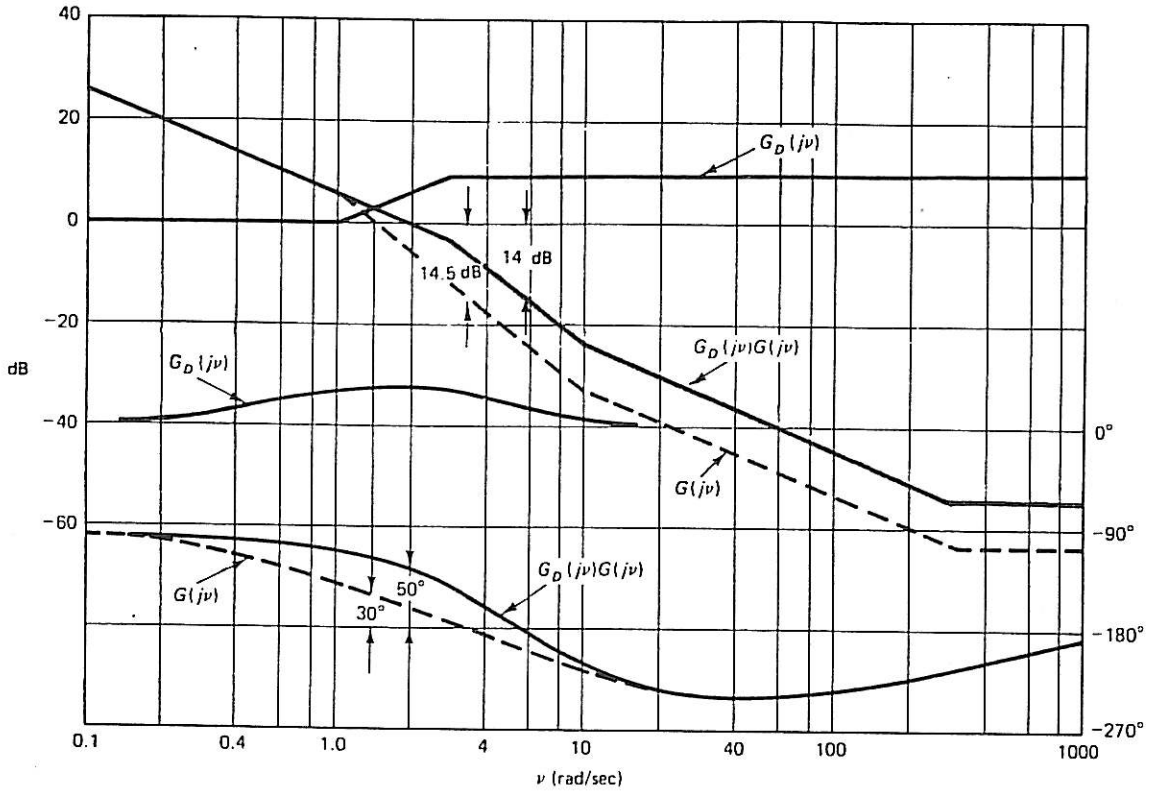


Figura 4-37 Diagrama Bode para el sistema diseñado en el ejemplo 4-12.

Si observamos que la adición de un compensador de adelanto modifica la curva de magnitud en el diagrama Bode, la frecuencia de cruce de ganancia se desplazará hacia la derecha. Si se considera el corrimiento de la ganancia en la frecuencia de cruce, debemos suponer que ϕ_m, que es el ángulo máximo de adelanto de fase requerido, es aproximadamente de 28°. (Esto significa que se han añadido 8° para compensar el corrimiento de la ganancia en la frecuencia de cruce.) En vista de que

$$\text{sen } \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$\phi_m = 28°$ corresponde a $\alpha = 0.361$.

Una vez que el factor α de atenuación se ha determinado sobre la base del ángulo de adelanto de fase requerido, el siguiente paso es determinar las frecuencias de esquina $\nu = 1/\tau$ y $\nu = 1/(\alpha\tau)$ del compensador de adelanto. Para ello, primero notamos que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m se presenta en la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, es decir $\nu = 1/(\sqrt{\alpha\tau})$. La cantidad de modificación en la curva de magnitud en $\nu = 1/(\sqrt{\alpha\tau})$ debido a la inclusión del término $(1 + \tau j\nu)/(1 + \alpha\tau j\nu)$ es

$$\left| \frac{1 + \tau j\nu}{1 + \alpha\tau j\nu} \right|_{\nu = 1/(\sqrt{\alpha\tau})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

A continuación encontramos el punto de frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado es $= -20 \log(1/\sqrt{\alpha})$. Note que

$$-20 \log \frac{1}{\sqrt{0.361}} = -20 \log 1.6643 = -4.425 \text{ dB}$$

Para encontrar el punto de frecuencia donde la magnitud es –4.425 dB, sustituimos $w = j\nu$ en $G(w)$ y encontramos la magnitud de $G(j\nu)$:

$$|G(j\nu)| = \frac{2\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{300}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{10}\right)^2}}{\nu\sqrt{1 + \nu^2}}$$

Mediante prueba y error, encontramos que en $\nu = 1.7$ la magnitud se convierte en alrededor de –4.4 dB. Seleccionamos esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia ν_c. Al observar que esta frecuencia corresponde a $1/(\sqrt{\alpha\tau}\,)$, o

$$\nu_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} = 1.7$$

obtenemos

$$\tau = \frac{1}{1.7\sqrt{\alpha}} = 0.9790$$

y

$$\alpha\tau = 0.3534$$

Por lo tanto, el compensador de adelanto determinado esa

$$G_D(w) = \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha\tau w} = \frac{1 + 0.9790w}{1 + 0.3534w} \tag{4-40}$$

Las curvas de magnitud y de ángulo de fase para $G_D(j\nu)$ y las curvas de magnitud y de ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto compensada $G_D(j\nu)G(j\nu)$ se muestran mediante curvas sólidas en la figura 4-37. Del diagrama Bode vemos que el margen de fase es 50° y el margen de ganancia es 14 dB.

La función de transferencia del controlador dada por la ecuación (4-40) se transformará ahora de regreso al plano z mediante la transformación bilineal dada por la ecuación (4-38):

$$w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{0.2}\frac{z - 1}{z + 1} = 10\frac{z - 1}{z + 1}$$

Entonces,

$$G_D(z) = \frac{1 + 0.9790\left(10\frac{z - 1}{z + 1}\right)}{1 + 0.3534\left(10\frac{z - 1}{z + 1}\right)} = \frac{2.3798z - 1.9387}{z - 0.5589}$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_D(z)G(z) = \frac{2.3798z - 1.9387}{z - 0.5589}\frac{0.03746(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)} = \frac{0.0891z^2 + 0.0108z - 0.0679}{z^3 - 2.3776z^2 + 1.8352z - 0.4576}$$

La función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema que hemos diseñado es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.0891z^2 + 0.0108z - 0.0679}{z^3 - 2.2885z^2 + 1.8460z - 0.5255}$$

$$= \frac{0.0891(z + 0.9357)(z - 0.8145)}{(z - 0.8126)(z - 0.7379 - j0.3196)(z - 0.7379 + j0.3196)}$$

Observe que la función de transferencia pulso en lazo cerrado implica dos ceros localizados en $z = -0.9357$ y $z = 0.8145$. El cero en $z = 0.8145$ prácticamente se cancela con el polo en lazo cerrado en $z = 0.8126$. El efecto de otro cero en $z = -0.9357$ sobre las respuestas transitorias y en frecuencia es muy pequeño, ya que está localizado en el eje real negativo del plano z entre 0 y -1 y es cercano al punto $z = -1$. El par de polos complejos conjugados actúan como polos dominantes en lazo cerrado. (El sistema se comporta como si se tratara de un sistema de segundo orden.)

Para verificar la respuesta transitoria del sistema diseñado, obtendremos una respuesta escalón unitario de este sistema utilizando MATLAB. El programa 4-2 de MATLAB produce la curva de respuesta escalón unitario tal y como se observa en la figura 4-38. La gráfica de la respuesta escalón unitario muestra un sobrepaso máximo de alrededor de 20% y un tiempo de levantamiento de aproximadamente 4 seg. De esta curva podemos observar que el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal es aproximadamente 15. Esto significa que la frecuencia de muestreo w_s es 15 veces la frecuencia natural amortiguada w_d. Por lo tanto, el período de muestreo de 0.2 seg es satisfactorio en este sistema bajo operación normal.

MATLAB Programa 4-2

```
%------ Unit-step response of designed system ------

num = [0   0.0891   0.0108   -0.0679];
den = [1   -2.2885   1.8460   -0.5255];
r = ones(1,41);
v = [0   40   0   1.6];
axis(v);
k = 0:40;
c = filter(num,den,r);
plot(k,c,'o')
grid
title('Unit-Step Response of Designed System')
xlebel('k   (Sampling period T = 0.2 sec)')
yleb('Output c(k)')
```

Comentarios. La ventaja del método de transformada de w es que el método de respuesta en frecuencia convencional mediante el uso de diagramas Bode puede ser utilizado para diseños de sistemas de control en tiempo discreto. En la aplicación de este método, debemos seleccionar cuidadosamente una frecuencia de muestreo razonable. Antes de concluir esta sección, resumiremos los puntos importantes relativos al diseño en el plano w.

1. La magnitud y el ángulo de fase de $G(jv)$ son la magnitud y el ángulo de fase de $G(z)$ conforme z se mueve en el círculo unitario desde $z = 1$ hasta $z = -1$. En vista de que $z = e^{j\omega T}$, el valor ω

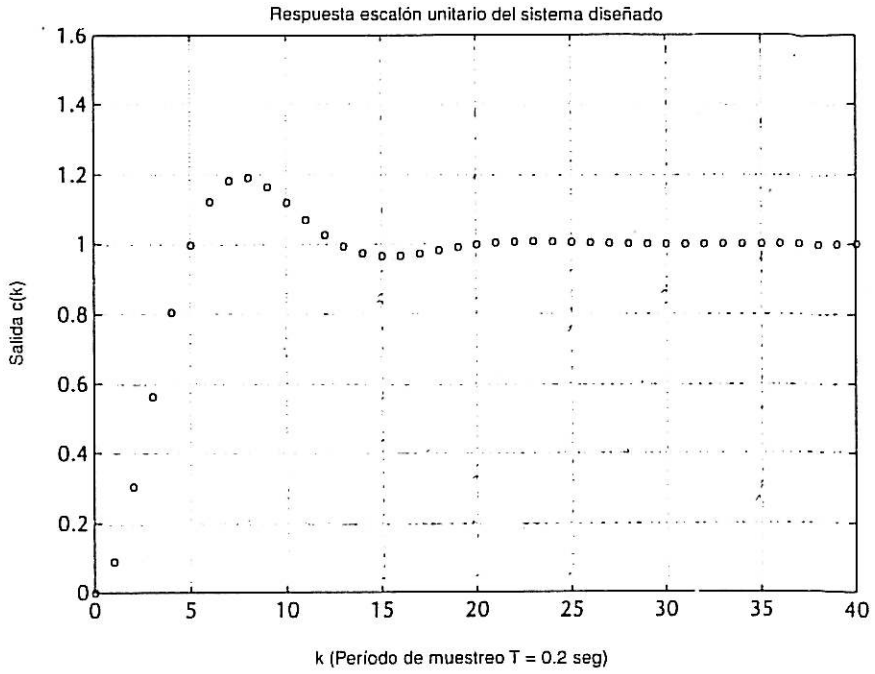


Figura 4-38 Gráfica de la respuesta escalón unitario del sistema diseñado.

varía desde 0 hasta $\frac{1}{2}\omega_s$. La frecuencia ficticia ν varía desde 0 hasta ∞ ya que $\nu = (2/T)\tan(\omega T/2)$. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del sistema de control digital para $0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$ es similar a la respuesta en frecuencia del sistema de control analógico correspondiente en el caso de $0 \leq \nu \leq \infty$.

2. Dado que $G(j\nu)$ es una función racional de ν, básicamente es la misma que $G(j\omega)$. En la determinación de ceros inestables posibles de la ecuación característica, se puede aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist. Por lo tanto, son aplicables a $G(j\nu)$ tanto la aproximación convencional con líneas rectas a la curva de magnitud del diagrama Bode como el concepto de margen de fase y de margen de ganancia.
3. Compare las funciones de transferencia $G(w)$ y $G(s)$. Como hemos mencionado antes, en razón de la presencia del factor de escala $2/T$ en la transformación w, las constantes de error estático correspondientes para $G(w)$ y para $G(s)$ se hacen idénticas. (Sin el factor de escala $2/T$ esto no sería cierto.)
4. La transformación w puede generar uno o más ceros en el semiplano derecho en $G(w)$. Si existen uno o más ceros en el semiplano derecho, entonces $G(w)$ es una función de transferencia de fase no mínima. Debido a que los ceros en el semiplano derecho están generados por la operación de muestreo y retención, las localizaciones de estos ceros dependen del período de muestreo T. Los efectos de estos ceros en el semiplano derecho en la respuesta se hacen menores conforme se reduce el período de muestreo T.

   Ahora consideremos los efectos de la respuesta del cero en el semiplano derecho en $w = 2/T$. El cero en $w = 2/T$ genera distorsión en la respuesta en frecuencia conforme ν se acerca a $2/T$. En vista de que

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

entonces, conforme ν se acerca a $2/T$, $\tan(\omega T/2)$ se aproxima a 1, o bien

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\pi}{4}$$

y, por lo tanto,

$$\omega = \frac{\pi}{2T}$$

Como ya se indicó, $\omega = \frac{1}{2}\omega_s = \pi/T$ es la frecuencia más alta que consideramos en la respuesta del sistema de control en tiempo discreto o digital. Por lo tanto, $\omega = \omega_s/4 = \pi/2T$, que es la mitad de la frecuencia más alta considerada, está dentro del intervalo de frecuencia de interés. Así, el cero en $w = 2/T$, que aparece en el semiplano derecho del plano w, afectará seriamente la respuesta.

5. Debe hacerse notar que el método de diagrama Bode en el plano w se utiliza con frecuencia, y muchos sistemas de control digital de éxito han sido diseñados mediante este procedimiento.

4-7 MÉTODO DE DISEÑO ANALÍTICO

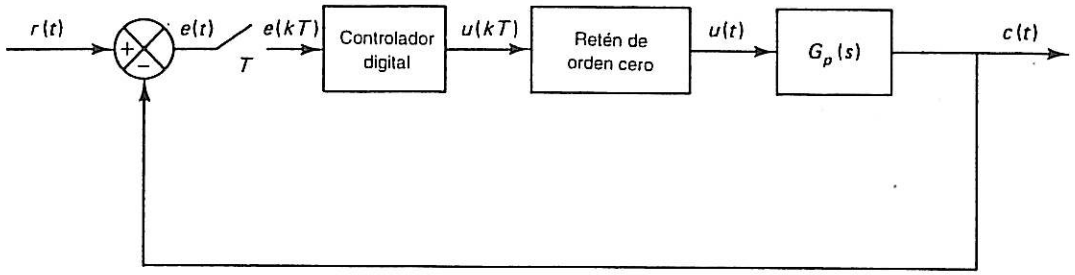
La razón principal por la cual el manejo de los controladores analógicos es limitado, se debe a que los componentes neumáticos, hidráulicos y electrónicos tienen limitaciones físicas. Dichas limitaciones pueden ignorarse por completo en el diseño de los controladores digitales. Por lo tanto, muchos esquemas de control, que han sido imposibles con controles analógicos, resultan posibles con controles digitales. De hecho, esquemas de control óptimo que son imposibles mediante controladores analógicos se han hecho posibles con esquemas de control digital.

En esta sección presentamos en particular un método de diseño analítico para controladores digitales que obligará la secuencia de error, cuando quede sujeta a un tipo específico de entrada en el dominio del tiempo, para llegar a cero después de un número finito de períodos de muestreo y, de hecho, a convertirse en cero y mantenerse en cero después del número mínimo posible de períodos de muestreo.

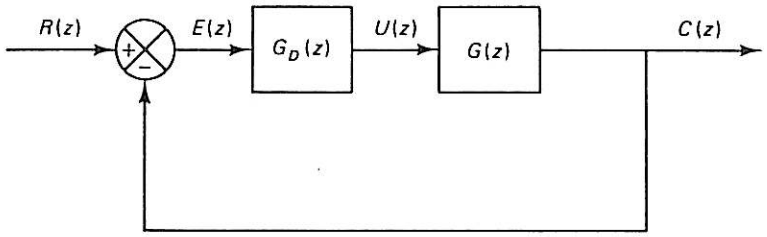
Si la respuesta de un sistema de control en lazo cerrado a una entrada escalón muestra el tiempo de asentamiento mínimo posible (es decir, cuando la salida alcanza su valor final en un tiempo mínimo y se queda ahí), sin error en estado permanente y ninguna componente oscilatoria entre instantes de muestreo, entonces este tipo de respuesta se conoce comúnmente como *respuesta con oscilaciones muertas*. La respuesta con oscilaciones muertas será analizada en esta sección. (La volveremos a ver en el capitulo 6, donde analizaremos la técnica de ubicación de polo y el diseño de los observadores de estado.)

Los estudios que siguen están limitados a la determinación de algoritmos de control o funciones de transferencia pulso de controladores digitales para sistemas de una entrada-una salida, dadas las características deseadas de respuesta óptima. Para el control óptimo de sistemas de múltiples entradas-múltiples salidas, ver el capítulo 8, donde se utiliza el método en el espacio de estados.

Diseño de controladores digitales para un tiempo de asentamiento mínimo con un error cero en estado permanente. Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-39*a*). La señal de error $e(t)$, que es la diferencia entre la entrada $r(t)$ y la salida $c(t)$, se muestrea en



a)



b)

Figura 4-39 *a*) Un sistema de control digital; *b*) diagrama que muestra el sistema de control equivalente.

cada intervalo de tiempo T. La entrada al controlador digital es la señal de error de $e(kT)$. La salida del controlador digital es la señal de control $u(kT)$. La señal de control $u(kT)$ es alimentada al retén de orden cero, y la salida del retén, $u(t)$, que es una señal en tiempo continuo, es alimentada a la planta. (A pesar de que no se muestra el dispositivo de muestreo en la entrada del retén de orden cero, la señal $u(kT)$ es primero muestreada y alimentada al retén de orden cero. Tal y como se mencionó antes, el retén de orden cero que se muestra en el diagrama es un muestreador y retén.) Se desea diseñar un controlador digital $G_D(z)$ tal que el sistema de control en lazo cerrado muestre el tiempo de asentamiento mínimo posible, con un error en estado permanente cero, en respuesta a una entrada escalón, rampa o de aceleración. Se requiere que la salida no presente componentes oscilatorias entre muestras, después de haber alcanzado el estado permanente. Si se requiere, el sistema deberá satisfacer cualquier otra especificación, como es la correspondiente a la constante de error de velocidad estática.

Definamos la transformada de z de la planta, precedida por el retén de orden cero, como $G(z)$, es decir

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right]$$

Entonces, la función de transferencia pulso en lazo abierto se convierte en $G_D(z)G(z)$, tal y como se muestra en la figura 4-39*b*). A continuación definamos la función de transferencia pulso en lazo

cerrado deseado como $F(z)$:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z) \tag{4-41}$$

Dado que es necesario que el sistema tenga un tiempo de asentamiento finito con un error en estado permanente cero, el sistema deberá mostrar una respuesta impulso finita. Por lo tanto, la función de transferencia pulso en lazo cerrado deseado debe ser de la forma siguiente:

$$F(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}{z^N}$$

es decir

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N} \tag{4-42}$$

donde $N \geq n$, y n es el orden del sistema. (Note que $F(z)$ no debe contener ningún término con potencias positivas en z, ya que dichos términos en la expansión en series de $F(z)$ implicarían que la salida antecede a la entrada, lo que no es posible para un sistema físicamente realizable.) En nuestro método de diseño, resolvemos la función de transferencia pulso en lazo cerrado para la función de transferencia pulso del controlador digital $G_D(z)$. Esto es, buscamos que la función de transferencia pulso $G_D(z)$ satisfaga la ecuación (4-41). Si se resuelve la ecuación (4-41) en función de $G_D(z)$ obtenemos

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]} \tag{4-43}$$

El sistema diseñado debe ser físicamente realizable. Las condiciones para que esto ocurra imponen ciertas limitantes a la función de transferencia pulso en lazo cerrado $F(z)$ y en la función de transferencia pulso del controlador digital $G_D(z)$. Las condiciones para que sean físicamente realizables pueden enunciarse como sigue:

1. El grado del numerador de $G_D(z)$ debe ser igual o menor que el grado del denominador. (De no ser así, el controlador requiere que sean datos de entrada futuros los que produzcan la salida de corriente.)
2. Si la planta $G_p(s)$ incluye un atraso de transporte e^{-Ls}, entonces el sistema en lazo cerrado diseñado debe involucrar por lo menos la misma magnitud de atraso de transporte. (De no ser así, el sistema en lazo cerrado tendría que responder antes de que se le diera una entrada, lo que es imposible realizar en un sistema físico.)
3. Si $G(z)$ se expande a una serie en z^{-1}, el término elevado a la potencia menor de la expansión serial de $F(z)$ en z^{-1} debe ser por lo menos igual de grande que el correspondiente a $G(z)$. Por ejemplo, si la expansión de $G(z)$ en una serie en z^{-1} empieza con el término z^{-1}, entonces el primer término de $F(z)$ dado por la ecuación (4-42) deberá ser cero, o a_0 debe ser igual a 0, esto es, la expansión deberá ser de la forma

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

donde $N \geq n$, y n es el orden del sistema. Esto significa que la planta no puede responder en forma instantánea cuando es aplicada una señal de control de magnitud finita: la respuesta se presenta con un atraso de por lo menos un período de muestreo, si la expansión de la serie de $G(z)$ empieza con un término z^{-1}.

Además de las condiciones de la posibilidad física de realización, tenemos que poner atención en aspectos de estabilidad del sistema. De manera específica, debemos evitar la cancelación de un polo inestable de la planta mediante un cero del controlador digital. Si se intenta este tipo de cancelación, cualquier error en la cancelación entre polos y ceros generará una divergencia conforme pasa el tiempo y el sistema se hará inestable. En forma similar, la función de transferencia pulso del controlador digital no deberá incluir polos inestables para cancelar ceros de la planta que ocurran fuera del círculo unitario.

Ahora investiguemos lo que ocurrirá con la función de transferencia pulso en lazo cerrado $F(z)$ si $G(z)$ incluye un polo inestable (o críticamente estable), esto es, un polo $z = \alpha$ exterior al círculo unitario (o bien sobre él). [Note que la discusión siguiente se aplica de la misma manera, si $G(z)$ incluye dos polos o más inestables—o críticamente estables.] Definamos

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{z - \alpha}$$

donde $G_1(z)$ no incluye un término que se cancele con $z - \alpha$. Entonces la función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = \frac{G_D(z)\dfrac{G_1(z)}{z - \alpha}}{1 + G_D(z)\dfrac{G_1(z)}{z - \alpha}} = F(z) \tag{4-44}$$

En vista de que requerimos que ningún cero de $G_D(z)$ cancele el polo inestable de $G(z)$ en $z = \alpha$, debemos tener

$$1 - F(z) = \frac{1}{1 + G_D(z)\dfrac{G_1(z)}{z - \alpha}} = \frac{z - \alpha}{z - \alpha + G_D(z)G_1(z)}$$

Esto es, $1 - F(z)$ debe tener como cero a $z = \alpha$. También, note de la ecuación (4-44) si ceros de $G(z)$ no cancelan polos de $G_D(z)$, los ceros de $G(z)$ se convierten en ceros de $F(z)$. [$F(z)$ puede incluir ceros adicionales.]

Resumamos lo que hemos dicho en relación con la estabilidad.

1. Dado que el controlador digital $G_D(z)$ no debe cancelar los polos inestables (o críticamente estables) de $G(z)$, todos los polos inestables (o críticamente estables) de $G(z)$ deberán incluirse en $1 - F(z)$ como ceros.
2. Los ceros de $G(z)$ que se presenten dentro del círculo unitario pueden cancelarse con polos de $G_D(z)$. Sin embargo, los ceros de $G(z)$, que ocurran sobre o fuera del círculo unitario, no deben cancelarse con polos de $G_D(z)$. Por lo tanto, todos los ceros de $G(z)$ que se presenten sobre o por fuera del círculo unitario deberán ser incluidos en $F(z)$ como ceros.

Ahora seguiremos con el diseño. Dado que $e(kT) = r(kT) - c(kT)$, refiriéndonos a la ecuación (4-41) tenemos

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z)[1 - F(z)] \tag{4-45}$$

Note que para una entrada escalón unitario $r(t) = 1(t)$

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Para una entrada rampa unitaria $r(t) = t1(t)$,

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Y para una entrada de aceleración unitaria $r(t) = \frac{1}{2}t^2 1(t)$,

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$$

Por lo tanto, en general, las transformadas z en estas entradas polinomiales en el dominio de tiempo se pueden escribir como

$$R(z) = \frac{P(z)}{(1 - z^{-1})^{q+1}} \tag{4-46}$$

donde $P(z)$ es un polinomio en z^{-1}. Note que para una entrada escalón unitario, $P(z) = 1$ y $q = 0$; para una entrada rampa unitaria, $P(z) = Tz^{-1}$ y $q = 1$; y para una entrada de aceleración unitaria, $P(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})$ y $q = 2$.

Al sustituir la ecuación (4-46) en la ecuación (4-45) obtenemos

$$E(z) = \frac{P(z)[1 - F(z)]}{(1 - z^{-1})^{q+1}} \tag{4-47}$$

Para asegurarnos de que el sistema llega al estado permanente en un número finito de períodos de muestreo y mantiene un error cero en estado permanente, $E(z)$ deberá ser un polinomio en z^{-1} con un número finito de términos. Entonces, refiriéndonos a la ecuación (4-47), escogemos que la función $1 - F(z)$ tenga la forma

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{q+1} N(z) \tag{4-48}$$

donde $N(z)$ es un polinomio en z^{-1} con un número finito de términos. Entonces

$$E(z) = P(z)N(z) \tag{4-49}$$

que es un polinomio en z^{-1} con un número finito de términos. Esto significa que la señal de error se convierte en cero en un número finito de períodos de muestreo.

Del análisis anterior, la función de transferencia pulso del controlador digital puede determinarse como sigue. Si se supone primero que $F(z)$ satisface la posibilidad física de realización y las condiciones de estabilidad, y a continuación se sustituye la ecuación (4-48) en la ecuación (4-43), obtenemos

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1})^{q+1} N(z)} \tag{4-50}$$

La ecuación (4-50) da la función de transferencia pulso del controlador digital que producirá un error cero en estado permanente, después de un número finito de períodos de muestreo.

Para una planta estable $G_p(s)$, la condición para que la salida no muestre componentes oscilatorios entre muestreos después del tiempo de asentamiento, se puede escribir como sigue:

$$c(t \geq nT) = \text{constante}, \qquad \text{para entradas escalón}$$

$$\dot{c}(t \geq nT) = \text{constante}, \qquad \text{para entradas rampa}$$

$$\ddot{c}(t \geq nT) = \text{constante}, \qquad \text{para entradas de aceleración}$$

La condición aplicable deberá ser satisfecha cuando se diseñe el sistema. Al diseñar el sistema, la condición sobre $c(t)$, $\dot{c}(t)$ o $\ddot{c}(t)$ deberá de interpretarse en términos de $u(t)$. Note que la planta está en tiempo continuo y la entrada a la planta es $u(t)$, que es una función en tiempo continuo; por lo tanto, para no tener componentes oscilatorias en la salida $c(t)$, la señal de control $u(t)$ en estado permanente debe ser constante o de un incremento monótono (o decrementándose monótonamente) para los casos de entrada escalón, rampa y de aceleración.

Comentarios

1. Dado que la función de transferencia pulso en lazo cerrado $F(z)$ es un polinomio en z^{-1}, todos los polos en lazo cerrado están en el origen o en $z = 0$. El polo múltiple en lazo cerrado en el origen es muy sensible a las variaciones de parámetros del sistema.
2. Aunque un sistema de control digital diseñado para presentar un tiempo de asentamiento mínimo con un error cero en estado permanente en respuesta a un tipo específico de entrada tenga características excelentes de respuesta transitoria para la entrada para la cual fue diseñado, puede mostrar características de respuestas transitorias inferiores o algunas veces inaceptables para otros tipos de entrada. (Esto es siempre cierto tratándose de sistemas de control óptimo. Un sistema de control óptimo mostrará las mejores características de respuesta para el tipo de entrada para el que fue diseñado, pero no exhibirá características de respuesta óptima con otros tipos de entradas.)
3. En el caso en el que un controlador analógico es discretizado, un incremento en el período de muestreo modifica la dinámica del sistema, lo que puede llevar a la inestabilidad del mismo. Por otra parte, el comportamiento del sistema de control digital que diseñamos en esta sección no depende de la selección del período de muestreo. En vista de que las entradas $r(t)$ consideradas aquí son entradas en el dominio del tiempo (como entradas escalón, entradas rampa y entradas de aceleración), el período de muestreo T puede ser escogido de manera arbitraria. Para un período de muestreo menor, el tiempo de respuesta (que es un múltiplo entero del período de muestreo T) se hace menor. Sin embargo, para un período de muestreo T muy pequeño, la magnitud de la señal de control se convertirá en excesivamente grande, con el resultado de que en el sistema aparecerán fenómenos de saturación, y el método de diseño presentado en esta sección ya no será aplicable. Por lo tanto, el período de muestreo T no debe ser demasiado pequeño. Por otra parte, si el período de muestreo T se escoge demasiado grande, el sistema puede comportarse de manera no satisfactoria, o incluso puede hacerse inestable cuando esté sujeto a entradas variables en el tiempo (como son entradas en el dominio de la frecuencia). De ahí que un término medio sea necesario. Una regla práctica sería escoger el período de muestreo T más pequeño para que no ocurra ningún fenómeno de saturación en la señal de control.

Ejemplo 4-13

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-39*a*), donde la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ está dada por

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Diseñe un controlador digital $G_D(z)$, tal que el sistema en lazo cerrado muestre respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón unitario. (En una respuesta con oscilaciones muertas el sistema no mostrará componentes oscilatorias entre muestras en la salida, una vez alcanzado el tiempo de asentamiento.) El período de muestreo T se supone de 1 seg. Entonces, utilizando el controlador digital $G_D(z)$ diseñado de esta forma, investigue la respuesta de ese sistema a una entrada rampa unitaria.

El primer paso en el diseño es determinar la transformada z de la planta que está antecedida por un retenedor de orden cero:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left[\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.3679z^{-1}}\right] \\ &= \frac{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})} \end{aligned} \tag{4-51}$$

Ahora vuelva a dibujar el diagrama del sistema de la misma manera en que se muestra en la figura 4-39*b*). Defina la función de transferencia pulso en lazo cerrado como $F(z)$, es decir

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z)$$

Observe que si $G(z)$ se expande a una serie en z^{-1} entonces el primer término será $0.3679z^{-1}$. Por lo tanto, $F(z)$ deberá empezar con un término en z^{-1}.

Al referirnos a la ecuación (4-42) y observar que el sistema es del segundo orden ($n = 2$), suponemos que $F(z)$ tiene la forma siguiente:

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{4-52}$$

Dado que la entrada es una función escalón, de la ecuación (4-48) requerimos que

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z) \tag{4-53}$$

Dado que $G(z)$ tiene un polo críticamente estable en $z = 1$, el requisito de estabilidad define que $1 - F(z)$ debe tener un cero en $z = 1$. Sin embargo, la función $1 - F(z)$ ya tiene un término $1 - z^{-1}$, lo que satisface por lo tanto el requisito.

En vista de que el sistema no deberá mostrar componentes oscilatorias entre muestras y la entrada es una función escalón, necesitamos que $c(t \geq 2T)$ sea constante. Si observamos que $u(t)$, la salida del retenedor de orden cero, es una función en tiempo continuo, una constante $c(t \geq 2T)$ requiere que $u(t)$ también sea constante para $t \geq 2T$. En términos de la transformada z, $U(z)$ debe ser del tipo siguiente de series de z^{-1}:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots)$$

donde b es una constante. Dado que la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ involucra un integrador, b deberá ser cero. (De lo contrario, la salida no podría conservarse constante.) En consecuencia tenemos

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

De la figura 4-39*b*), $U(z)$ se puede dar como sigue:

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)}\frac{R(z)}{G(z)} = F(z)\frac{R(z)}{G(z)}$$

$$= F(z)\frac{1}{1 - z^{-1}}\frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$= F(z)\frac{1 - 0.3679z^{-1}}{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

Para que $U(z)$ sea una serie en z^{-1} con sólo dos términos, $F(z)$ debe ser de la siguiente forma:

$$F(z) = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}F_1 \tag{4-54}$$

donde F_1 es una constante. Entonces $U(z)$ se puede escribir como sigue:

$$U(z) = 2.7181(1 - 0.3679z^{-1})F_1 \tag{4-55}$$

La ecuación (4-55) da $U(z)$ en términos de F_1. Una vez que se determine la constante F_1, $U(z)$ se puede dar como una serie de z^{-1} con sólo dos términos.

Ahora determinaremos $N(z)$, $F(z)$ y F_1. Si se sustituye la ecuación (4-52) en la ecuación (4-53) obtenemos

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})N(z)$$

El primer miembro de esta última ecuación deberá ser divisible entre $1 - z^{-1}$. Si dividimos el primer miembro entre $1 - z^{-1}$, el cociente es $1 + (1 - a_1)z^{-1}$ y el residuo es $(1 - a_1 - a_2)z^{-2}$. Por lo tanto, $N(z)$ se determina como

$$N(z) = 1 + (1 - a_1)z^{-1} \tag{4-56}$$

y el residuo deberá ser cero. Esto requiere que

$$1 - a_1 - a_2 = 0 \tag{4-57}$$

También, de las ecuaciones (4-52) y (4-54) tenemos

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}F_1$$

Por lo tanto,

$$a_1 + a_2 z^{-1} = (1 + 0.7181z^{-1})F_1$$

La división del primer miembro de esta última ecuación entre $1 + 0.7181z^{-1}$ da el cociente a_1 y el residuo $(a_2 - 0.7181a_1)z^{-1}$. Al igualar el cociente con F_1 y el residuo con cero, obtenemos

$$F_1 = a_1$$

y

$$a_2 - 0.7181a_1 = 0 \tag{4-58}$$

Si se resuelven las ecuaciones (4-57) y (4-58) en función de a_1 y a_2 da

$$a_1 = 0.5820, \qquad a_2 = 0.4180$$

Entonces, $F(z)$ se determina en la forma

$$F(z) = 0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2} \tag{4-59}$$

y

$$F_1 = 0.5820$$

La ecuación (4-56) da

$$N(z) = 1 + 0.4180z^{-1} \tag{4-60}$$

La función de transferencia pulso del controlador digital $G_D(z)$ es determinada a continuación a partir de la ecuación (4-50) como sigue. Refiriéndonos a las ecuaciones (4-51), (4-54) y (4-60),

$$\begin{aligned} G_D(z) &= \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1})N(z)} \\ &= \frac{(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}(0.5820)}{\dfrac{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}(1 - z^{-1})(1 + 0.4180z^{-1})} \\ &= \frac{1.5820 - 0.5820z^{-1}}{1 + 0.4180z^{-1}} \end{aligned}$$

Con el controlador digital así diseñado, la función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= F(z) = 0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2} \\ &= \frac{0.5820(z + 0.7181)}{z^2} \end{aligned}$$

La salida del sistema en respuesta a una entrada escalón unitario $r(t) = 1$ se puede obtener como sigue:

$$\begin{aligned} C(z) &= F(z)R(z) \\ &= (0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2})\frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= 0.5820z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(0) &= 0 \\ c(1) &= 0.5820 \\ c(k) &= 1, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Observe que la sustitución de 0.5820 en lugar de F_1 en la ecuación (4-55) da como resultado

$$\begin{aligned} U(z) &= 2.7181(1 - 0.3679z^{-1})(0.5820) \\ &= 1.5820 - 0.5820z^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la señal de control $u(k)$ se convierte en cero para $k \geq 2$, tal y como se requiere. No existe componente oscilatoria entre muestras en la salida una vez alcanzado el tiempo de asentamiento. La figura 4-40*a*) muestra las gráficas de $c(k)$ en función de k, de $u(k)$ en función de k y de $u(t)$ en función de t en la respuesta escalón unitario.

A continuación, investiguemos la respuesta de este sistema a una entrada rampa unitaria:

$$\begin{aligned} C(z) &= F(z)R(z) \\ &= (0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2})\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= 0.5820z^{-2} + 1.5820z^{-3} + 2.5820z^{-4} + 3.5820z^{-5} + \cdots \end{aligned}$$

Para la respuesta rampa unitaria, la señal de control $U(z)$ se obtiene como sigue. Refiriéndonos a las ecuaciones (4-51) y (4-59)

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{F(z)}{G(z)}R(z) = \frac{F(z)}{G(z)}\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

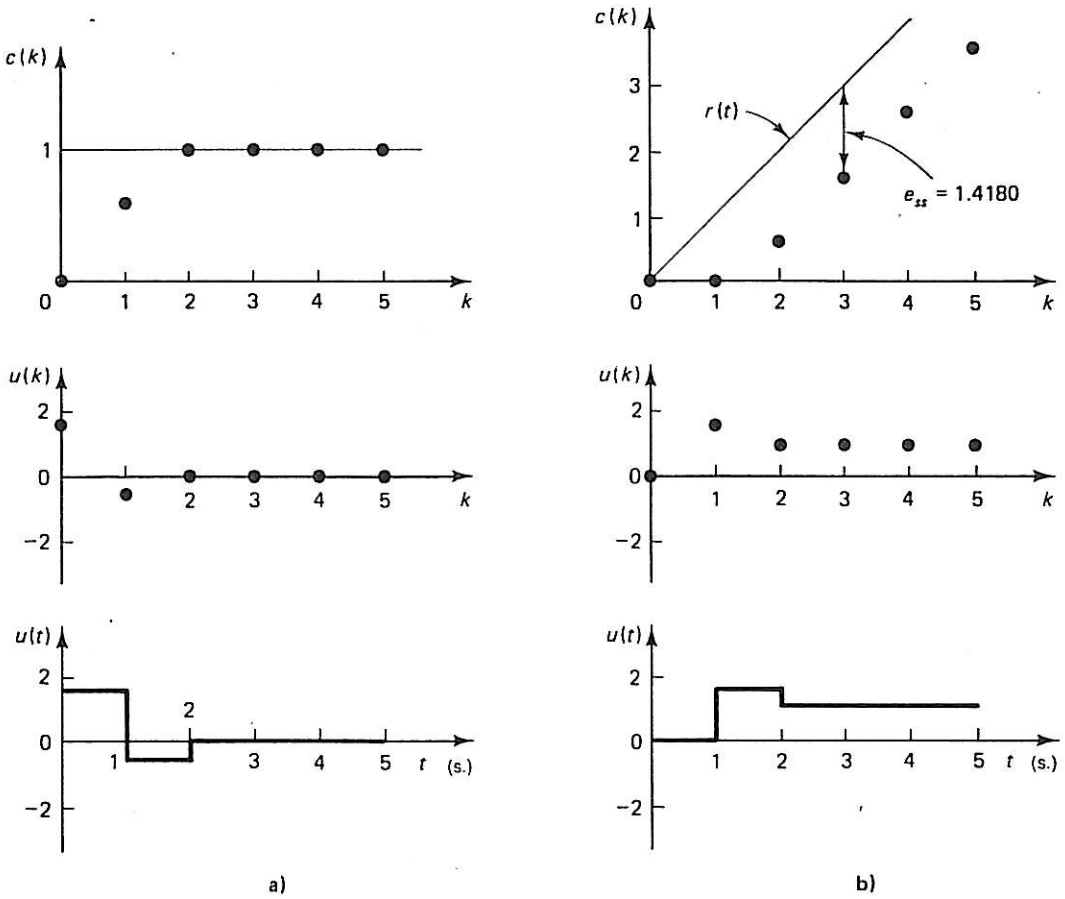


Figura 4-40 Respuesta del sistema diseñado en el ejemplo 4-13. *a*) Gráfica de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta escalón unitario; *b*) gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta rampa unitaria.

$$= (1.5820 - 0.5820z^{-1})\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$= 1.5820z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

La señal $u(k)$ se hace constante ($b = 1$) para $k \geq 2$. Por lo tanto, la salida del sistema no mostrará componentes oscilatorias entre muestras. La figura 4-40*b*) muestra las gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta rampa unitaria.

Observe que la constante de error de velocidad estática K_v para el presente sistema es

$$K_v = \lim_{z \to 1}\left[\frac{1 - z^{-1}}{T} G_D(z)G(z)\right]$$

$$= \lim_{z \to 1}\left[(1 - z^{-1})\frac{F(z)}{(1 - z^{-1})N(z)}\right]$$

$$= \lim_{z \to 1}\frac{0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2}}{1 + 0.4180z^{-1}} = 0.7052$$

Por lo tanto, el error en estado permanente de la respuesta rampa unitaria es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1.4180$$

mismo que aparece en la figura 4-40*b*).

En el presente problema de diseño, requerimos que en respuesta a una entrada escalón el sistema tenga un tiempo de asentamiento mínimo, sin error de estado permanente y sin componentes oscilatorias en la salida, una vez alcanzado el tiempo de asentamiento. Si en este problema existen una o más limitantes adicionales (por ejemplo, si se especifica arbitrariamente el valor de la constante de error de velocidad estática K_v), entonces deberá incrementarse el número de períodos de muestreo antes de alcanzar el estado permanente. Por ejemplo, el sistema de segundo orden pudiera necesitar tres o más períodos de muestreo antes de alcanzar el estado permanente, dependiendo de las limitantes adicionales impuestas. Vea el ejemplo 4-14 a continuación

Ejemplo 4-14

Considere un problema de diseño similar al del ejemplo 4-13 excepto que se especifica la constante de error de velocidad estática K_v. (En razón de esta limitante adicional, el tiempo de asentamiento será 2 seg más largo) El diagrama de bloque del sistema de control digital aparece en la figura 4-39*a*). La función de transferencia de la planta $G_p(s)$ bajo consideración es

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Las especificaciones de diseño son 1) que el sistema en lazo cerrado muestre un tiempo de asentamiento finito con un error cero en estado permanente en la respuesta escalón unitario, 2) que la salida no presente componentes oscilatorias entre muestras, una vez alcanzado el tiempo de asentamiento, 3) que la constante de error de velocidad estática K_v sea de 4 seg^{-1} y 4) que el tiempo de asentamiento sea el mínimo posible para satisfacer todas estas especificaciones. El período de muestreo se supone de 1 seg. Diseñe un controlador digital $G_D(z)$ que satisfaga las especificaciones dadas. Una vez diseñado el controlador, investigue la respuesta del sistema a una entrada rampa unitaria.

La transformada z de la planta precedida por un retén de orden cero se obtiene en el ejemplo 4-13 en la forma:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right]$$
$$= \frac{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

Defina la función de transferencia pulso en lazo cerrado como $F(z)$:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z)$$

En vista de que el primer término de la expansión de $G(z)$ es $0.3679z^{-1}$, $F(z)$ debe empezar con un término en z^{-1}:

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

donde $N \geq n$ y n es el orden del sistema (en este caso $n = 2$). En razón de la limitante adicional, podremos suponer que $N > 2$. Probaremos con $N = 3$. Por lo tanto, suponemos

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} \tag{4-61}$$

(Si no se obtiene un resultado satisfactorio, debemos suponer que $N > 3$.) Si se observa que la entrada es una función escalón, de la ecuación (4-48) requerimos que

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z) \tag{4-62}$$

Observe que la presencia de un polo críticamente estable en $z = 1$ en la función de transferencia pulso de la planta $G(z)$ requiere que $1 - F(z)$ tenga un cero en $z = 1$. Sin embargo, la función $1 - F(z)$ ya tiene un término $1 - z^{-1}$, por lo tanto satisface el requisito de estabilidad.

El requisito de que la constante de error de velocidad estática sea de 4 seg^{-1} se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} G_D(z)G(z) \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{F(z)}{(1 - z^{-1})N(z)} \right] \\ &= \frac{F(1)}{N(1)} = 4 \end{aligned}$$

donde utilizamos la ecuación (4-50) con $q = 0$. Note que de la ecuación (4-62) tenemos que $F(1) = 1$. De ahí, K_v se puede escribir como sigue:

$$K_v = \frac{1}{N(1)} = 4 \tag{4-63}$$

Dado que la salida del sistema no debe mostrar componentes oscilatorias entre muestras una vez alcanzado el tiempo de asentamiento, requerimos que $U(z)$ sea de la siguiente forma:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b(z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots)$$

Debido a que la función de transferencia de planta $G_p(s)$ incluye un integrador, b deberá ser cero. Por lo tanto, tenemos

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

También, de la figura 4-39*b*), $U(z)$ puede estar dado por

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \frac{R(z)}{G(z)} \\ &= F(z) \frac{1 - 0.3679z^{-1}}{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}} \end{aligned}$$

Para que $U(z)$ sea serie en z^{-1} con tres términos, $F(z)$ debe tener la forma siguiente:

$$F(z) = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1} F_1(z) \tag{4-64}$$

donde $F_1(z)$ es un polinomio de primer grado en z^{-1}. Por lo tanto, $U(z)$ puede ser escrito como sigue:

$$U(z) = 2.7181(1 - 0.3679z^{-1})F_1(z) \tag{4-65}$$

De las ecuaciones (4-61) y (4-62) tenemos

$$1 - F(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} = (1 - z^{-1})N(z)$$

Si dividimos $1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - a_3z^{-3}$ entre $1 - z^{-1}$, el cociente es $1 + (1 - a_1)z^{-1} + (1 - a_1 - a_2)z^{-2}$ y el residuo es $(1 - a_1 - a_2 - a_3)z^{-3}$. Por lo tanto, $N(z)$ se determina como

$$N(z) = 1 + (1 - a_1)z^{-1} + (1 - a_1 - a_2)z^{-2} \tag{4-66}$$

y el residuo debe ser cero, de tal forma que

$$1 - a_1 - a_2 - a_3 = 0 \tag{4-67}$$

Observe que de la ecuación (4-63) requerimos que $N(1) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, al sustituir $z^{-1} = 1$ en la ecuación (4-66) obtenemos

$$2a_1 + a_2 = 2.75 \tag{4-68}$$

También la ecuación (4-64) se puede volver a escribir de la forma

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1} F_1(z)$$

Por lo tanto,

$$a_1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2} = (1 + 0.7181z^{-1})F_1(z)$$

La división del primer miembro de esta última ecuación entre $1 + 0.7181z^{-1}$ da el cociente $[a_1 - (a_2 - 0.7181a_1)z^{-1}]$ y el residuo $[a_3 - 0.7181(a_2 - 0.7181a_1)]z^{-2}$. Igualando el cociente con $F_1(z)$ y el residuo con cero, obtenemos

$$F_1(z) = a_1 + (a_2 - 0.7181a_1)z^{-1}$$

y

$$a_3 - 0.7181(a_2 - 0.7181a_1) = 0 \tag{4-69}$$

Si se resuelven las ecuaciones (4-67), (4-68) y (4-69) en función de a_1, a_2 y a_3 obtenemos

$$a_1 = 1.26184, \qquad a_2 = 0.22633, \qquad a_3 = -0.48816$$

Por lo tanto, $F(z)$ se determina como

$$F(z) = 1.26184z^{-1} + 0.22633z^{-2} - 0.48816z^{-3}$$

y

$$F_1(z) = 1.26184 - 0.67979z^{-1}$$

La ecuación (4-66) da

$$N(z) = 1 - 0.26184z^{-1} - 0.48817z^{-2}$$

La función de transferencia pulso del controlador digital $G_D(z)$ se determina a continuación a partir de la ecuación (4-50) como sigue:

$$\begin{aligned} G_D(z) &= \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1})N(z)} \\ &= \frac{(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}(1.26184 - 0.67980z^{-1})}{\dfrac{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}(1 - z^{-1})(1 - 0.26184z^{-1} - 0.48817z^{-2})} \\ &= 3.4298\frac{(1 - 0.5387z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{(1 - 0.8418z^{-1})(1 + 0.5799z^{-1})} \end{aligned}$$

Con el controlador digital así diseñado, la salida del sistema en respuesta a una entrada escalón unitario $r(t) = 1$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} C(z) &= F(z)R(z) \\ &= (1.26184z^{-1} + 0.22633z^{-2} - 0.48816z^{-3})\frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= 1.2618z^{-1} + 1.4882z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$c(0) = 0$$
$$c(1) = 1.2618$$
$$c(2) = 1.4882$$
$$c(k) = 1, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

La secuencia de la respuesta escalón unitario tiene un sobrepaso máximo de aproximadamente 50%. El tiempo de asentamiento es de 3 seg.

Observe que de la ecuación (4-65) tenemos

$$U(z) = 2.7181(1 - 0.3679z^{-1})(1.26184 - 0.67979z^{-1})$$
$$= 3.4298 - 3.1096z^{-1} + 0.6798z^{-2}$$

Por lo tanto, la señal de control $u(k)$ se convierte en cero para $k \geq 3$. Por lo tanto, en la respuesta no existen componentes oscilatorias entre muestras. La figura 4-41 muestra las gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta escalón unitario. Note que la suposición de que $N = 3$, es decir, la suposición de $F(z)$ dada por la ecuación (4-61), es satisfactoria.

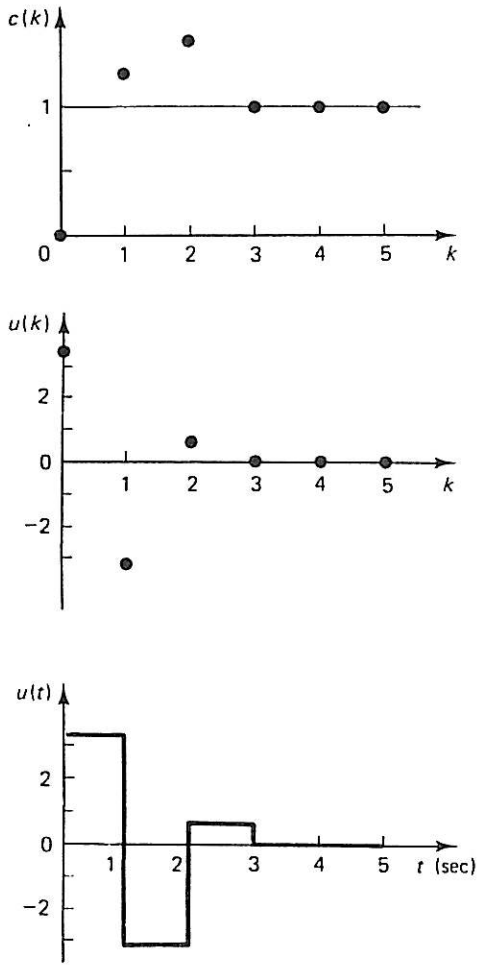


Figura 4-41 Gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta escalón unitario del sistema diseñado en el ejemplo 4-14.

A continuación investiguemos la respuesta de este sistema a una entrada rampa unitaria:

$$\begin{aligned} C(z) &= F(z)R(z) \\ &= (1.26184z^{-1} + 0.22633z^{-2} - 0.48816z^{-3})\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= 1.2618z^{-2} + 2.7500z^{-3} + 3.7500z^{-4} + \cdots \end{aligned}$$

En la respuesta rampa unitaria, la señal de control $U(z)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{F(z)}{G(z)}R(z) = \frac{F(z)}{G(z)}\frac{1}{1 - z^{-1}}\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ &= (3.4298 - 3.1096z^{-1} + 0.6798z^{-2})\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ &= 3.4298z^{-1} + 0.3202z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots \end{aligned}$$

La señal $u(k)$ se hace constante ($b = 1$) para $k \geq 3$. Por lo tanto, la salida del sistema no exhibirá componentes oscilatorias entre muestras. La figura 4-42 muestra las gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t para la respuesta rampa unitaria. Note que el error de estado permanente en la respuesta rampa unitaria es $e_{ss} = 1/K_v = \frac{1}{4}$ tal y como se indica en la figura 4-42.

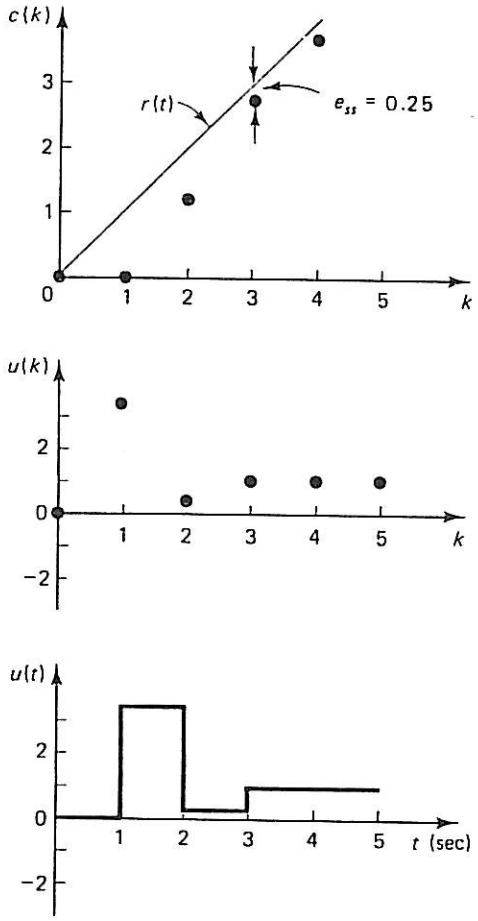


Figura 4-41 Gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta rampa unitaria, del sistema diseñado en el ejemplo 4-14.

Al comparar los sistemas de control digital diseñados en los ejemplos 4-13 y 4-14, notamos que este último mejora las características de respuesta rampa, a expensas del tiempo de asentamiento. (Este último sistema requiere de un período de muestreo adicional, para llegar al estado permanente.) Observe también que el primero tiene una mejor característica de respuesta escalón, es decir, un tiempo de asentamiento más corto, sin sobrepaso. Según los objetivos del sistema, pudiéramos escoger uno sobre el otro. Si se requieren buenas características de la respuesta rampa, entonces el sistema deberá diseñarse utilizando la entrada rampa como entrada de referencia, en lugar de la entrada escalón. (Vea el problema A-4-14.)

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-4-1

Muestre que en forma geométrica los patrones de los polos cerca de $z = 1$ en el plano z son similares a los patrones de los polos en el plano s cerca del origen.

Solución Observe que

$$z = e^{Ts}$$

Cerca del origen del plano s,

$$z = e^{Ts} = 1 + Ts + \tfrac{1}{2}T^2s^2 + \cdots$$

es decir

$$z - 1 \doteq Ts$$

Por lo tanto, los patrones geométricos de los polos cerca de $z = 1$ en el plano z son similares a los patrones de los polos en el plano s cerca del origen.

Problema A-4-2

Considere el sistema descrito por

$$y(k) - 0.6y(k-1) - 0.81y(k-2) + 0.67y(k-3) - 0.12y(k-4) = x(k)$$

donde $x(k)$ es la entrada y $y(k)$ es la salida del sistema. Determine la estabilidad del sistema.

Solución La función de transferencia pulso para el sistema es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.6z^{-1} - 0.81z^{-2} + 0.67z^{-3} - 0.12z^{-4}}$$

$$= \frac{z^4}{z^4 - 0.6z^3 - 0.81z^2 + 0.67z - 0.12}$$

Defina

$$P(z) = z^4 - 0.6z^3 - 0.81z^2 + 0.67z - 0.12$$

$$= a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4, \qquad a_0 > 0$$

Entonces, tenemos

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -0.6$$

$$a_2 = -0.81$$

$$a_3 = 0.67$$

$$a_4 = -0.12$$

Las condiciones de estabilidad de Jury son

1. $|a_4| < a_0$. Esta condición claramente está satisfecha.
2. $P(1) > 0$. Dado que

$$P(1) = 1 - 0.6 - 0.81 + 0.67 - 0.12 = 0.14 > 0$$

entonces la condición está satisfecha.

3. $P(-1) > 0$. Dado que

$$P(-1) = 1 + 0.6 - 0.81 - 0.67 - 0.12 = 0$$

la condición no se satisface. $P(-1) = 0$ implica que existe una raíz en $z = -1$.

4. $|b_3| > |b_0|$. Dado que

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.12 & 1 \\ 1 & -0.12 \end{vmatrix} = -0.9856$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.12 & 0.67 \\ 1 & -0.6 \end{vmatrix} = -0.5980$$

la condición está satisfecha.

5. $|c_2| > |c_0|$. En vista de que

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_0 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9856 & -0.5980 \\ -0.5980 & -0.9856 \end{vmatrix} = 0.6138$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9856 & 0.5196 \\ -0.5980 & 0.9072 \end{vmatrix} = -0.5834$$

la condición está satisfecha.

Del análisis anterior, concluimos que la ecuación característica $P(z) = 0$ incluye una raíz en $z = -1$ y las otras tres raíces están en el interior del círculo unitario con centro en el origen del plano z. El sistema es críticamente estable.

Problema A-4-3

Considere la siguiente ecuación característica:

$$P(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0 \tag{4-70}$$

Determine si alguna de las raíces de la ecuación característica se presenta o no por fuera del círculo unitario del plano z. Utilice la transformación bilineal y el criterio de estabilidad Routh.

Solución Sustituyamos $(w + 1)/(w - 1)$ en lugar de z en la ecuación característica dada, lo que resulta en

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1.3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.08\frac{w+1}{w-1} + 0.24 = 0$$

Al simplificar las fracciones multiplicando ambos términos de esta última ecuación por $(w - 1)^3$, obtenemos

$$-0.14w^3 + 1.06w^2 + 5.10w + 1.98 = 0$$

Al dividir ambos miembros de esta última ecuación entre –0.14, obtenemos

$$w^3 - 7.571w^2 - 36.43w - 14.14 = 0 \tag{4-71}$$

El arreglo de Routh para la ecuación (4-71) se convierte en:

one sign →	w^3	1	−36.43
change →	w^2	−7.571	−14.14
	w^1	−38.30	0
	w^0	−14.14	

El criterio de estabilidad de Routh establece que el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios en signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo. Dado que hay un cambio de signo en los coeficientes de la primera columna, existe una raíz en el semiplano derecho del plano w. Esto significa que la ecuación característica original dada por la ecuación (4-70) tiene una raíz fuera del círculo unitario del plano z. El sistema es inestable. (Compare la cantidad de cálculos necesarios en el presente método y la correspondiente en la prueba de estabilidad de Jury. Vea en particular el ejemplo 4-6.)

Problema A-4-4

Considere el sistema definido por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.7870z^{-1}}{1 - 0.8195z^{-1} + 0.6065z^{-2}}$$

$$= \frac{0.7870z}{z^2 - 0.8195z + 0.6065}$$

El período de muestreo T es 0.5 seg. Utilizando MATLAB, trace la respuesta rampa unitaria hasta $k = 20$.

Solución La entrada rampa unitaria u puede ser escrita en la forma

$$u = kT, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

En el programa MATLAB, esta entrada se puede dar como

```
k = 0:N;      u = [T * k];
```

donde N es el fin del proceso en consideración.

En el programa 4-3 de MATLAB se da un programa MATLAB para trazar la respuesta rampa unitaria del sistema considerado. La gráfica resultante aparece en la figura 4-43.

Problema A-4-5

Demuestre que si la ecuación característica para un sistema en lazo cerrado se escribe en la forma

$$1 + \frac{KB(z)}{A(z)} = 0$$

donde $A(z)$ y $B(z)$ no contienen k, entonces los puntos de ruptura de salida y de entrada pueden determinarse a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B^2(z)} = 0$$

donde los apóstrofos indican la diferenciación respecto a z.

MATLAB Programa 4-3

```
% ------ Unit-ramp response ------

% ***** Enter the numerator and denominator of the system *****

num = [0   0.7870   0];
den = [1   -0.8195   0.6065];

% ***** Enter k, unit-ramp input, filter command and plot
% command *****

k = 0:20;
u = [0.5*k];
y = filter(num,den,u);
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.5*k,'-')

% ***** Add grid, title, xlabel, and ylabel *****

grid
title('Unit-Ramp Response')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

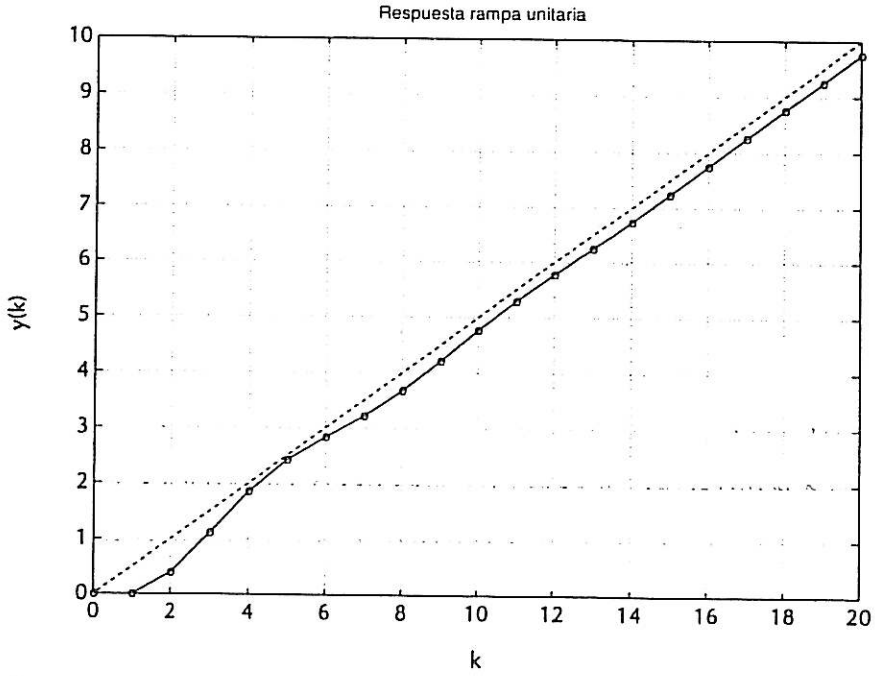


Figura 4-43 Respuesta rampa unitaria del sistema considerado en el problema A-4-4.

Solución Escribamos la ecuación característica en la forma

$$f(z) = A(z) + KB(z) = 0 \tag{4-72}$$

Suponga que $f(z) = 0$ tiene varias raíces del orden r. Entonces $f(z)$ puede escribirse en la forma

$$f(z) = (z - z_1)^r(z - z_2)\cdots(z - z_p)$$

Si diferenciamos esta ecuación con respecto a z y definimos $z = z_1$, obtenemos

$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_1} = 0$$

Esto significa que varias raíces de $f(z)$ satisfarán la ecuación siguiente:

$$\frac{df(z)}{dz} = 0$$

es decir

$$\frac{df(z)}{dz} = A'(z) + KB'(z) = 0 \tag{4-73}$$

donde

$$A'(z) = \frac{dA(z)}{dz}, \qquad B'(z) = \frac{dB(z)}{dz}$$

Al resolver la ecuación (4-73) en función de K, obtenemos

$$K = -\frac{A'(z)}{B'(z)}$$

Este valor particular de K dará como resultado varias raíces de la ecuación característica. Si sustituimos este valor de K en la ecuación (4-72), obtenemos

$$f(z) = A(z) - \frac{A'(z)}{B'(z)}B(z) = 0$$

es decir

$$B'(z)A(z) - A'(z)B(z) = 0 \tag{4-74}$$

Si esta última ecuación se resuelve en función de z, podrán obtenerse los puntos donde se presentan varias raíces. Por otra parte, en la ecuación (4-72) tenemos

$$K = -\frac{A(z)}{B(z)}$$

y

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B^2(z)}$$

Si dK/dz se define igual a cero, obtenemos la misma ecuación que la (4-74). Por lo tanto, los puntos de ruptura de salida y de entrada pueden simplemente determinarse a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

Deberá observarse que no todas las soluciones de la ecuación (4-74) o de $dK/dz = 0$ corresponden a

puntos reales de ruptura de salida o de entrada. Un punto como éste para el cual $dK/dz = 0$ es un punto real de ruptura de salida o de entrada si y sólo si K en este punto tiene un valor real y positivo.

Problema A-4-6

Discuta el procedimiento para diseñar compensadores de adelanto para sistemas de control digital mediante el método del lugar geométrico de las raíces.

Solución Consideraremos el sistema que se muestra en la figura 4-44 para analizar el procedimiento de diseño de los compensadores de adelanto. La compensación mediante adelanto es útil cuando el sistema es inestable para todos los valores de ganancia o estable, pero tiene características de respuesta transitoria no deseables. Para diseñar compensadores de adelanto, podemos utilizar el procedimiento siguiente:

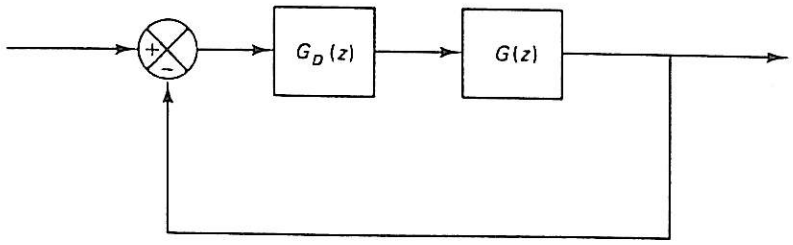


Figura 4-44 Sistema de control digital.

1. De las especificaciones de desempeño, determine la posición deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Mediante el dibujo de la gráfica del lugar geométrico de las raíces, asegúrese si que con el solo ajuste de ganancia se puede o no proporcionar los polos deseados en lazo cerrado. Si no se puede, calcule la deficiencia angular ϕ. Este ángulo adicional deberá ser proporcionado por el compensador de adelanto, si el nuevo lugar geométrico de las raíces ha de pasar a través de las localizaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado.
3. Suponga que el compensador de adelanto $G_D(z)$ es

$$G_D(z) = K_D\,\alpha\frac{1 + \alpha z}{1 + \alpha\tau z}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

4. Si no se especifican constantes del error estático, determine la localización del polo y del cero del compensador de adelanto de tal forma que el compensador de adelanto contribuya con el ángulo necesario ϕ. Si no se imponen otros requisitos en el sistema, trate de hacer el valor de α tan grande como sea posible. Un valor mayor de α da generalmente como resultado un valor más grande de K_v, lo que es deseable. (Si se especifica una constante de error estático particular, por lo regular es más sencillo utilizar el método de la respuesta en frecuencia.)
5. Determine la ganancia en lazo abierto del sistema compensado a partir de la condición de magnitud.

Una vez diseñado el compensador, verifique si todas las especificaciones de desempeño han sido cumplidas o no. Si el sistema compensado no cumple con las especificaciones de desempeño, entonces repita el procedimiento de diseño, ajustando el polo y el cero del compensador hasta que todas las especificaciones se hayan cumplido. Si se requiere de una constante de error estático grande, ponga en cascada una red de atraso o altere el compensador de adelanto a un compensador de atraso-adelanto.

Problema A-4-7

Dibuje los diagramas del lugar geométrico de las raíces en el plano z para el sistema que se muestra en la figura 4-45 en el caso de los tres siguientes períodos de muestreo: $T = 1$ seg, $T = 2$ seg y $T = 4$ seg.

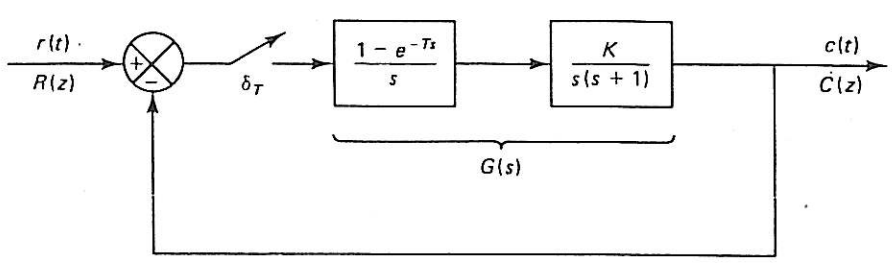


Figura 4-45 Sistema de control digital.

Solución Primero obtenemos la transformada z de $G(s)$. Refiriéndonos al ejemplo 3-5, resulta

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{K}{s^2(s+1)}\right] \\ &= \frac{K[(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}]}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} \end{aligned} \tag{4-75}$$

A continuación construimos los diagramas del lugar geométrico de las raíces para los tres casos en consideración.

1. *Período de muestreo* $T = 1$: para $T = 1$, la ecuación (4-75) se convierte en

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{K[(1 - 1 + e^{-1})z^{-1} + (1 - e^{-1} - e^{-1})z^{-2}]}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-1}z^{-1})} \\ &= \frac{0.3679K(z + 0.7181)}{(z - 1)(z - 0.3679)} \end{aligned}$$

   Observe que $G(z)$ tiene un cero en $z = -0.7181$ y polos en $z = 1$ y en $z = 0.3679$. El punto de ruptura de salida está en $z = 0.6479$, y el de ruptura de entrada en $z = -2.0841$. El diagrama del lugar geométrico de las raíces para este caso se muestra en la figura 4-46*a*). El valor de ganancia K en cualquier punto de los lugares geométricos de las raíces puede determinarse a partir de la condición de magnitud

$$K = \left|\frac{(z - 1)(z - 0.3679)}{0.3679(z + 0.7181)}\right|$$

   Si seleccionamos un punto z en los lugares geométricos de las raíces, el valor de K en dicho punto se puede calcular si se sustituye el valor de z en esta última ecuación. (Esto significa que con este valor de K este punto en particular se convierte en un polo en lazo cerrado.) La ganancia crítica se encuentra como $K = 2.3925$.

2. *Período de muestreo* $T = 2$: para el período de muestreo $T = 2$, tenemos de la ecuación (4-75)

$$G(z) = \frac{1.1353K(z + 0.5232)}{(z - 1)(z - 0.1353)}$$

   La función de transferencia pulso $G(z)$ en este caso tiene un cero en $z = -0.5232$ y polos en $z = 1$ y en $z = 0.1353$. El punto de ruptura de salida está en $z = 0.4783$ y el de entrada en $z = -0.5247$. El diagrama del lugar geométrico de las raíces para este caso aparece en la figura 4-46*b*). La ganancia crítica K para estabilidad es $K = 1.4557$.

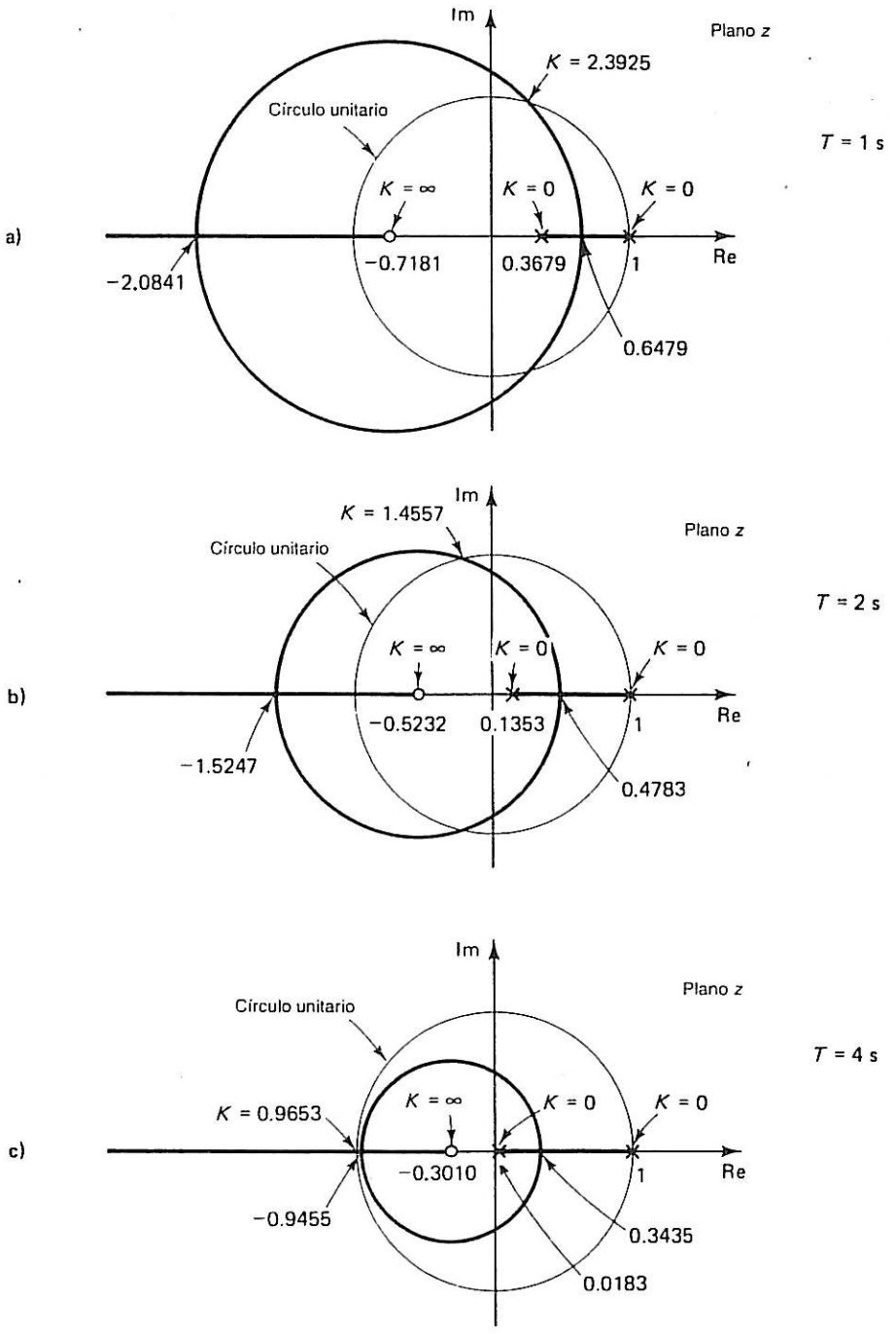


Figura 4-46 Diagramas del lugar geométrico de las raíces para el sistema mostrado en la figura 4-45 cuando *a*) $T = 1$ seg, *b*) $T = 2$ seg y *c*) $T = 4$ seg.

3. *Período de muestreo* $T = 4$: para el caso en que $T = 4$, la ecuación (4-75) da

$$G(z) = \frac{3.0183K(z + 0.3010)}{(z - 1)(z - 0.0183)}$$

El punto de ruptura de salida está en $z = 0.3435$ y el de entrada está en $z = -0.9455$. El diagrama del

lugar geométrico de las raíces se muestra en la figura 4-46*c*). La ganancia crítica para la estabilidad es $K = 0.9653$.

De los tres casos considerados, note que mientras más pequeño es el período de muestreo, más grande será la ganancia crítica K para la estabilidad.

Problema A-4-8

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-47, donde la planta es del primer orden y tiene un tiempo muerto de 2 seg. El período de muestreo se supone de 1 seg, es decir $T = 1$.

Diseñe un controlador digital PI tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.5 y el número de muestras por cada ciclo de la oscilación senoidal amortiguada sea 10. Obtenga la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario. También, obtenga la constante de error de velocidad estática K_v y encuentre el error en estado permanente en respuesta a la entrada rampa unitaria.

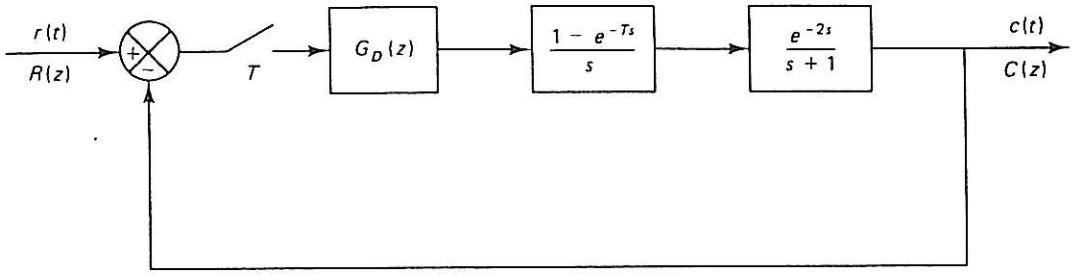


Figura 4-47 Sistema de control digital.

Solución La función de transferencia pulso de la planta por un retén de orden cero es

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{e^{-2s}}{s + 1}\right] \\ &= (1 - z^{-1})z^{-2}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s + 1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})z^{-2}\frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-1}z^{-1})} \\ &= \frac{0.6321z^{-3}}{1 - 0.3679z^{-1}} = \frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)} \end{aligned}$$

El controlador digital PI tiene la siguiente función de transferencia pulso:

$$\begin{aligned} G_D(z) &= K_p + K_i\frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= (K_p + K_i)\frac{z - \dfrac{K_p}{k_p + K_i}}{z - 1} \end{aligned}$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto se convierte en

$$G_D(z)G(z) = \frac{(K_p + K_i)\left(z - \dfrac{K_p}{K_p + K_i}\right)}{z - 1}\frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)}$$

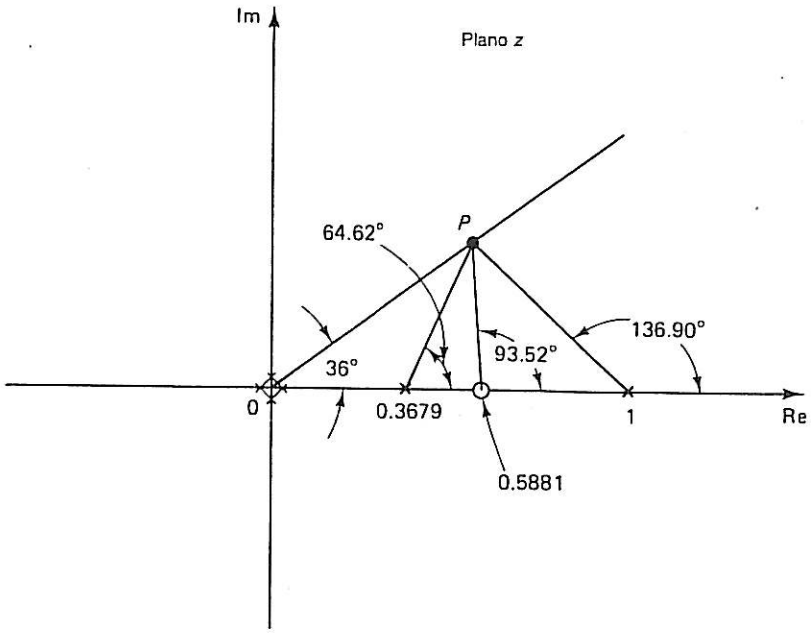


Figura 4-48 Localizaciones del polo y del cero en el plano z del sistema considerado en el problema A-4-8.

Localizamos los polos en lazo abierto en el plano z tal y como se muestra en la figura 4-48. En este caso está implicado un cero en lazo abierto, en este momento su localización es desconocida.

Dado que se requiere tener 10 muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada, el polo dominante en lazo cerrado en la parte superior del plano z debe presentarse sobre una línea desde el origen con un ángulo de 360°/10 = 36°. De las ecuaciones (4-1) y (4-2) vueltas a escribir en la forma

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

$$\angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

la localización deseada del polo en lazo cerrado puede determinarse como sigue: al notar que $\angle z = 36°$, tenemos

$$2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} = \frac{2\pi}{10}$$

es decir $\omega_d/\omega_s = 0.1$. Dado que ζ está definido como 0.5, tenemos

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi \times 0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}\frac{1}{10}\right) = e^{-0.3628} = 0.6958$$

El polo en lazo cerrado está localizado en el punto P en la figura 4-48, donde (en dicho punto P)

$$z = 0.6958 \angle 36°$$
$$= 0.5629 + j0.4090$$

(Note que este punto es la intersección del lugar geométrico de $\zeta = 0.5$ y la línea desde el origen que tiene un ángulo de 36°.)

Si el punto P debe ser una localización de polo en lazo cerrado en la parte superior del plano z, entonces la deficiencia angular en el punto P es

$$-36° - 36° - 136.90° - 64.62° + 180° = -93.52°$$

El cero del controlador debe contribuir con +93.52°. Esto significa que el cero del controlador digital deberá colocarse en $z = 0.5881$. Por lo tanto,

$$\frac{K_p}{K_p + K_i} = 0.5881 \tag{4-76}$$

De ahí, el controlador PI queda determinado como sigue:

$$G_D(z) = K\frac{z - 0.5881}{z - 1}$$

donde $K = K_p + K_i$. La constante de ganancia K se determina a partir de la condición de magnitud:

$$K\left|\frac{z - 0.5881}{z - 1}\frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)}\right|_{z=0.5629+j0.4090} = 1$$

es decir

$$K = 0.5070$$

Por lo tanto,

$$K_p + K_i = 0.5070 \tag{4-77}$$

De las ecuaciones (4-76) y (4-77) encontramos que

$$K_p = 0.2982 \qquad \text{y} \qquad K_i = 0.2088$$

Y, por lo tanto, el controlador PI que acabamos de diseñar puede estar dado por

$$G_D(z) = 0.5070\frac{1 - 0.5881z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Por último, la función de transferencia pulso en lazo abierto se convierte en

$$G_D(z)G(z) = 0.5070\left(\frac{1 - 0.5881z^{-1}}{1 - z^{-1}}\frac{0.6321z^{-3}}{1 - 0.3679z^{-1}}\right)$$
$$= \frac{0.3205(1 - 0.5881z^{-1})z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

La función de transferencia pulso en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.3205z^{-3} - 0.1885z^{-4}}{1 - 1.3679z^{-1} + 0.3679z^{-2} + 0.3205z^{-3} - 0.1885z^{-4}}$$

La respuesta $c(kT)$ a la entrada escalón unitario se puede obtener fácilmente mediante el uso de MATLAB. Un programa MATLAB para la graficación de la respuesta escalón unitario aparece en el programa 4-4 de MATLAB. La gráfica resultante se muestra en la figura 4-49.

MATLAB Programa 4-4

```
% ——— Respuesta escalón unitario ———

num = [0   0   0   0.3205   -0.1885];
den = [1   -1.3679   0.3679   0.3205   -0.1885];
r = ones(1,51);
v = [0   50   0   1.6];
axis(v);
k = 0:50;
c = filter(num,den,r);
plot(k,c,'o')
grid
title('Respuesta escalón unitario')
xlabel('k')
ylabel('(c(k)')
```

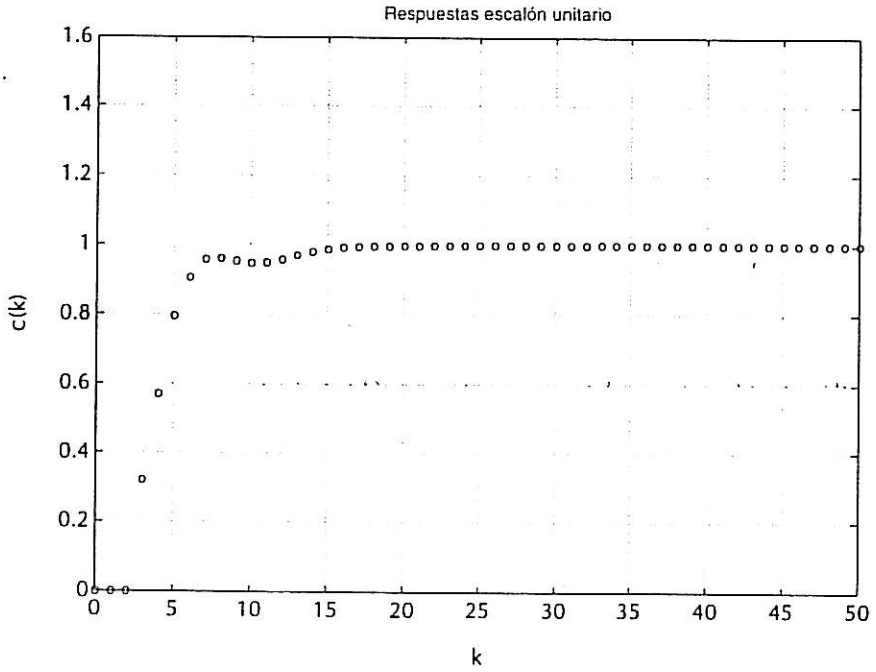


Figura 4-49 Gráfica de $c(kT)$ en función de kT para el sistema diseñado en el problema A-4-8. (Período de muestreo $T = 1$ seg.)

Problema A-4-9

Considere el sistema que se muestra en la figura 4-50. Deseamos diseñar un controlador digital, de tal forma que los polos dominantes del sistema en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.5. También deseamos que el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada sea 8. Suponga que el período de muestreo T es 0.2 seg.

Utilizando el método del lugar geométrico de las raíces en el plano z, determine la función de transferencia pulso del controlador digital. Obtenga la respuesta del sistema diseñado en función de una entrada escalón unitario. También obtenga la constante de error de velocidad estática K_v.

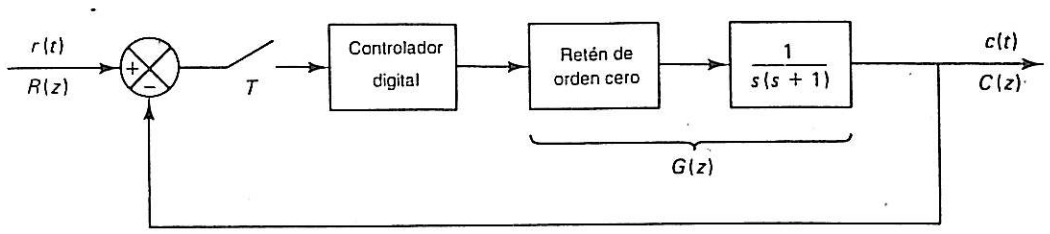


Figura 4-50 Sistema de control digital.

Solución Localizaremos en primer término los polos en lazo cerrado deseados en el plano z. Refiriéndonos a las ecuaciones (4-1) y (4-2), para un lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante, tenemos

$$|z| = e^{-\zeta T\omega_n} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \tag{4-78}$$

y

$$\angle z = T\omega_d = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} = \theta$$

Dado que requerimos de ocho muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada, el polo dominante en lazo cerrado en la parte superior del plano z deberá estar localizado sobre una línea con un ángulo de 45° y que pase a través del origen tal y como se muestra en la figura 4-51. (Note que el número de muestras por ciclo es de $360°/\theta$. Por lo tanto, ocho muestras por ciclo requiere que $\theta = 360°/8 = 45°$.) Entonces,

$$\angle z = 45° = \frac{\pi}{4} = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

lo que nos da

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = \frac{1}{8} \tag{4-79}$$

Dado que el periodo de muestreo T se ha especificado como 0.2 seg, tenemos

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$$

Por lo tanto,

$$\omega_d = \frac{1}{8}\omega_s = \frac{10\pi}{8} = 3.9270$$

Al establecer $\zeta = 0.5$ y sustituir la ecuación (4-79) en la ecuación (4-78), obtenemos

$$|z| = e^{-0.4535} = 0.6354$$

Por lo tanto, podemos localizar el polo en lazo cerrado deseado en la parte superior del plano z, de la misma manera como se muestra mediante el punto P de la figura 4-51. Observe que en el punto P

$$|z|\angle z = 0.6354\angle 45° = 0.4493 + j0.4493$$

A continuación, obtenemos la función de transferencia de pulso $G(z)$ de la planta precedida por un retén de orden cero:

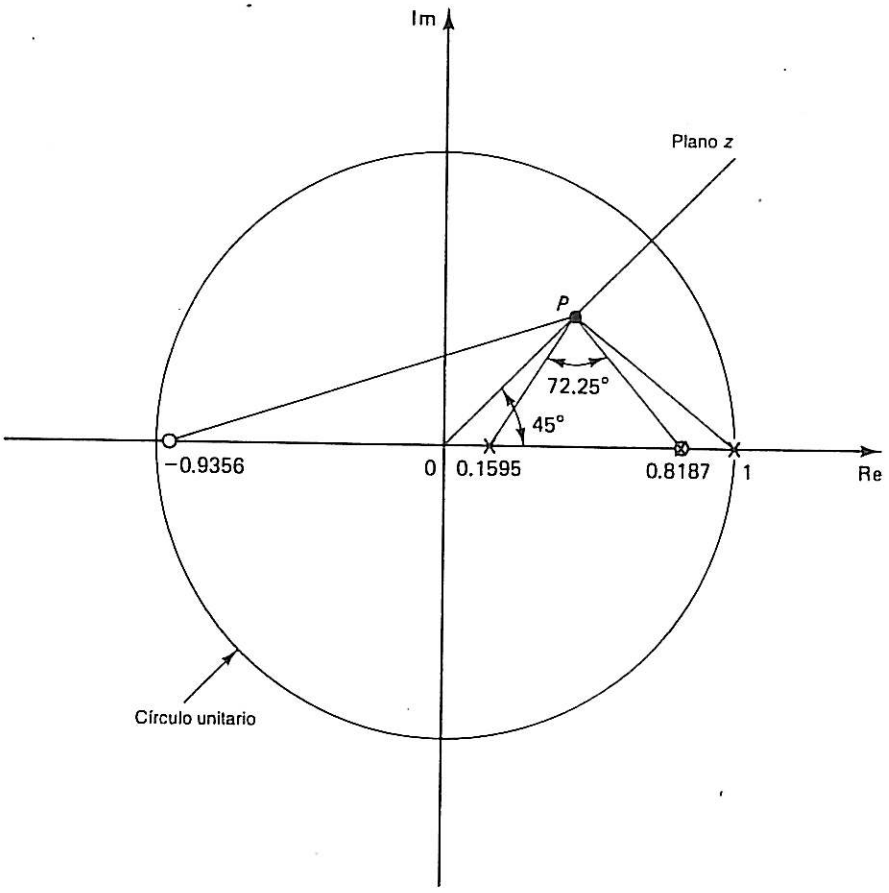


Figura 4-51 Localizaciones de polo y cero para el sistema considerado en el problema A-4-9.

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left[\frac{0.2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-0.2}z^{-1}}\right] \\ &= \frac{0.01873(1 + 0.9356z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8187z^{-1})} = \frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)} \end{aligned}$$

Podemos ahora localizar los polos en lazo abierto y un cero en el plano z, tal y como se muestra en la figura 4-51. Dado que el punto P es la localización del polo en lazo cerrado deseado, la deficiencia angular en el punto P puede calcularse fácilmente, como sigue:

$$-140.79° - 129.43° + 17.97° + 180° = -72.25°$$

La función de transferencia pulso del controlador deberá contribuir con 72.25°.

Escojamos la función de transferencia pulso del controlador como

$$G_D(z) = K\frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

y el cero del controlador a fin de cancelar el polo en $z = 0.8187$. De ahí se puede determinar fácilmente el polo del controlador de la condición de ángulo como $z = 0.1595$. Entonces, tenemos

$$G_D(z) = K\frac{1 - 0.8187z^{-1}}{1 - 0.1595z^{-1}}$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto del sistema se obtiene, por lo tanto, como sigue:

$$\begin{aligned} G_D(z)G(z) &= K\frac{1 - 0.8187z^{-1}}{1 - 0.1595z^{-1}}\frac{0.01873(1 + 0.9356z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8187z^{-1})} \\ &= K\frac{0.01873(1 + 0.9356z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.1595z^{-1})(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

La constante de ganancia K puede ser determinada a partir de la condición de magnitud:

$$K\left|\frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 0.1595)(z - 1)}\right|_{z=0.4493+j0.4493} = 1$$

es decir

$$K = 13.934$$

De ahí, hemos determinado que la función de transferencia pulso del controlador digital es

$$G_D(z) = 13.934\left(\frac{1 - 0.8187z^{-1}}{1 - 0.1595z^{-1}}\right)$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto es

$$G_D(z)G(z) = \frac{0.2610(1 + 0.9356z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.1595z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

La función de transferencia pulso en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} \\ &= \frac{0.2610z^{-1} + 0.2442z^{-2}}{1 - 0.8985z^{-1} + 0.4037z^{-2}} \end{aligned}$$

Debido a la cancelación de un polo en la planta y en el cero del controlador, el orden del sistema ha quedado reducido de tercero a segundo. El sistema tiene sólo un par de polos en lazo cerrado complejos conjugados.

La figura 4-52 muestra la secuencia de la respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT. El trazo muestra que el sobrepaso máximo es de alrededor de 16.5%.

Finalmente, se determina la constante de error de velocidad estática K_v como sigue:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{1 - z^{-1}}{T}G_D(z)G(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{1 - z^{-1}}{0.2}\frac{0.2610(1 + 0.9356z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.1595z^{-1})(1 - z^{-1})}\right] \\ &= 3.005 \end{aligned}$$

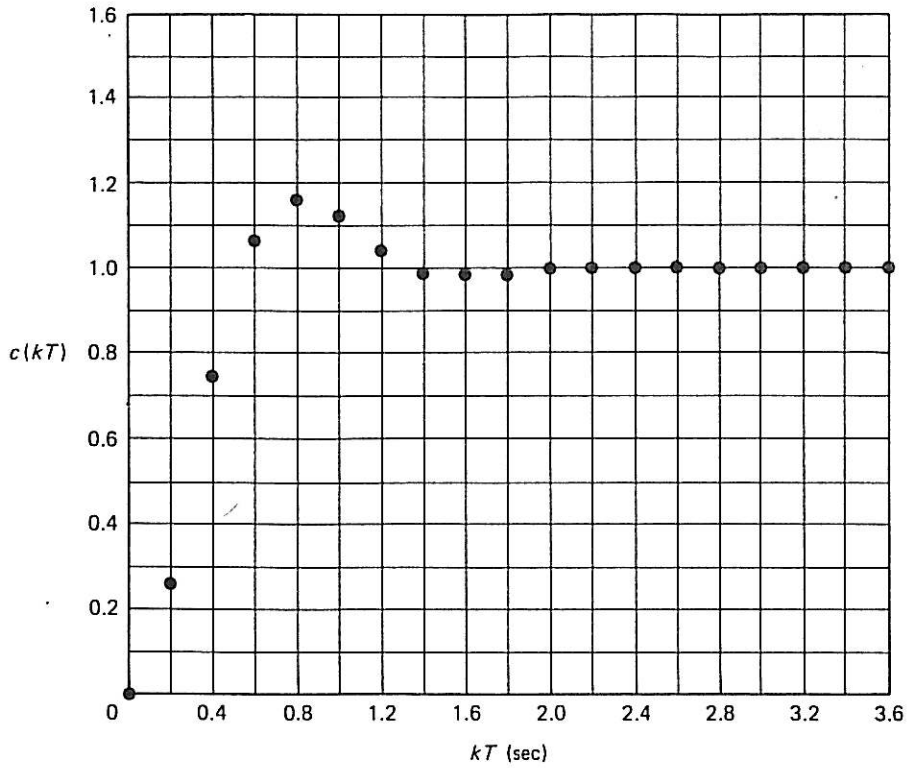


Figura 4-52 Gráfica de la secuencia de la respuesta escalón unitario $c(kT)$ en función de kT para el sistema diseñado en el problema A-4-9

Problema A-4-10

Considere el sistema mostrado en la figura 4-53. Suponga que las especificaciones de desempeño están dadas en términos de margen de fase, margen de ganancia, constantes de error de velocidad estática y similares. Defina los procedimientos para el diseño de los compensadores de adelanto y de los compensadores de atraso mediante el método de respuesta en frecuencia.

Solución Los procedimientos para el diseño de compensadores de adelanto y de los compensadores de atraso pueden definirse como sigue:

COMPENSADOR DE ADELANTO

1. Suponga la forma siguiente para el compensador de adelanto:

$$G_D(w) = K_D \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha \tau w}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

La función de transferencia en lazo abierto para el sistema compensado puede escribirse en la forma

$$G_D(w)G(w) = K_D \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha \tau w} G(w)$$

$$= \frac{1 + \tau w}{1 + \alpha \tau w} G_1(w)$$

donde $G_1(w) = K_D G(w)$. Determine la ganancia de K_D que satisfaga el requisito de la constante de error de la velocidad estática dada.

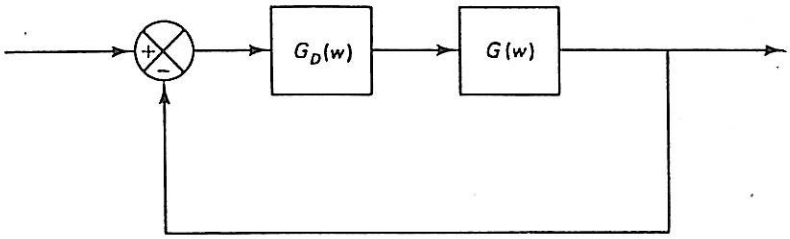


Figura 4-53 Sistema de control digital en el plano w.

2. Utilizando la ganancia K_D así determinada, dibuje un diagrama Bode de $G_1(w)$, el sistema ajustado por ganancia, pero no compensado. Evalúe el margen de fase.
3. Determine el ángulo de adelanto de fase necesario ϕ a añadirse al sistema.
4. Añada de 5° ~ 12° a ϕ para compensar el corrimiento de la frecuencia de cruce de ganancia. Defina este ϕ añadido como ϕ_m. Determine el factor de atenuación α a partir de la ecuación siguiente:

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

5. Determine el punto de frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\nu)$ es igual a $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$. Escoja esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde a $\nu_m = 1/(\sqrt{\alpha}\tau)$, y a esta frecuencia se presenta el corrimiento máximo de fase ϕ_m.
6. Determine las frecuencias de esquina del compensador de adelanto como sigue:

$$\text{Cero del compensador de adelanto:} \quad \nu = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{Polo del compensador de adelanto:} \quad \nu = \frac{1}{\alpha\tau}$$

7. Verifique el margen de ganancia para asegurarse de que es satisfactorio. De lo contrario, repita el proceso de diseño modificando la localización de los polos y de los ceros del compensador hasta que se obtenga un resultado satisfactorio.

La función primordial del compensador de adelanto es proporcionar atenuación en el rango de altas frecuencias para un margen de fase suficiente para el sistema. Las características del atraso de fase no tienen consecuencias en la compensación mediante atraso.

COMPENSACIÓN DE ATRASO

1. Suponga la forma siguiente para el compensador de atraso:

$$G_D(w) = K_D \frac{1 + \tau w}{1 + \beta\tau w} \qquad (\beta > 1)$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado puede escribirse como

$$G_D(w)G(w) = K_D \frac{1 + \tau w}{1 + \beta\tau w} G(w)$$

$$= \frac{1 + \tau w}{1 + \beta\tau w} G_1(w)$$

donde $G_1(w) = K_D G(w)$. Determine la ganancia K_D que satisfaga el requisito de la constante de error de velocidad estática dada.

2. Si el sistema no compensado $G_1(w)$ no satisface las especificaciones referentes a los márgenes de fase y de ganancia, entonces encuentre el punto de frecuencia donde el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a $-180°$ más el margen de fase requerido. El margen de fase requerido es el margen de fase especificado más 5° a 12°. (La adición de 5° a 12° compensa el atraso de fase del compensador de atraso.) Escoja esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.
3. A fin de evitar efectos perjudiciales de atraso de fase en razón del compensador de atraso, el polo y el cero del compensador de atraso deberán estar localizados bastante más abajo que la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por lo tanto, escoja la frecuencia de esquina $\nu = 1/\tau$ (correspondiente al cero del compensador de atraso de fase) una decena por debajo de la nueva frecuencia de cruce.
4. Determine la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud hacia abajo hasta 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Notando que esta atenuación es $-20 \log \beta$, determine el valor de β. Entonces la otra frecuencia de esquina (que corresponde al polo del compensador de atraso) queda determinada a partir de $\nu = 1/(bt)$.

Precaución. Una vez diseñado el compensador de atraso en el plano w, $G_D(w)$ deberá transformarse en el compensador de atraso en el plano z, $G_D(z)$. Note que el polo y el cero en el compensador de atraso en el plano z están muy cerca uno de otro. (Están cerca del punto $z = 1$.) Ya que los coeficientes del filtro se deben realizar mediante palabras binarias que utilizan un número limitado de bits, si el número de bits empleado resulta insuficiente, las localizaciones de polos y ceros del filtro pueden no realizarse tal y como se desea, y el compensador resultante podría no comportarse como se espera, Es importante que el polo y el cero del compensador de atraso se presenten en un número finito de puntos discretos asignables.

Problema A-4-11

Diseñe un controlador digital para el sistema que se muestra en la figura 4-54. Utilice el método del diagrama Bode en el plano w. Las especificaciones de diseño consisten en que el margen de fase debe ser de 55°, el margen de ganancia por lo menos de 10 dB, y la constante de error de velocidad estática de 5 seg^{-1}. El período de muestreo se especifica como 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. Una vez diseñado el controlador, trace un diagrama del lugar geométrico de las raíces. Localice los polos en lazo cerrado del diagrama y encuentre el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.

Solución La transformada de z de la planta precedida por un retén de orden cero es

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+2)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] \\ &= 0.004683z^{-1}\frac{1 + 0.9355z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.8187z^{-1})} \\ &= (0.004683)\frac{z + 0.9355}{(z - 1)(z - 0.8187)} \end{aligned}$$

Transformemos $G(z)$ en $G(w)$ utilizando la transformación bilineal siguiente:

$$z = \frac{1 + (Tw/2)}{1 - (Tw/2)} = \frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}$$

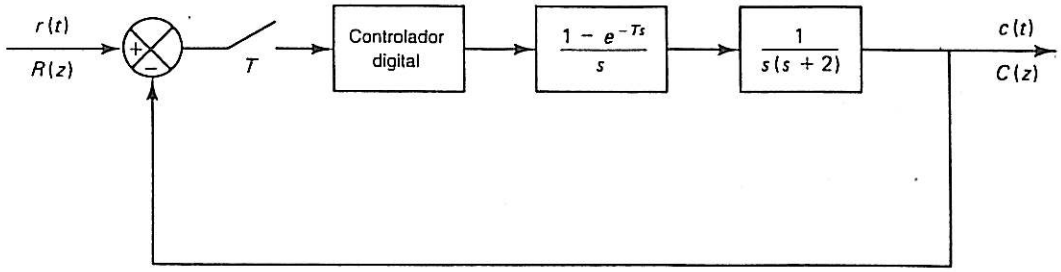


Figura 4-54 Sistema de control digital.

Al sustituir esta última ecuación en $G(z)$, obtenemos

$$G(w) = \frac{0.004683\left(\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} + 0.9355\right)}{\left(\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} - 1\right)\left(\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} - 0.8187\right)}$$
$$= \frac{0.5(1 + 0.001666w)(1 - 0.05w)}{w(1 + 0.5016w)}$$

El diagrama Bode de $G(jv)$ aparece en la figura 4-55.

Escogeremos ahora la función de transferencia del controlador en la forma

$$G_D(w) = K_D\frac{1 + \tau w}{1 + \alpha\tau w} = K_D\frac{1 + \dfrac{w}{a}}{1 + \dfrac{w}{b}}$$

donde $a = 1/t$ y $b = 1/(\alpha\tau)$. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G_D(w)G(w) = K_D\frac{1 + (w/a)}{1 + (w/b)}\frac{0.5(1 + 0.001666w)(1 - 0.05w)}{w(1 + 0.5016w)}$$

La constante de error de velocidad estática requerida de K_v. Es 5 seg^{-1}. O de ahí,

$$K_v = \lim_{w\to 0}[wG_D(w)G(w)] = 0.5K_D = 5$$

a partir de la cual determinamos que

$$K_D = 10$$

Utilizando una técnica de diseño convencional, se determina la función de transferencia del controlador digital como

$$G_D(w) = 10\left(\frac{1 + \dfrac{w}{1.994}}{1 + \dfrac{w}{12.5}}\right)$$

Por lo tanto, la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_D(w)G(w) = 10\left(\frac{1 + \dfrac{w}{1.994}}{1 + \dfrac{w}{12.5}}\right)\frac{0.5(1 + 0.001666w)(1 - 0.05w)}{w(1 + 0.5016w)}$$

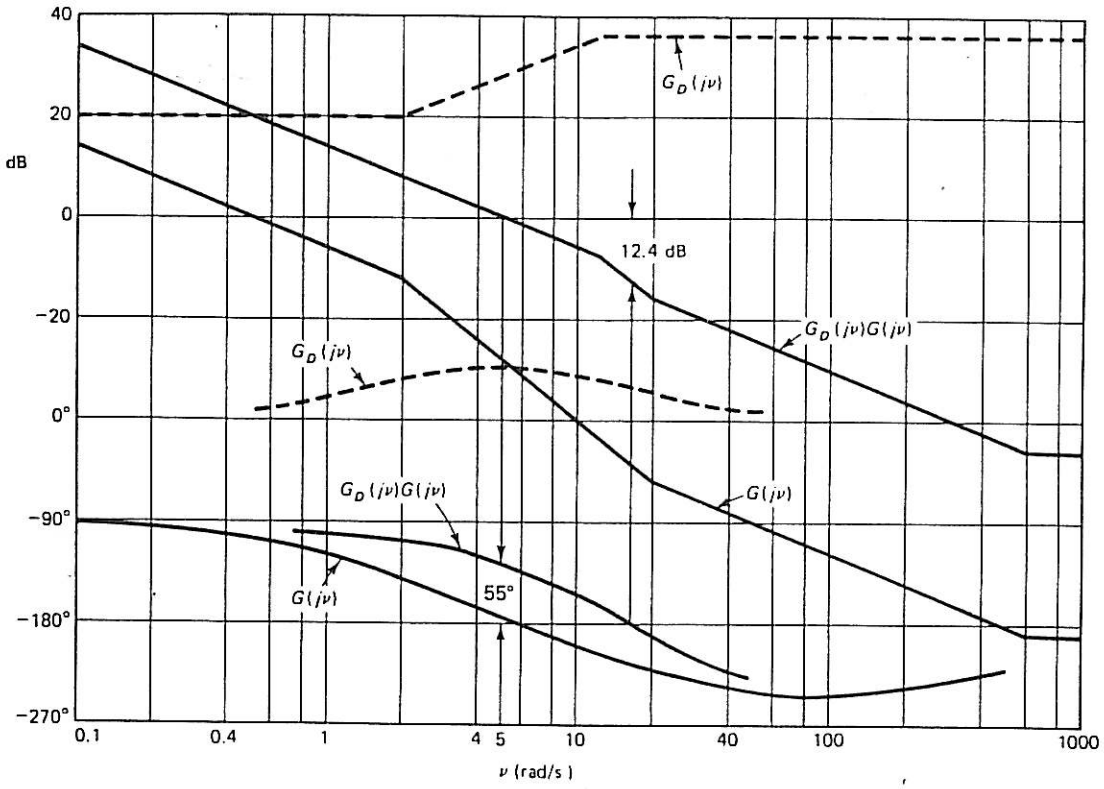


Figura 4-55 Diagrama Bode correspondiente al sistema considerado en el problema A-4-11

Esta función de transferencia en lazo abierto da el margen de fase de aproximadamente 55° y el margen de ganancia de alrededor de 12.4 dB. La constante de error de velocidad estática K_v es 5 seg^{-1}. Por lo tanto, se satisfacen todos los requisitos y la función de transferencia del controlador diseñado $G_D(w)$ es satisfactoria.

A continuación, transformamos $G_D(w)$ en $G_D(z)$. Se deberá utilizar la siguiente transformación bilineal

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1} = 20\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Entonces

$$G_D(z) = 10\left(\frac{1+\dfrac{20}{1.994}\dfrac{z-1}{z+1}}{1+\dfrac{20}{12.5}\dfrac{z-1}{z+1}}\right)$$

$$= 42.423\left(\frac{z-0.8187}{z-0.2308}\right) = 42.423\left(\frac{1-0.8187z^{-1}}{1-0.2308z^{-1}}\right)$$

La función de transferencia pulso en lazo abierto ahora se convierte en

$$G_D(z)G(z) = \frac{0.1987(z+0.9355)}{(z-0.2308)(z-1)}$$

La figura 4-56 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema. Al usar la condición de magnitud, encontramos que los polos en lazo cerrado están localizados en $z = 0.516 \pm j0.388$. En el diagrama del lugar geométrico de las raíces, se superponen los lugares geométricos de ζ

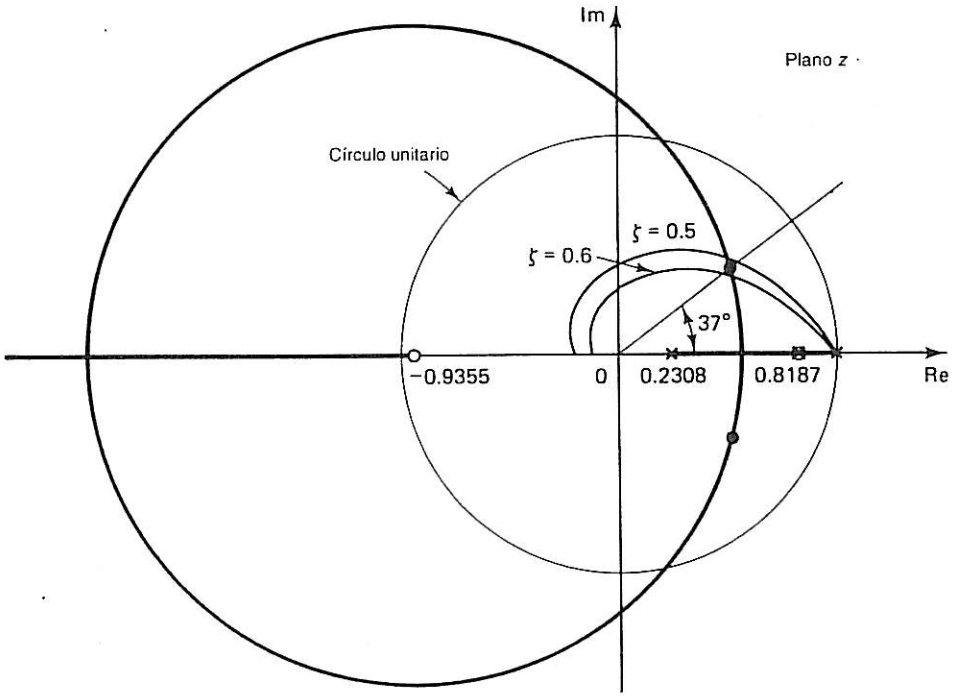


Figura 4-56 Diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema diseñado en el problema A-4-11.

constante para $\zeta = 0.5$ y para $\zeta = 0.6$. Se puede ver del diagrama que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo cerrado es de aproximadamente 0.55.

La línea que conecta el polo en lazo cerrado en la parte superior del plano z con el origen tiene un ángulo de 37°. Por lo tanto, el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada es $360°/37° = 9.73$.

Problema A-4-12

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-57, donde la función de transferencia de la planta es $1/s^2$. Diseñe un controlador digital en el plano w, tal que el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia sea de por lo menos 10 dB. El período de muestreo es 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. Después de diseñar el controlador, obtenga la constante de error de velocidad estática K_v. También, obtenga la respuesta del sistema diseñado ante una entrada escalón unitario.

Solución Primero obtendremos la transformada z precedida por un retén de orden cero:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s^2}\right] = (1 - z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$= (1 - z^{-1})\frac{T^2(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}$$

$$= \frac{0.005(1 + z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.005(z + 1)}{(z - 1)^2}$$

A continuación, utilizando la transformación bilineal dada por

$$z = \frac{1 + (Tw/2)}{1 - (Tw/2)} = \frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}$$

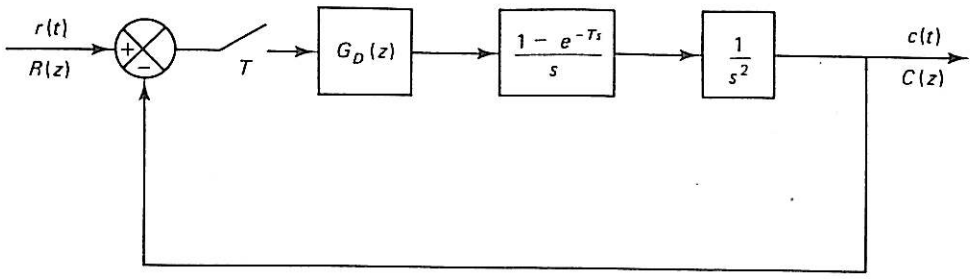


Figura 4-57 Sistema de control digital.

transformamos $G(z)$ en $G(w)$:

$$G(w) = \frac{0.005\left(\dfrac{1 + 0.005w}{1 - 0.05w} + 1\right)}{\left(\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} - 1\right)^2} = \frac{1 - 0.05w}{w^2}$$

Por lo tanto,

$$G(j\nu) = \frac{1 - 0.05j\nu}{(j\nu)^2}$$

La figura 4-58 muestra el diagrama Bode de $G(j\nu)$ que se obtiene de esta manera. Observe que el margen de fase es –12°. Será necesario añadir una red de adelanto para conseguir el margen de fase y el margen

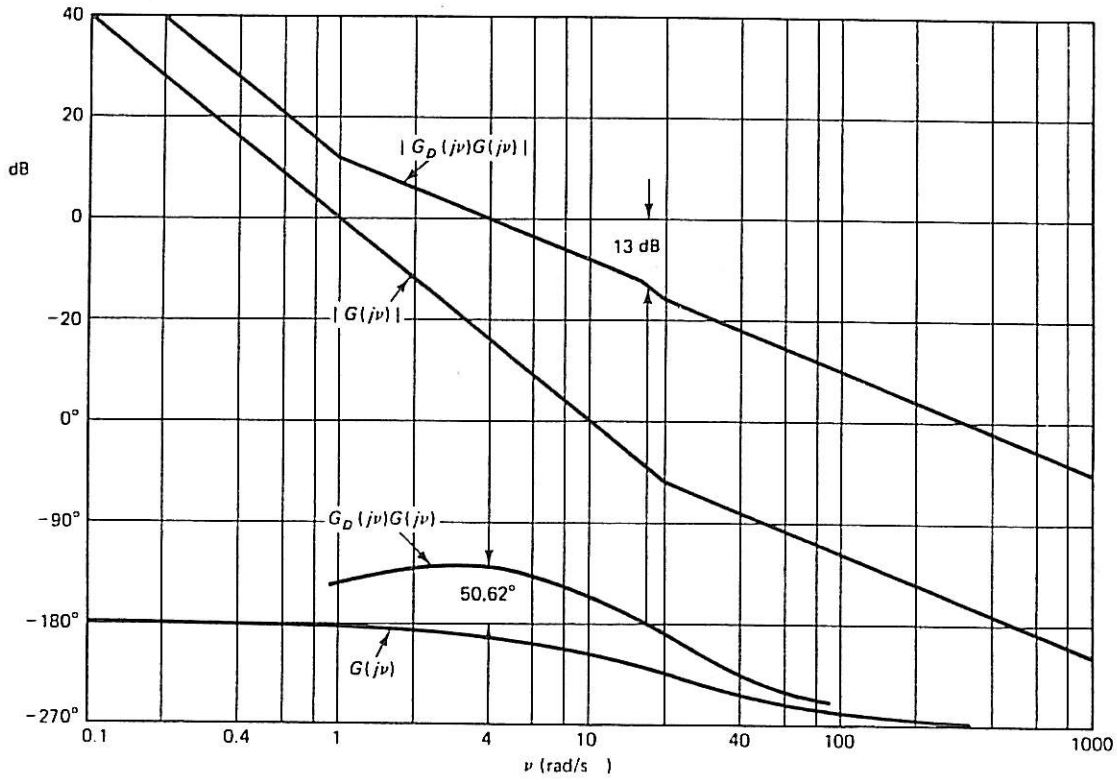


Figura 4-58 Diagrama Bode para el sistema considerado en el problema A-4-12.

de ganancia requeridos. Mediante la aplicación de una técnica convencional de diseño, puede verse que la red de adelanto siguiente satisface los requisitos:

$$G_D(w) = 4\frac{1 + w}{1 + (w/16)} = 64\left(\frac{w + 1}{w + 16}\right)$$

La adición de esta red de adelanto modifica el diagrama Bode. La frecuencia de cruce de ganancia se recorre a $\nu = 4$. Note que el adelanto de fase máximo ϕ_m que puede producir esta red de adelanto es 61.93°, ya que

$$\phi_m = \sin^{-1}\frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \text{sen}^{-1}\,0.8824 = 61.93°$$

A la frecuencia de cruce de ganancia $\nu = 4$, el ángulo de fase de $G_D(j\nu)G(j\nu)$ se convierte en $-191.31° + 61.93° = 129.38°$. Por lo tanto, el margen de fase es 50.62°. El margen de ganancia se determina aproximadamente en 12 dB. Por lo tanto, se satisfacen las especificaciones de diseño dadas.

Ahora transformamos la función de transferencia del controlador $G_D(w)$ en $G_D(z)$. Mediante la transformación bilineal

$$w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{0.1}\frac{z - 1}{z + 1} = 20\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)$$

obtenemos

$$G_D(z) = 64\frac{20\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) + 1}{20\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) + 16} = 37.333\left(\frac{z - 0.9048}{z - 0.1111}\right)$$

Entonces, la función de transferencia pulso en lazo abierto se convierte en

$$\begin{aligned} G_D(z)G(z) &= 37.333\left(\frac{z - 0.9048}{z - 0.1111}\right)\frac{0.005(z + 1)}{(z - 1)^2} \\ &= \frac{0.1867(1 - 0.9048z^{-1})(1 + z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.1111z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

La constante de error de velocidad estática K_v se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{1 - z^{-1}}{T}G_D(z)G(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{1 - z^{-1}}{0.1}\frac{0.1867(1 - 0.9048z^{-1})(1 + z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.1111z^{-1})(1 - z^{-1})^2}\right] = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la constante de error de velocidad estática K_v es infinita. No existe error en el estado permanente en la respuesta rampa.

La función de transferencia pulso en lazo cerrado del sistema es

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.1867z^{-1} + 0.0178z^{-2} - 0.1689z^{-3}}{1 - 1.9244z^{-1} + 1.2400z^{-2} - 0.2800z^{-3}}$$

La figura 4-59 muestra la respuesta escalón unitario. Note que el cero del controlador digital de $z = 0.9048$ está cerca del polo doble en $z = 1$. Un par polo-cero cerca del punto $z = 1$ genera una cola larga de pequeña amplitud en la respuesta.

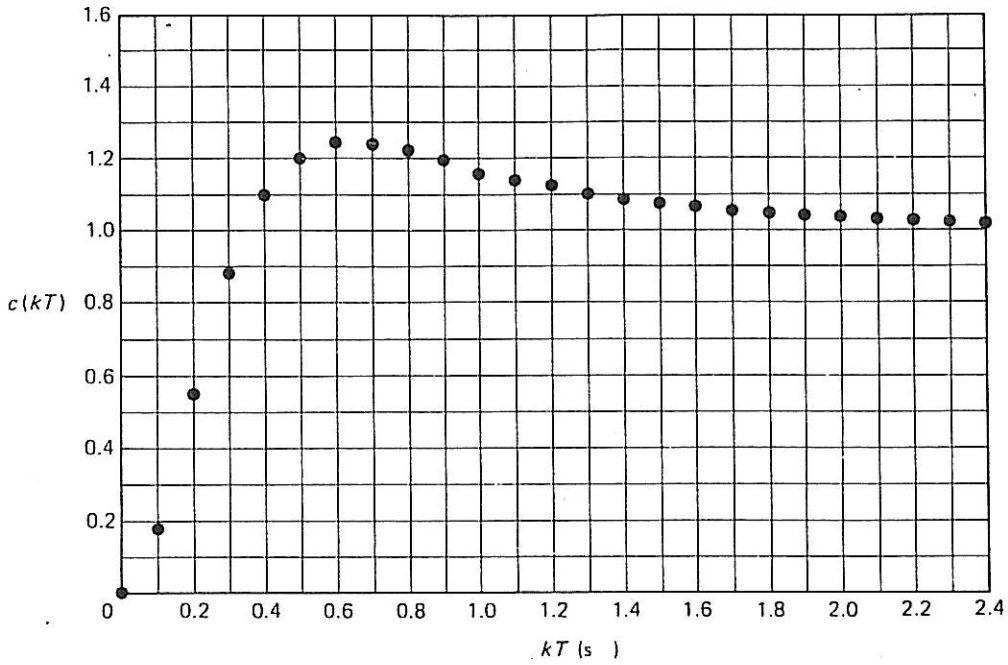


Figura 4-59 Gráfica de $c(kT)$ en función de kT para el sistema diseñado en el problema A-4-12.

Problema A-4-13

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-60. La función de transferencia de la planta incluye un atraso de transporte e^{-5s}. El tiempo de atraso es 5 seg, es decir $L = 5$. La salida deseada $c(t)$ en respuesta a una entrada escalón unitario es como se muestra en la figura 4-61*a*). La curva se eleva desde cero hasta su valor final en 10 seg (medido desde $t = 5$ hasta $t = 15$). Y no existe ni sobrepaso ni error en estado permanente. El tiempo de asentamiento es de 15 seg (medido desde $t = 0$ hasta $t = 15$). Se requiere que no existan componentes oscilatorias entre muestras en la salida después de haber alcanzado el tiempo de asentamiento. Diseñe un controlador digital $G_D(z)$.

Solución Seleccionemos el período de muestreo como de 5 seg, es decir $T = 5$. (Podemos, naturalmente, elegir el período de muestreo como de 2.5 seg, 1 seg u otro valor. En este ejemplo, sin embargo, para simplificar nuestra presentación, hemos definido el período de muestreo en 5 seg.)

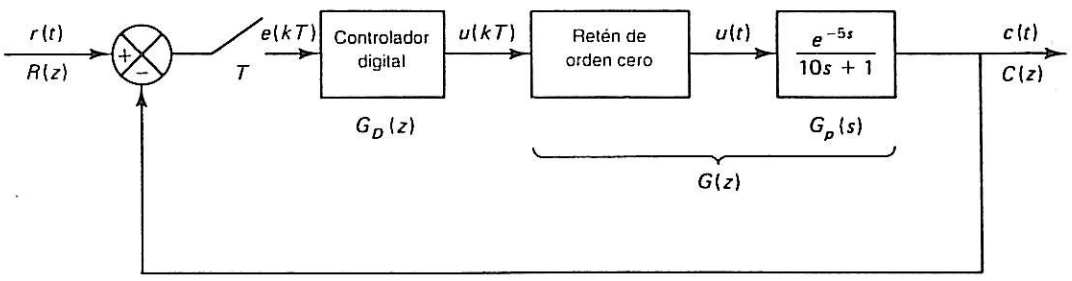
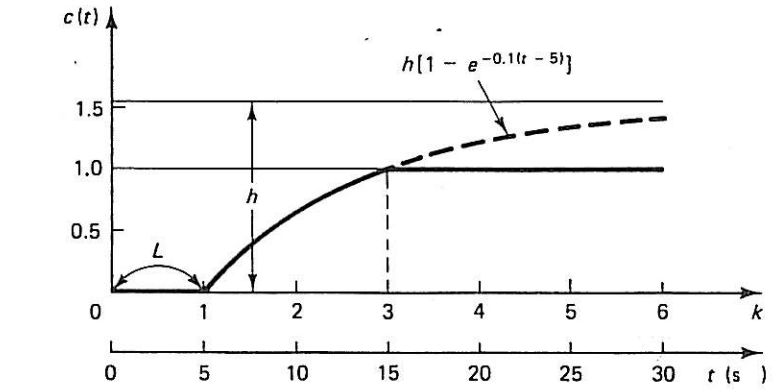
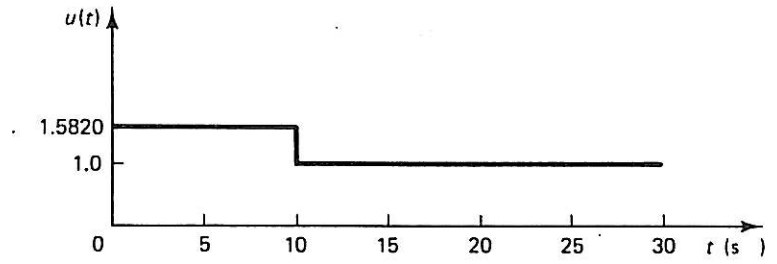


Figura 4-60 Sistema de control digital.



(a)



(b)

Figura 4-61 *a*) Salida deseada $c(t)$ en respuesta a una entrada escalón unitario; *b*) Gráfica de $u(t)$ en función de t.

La transformada z de la planta, precedida por un retén de orden cero, es

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{e^{-5s}}{10s + 1}\right]$$
$$= (1 - z^{-1})z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(10s + 1)}\right]$$
$$= \frac{0.3935z^{-2}}{1 - 0.6065z^{-1}}$$

Note que no existe ningún polo inestable o críticamente estable en $G(z)$. Por lo tanto, en este caso no hay problema de estabilidad.

Definamos la función de transferencia pulso en lazo cerrado como $F(z)$:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z) \tag{4-80}$$

En el caso presente, la salida $c(t)$ en la respuesta escalón unitario se define tal y como se muestra en la figura 4-61*a*). En vista que $h[1 - e^{-0.1(15-5)}] = h(1 - e^{-1}) = 1$ tenemos que $h = 1.5820$. A partir de la curva de respuesta con oscilaciones muertas que se muestra en la figura 4-61*a*) obtenemos

$$c(0) = 0$$
$$c(1) = 0$$

$$c(2) = h(1 - e^{-0.5}) = 1.5820 \times 0.3935 = 0.6225$$
$$c(k) = 1, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} C(z) &= 0.6225z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots \\ &= 0.6225z^{-2} + z^{-3}\frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{0.6225z^{-2} + 0.3775z^{-3}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Si se observa que

$$C(z) = F(z)R(z) = F(z)\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{0.6225z^{-2} + 0.3775z^{-3}}{1 - z^{-1}}$$

obtenemos

$$F(z) = 0.6225z^{-2} + 0.3775z^{-3} = 0.6225(1 + 0.6065z^{-1})z^{-2}$$

Una vez determinada $F(z)$, la función de transferencia pulso del controlador digital puede obtenerse a partir de la ecuación (4-80):

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]}$$

Observe que de la ecuación (4-48) tenemos

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z)$$

es decir

$$1 - 0.6225z^{-2} - 0.3775z^{-3} = (1 - z^{-1})N(z)$$

Al dividir $(1 - 0.6225z^{-2} - 0.3775z^{-3})$ entre $(1 - z^{-1})$, se puede determinar $N(z)$ como sigue:

$$N(z) = 1 + z^{-1} + 0.3775z^{-2}$$

Y, en consecuencia,

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + 0.3775z^{-2})$$

y

$$\begin{aligned} G_D(z) &= \frac{0.6225(1 + 0.6065z^{-1})z^{-2}}{\dfrac{0.3935z^{-2}}{1 - 0.6065z^{-1}}(1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + 0.3775z^{-2})} \\ &= \frac{1.5820(1 - 0.3678z^{-2})}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + 0.3775z^{-2})} \end{aligned}$$

Esta última ecuación da la función de transferencia pulso del controlador digital. Dado que $c(t)$ debe ser la unidad en estado permanente, $u(t)$, una señal en tiempo continuo, deberá ser constante una vez alcanzado el estado permanente.

Determinemos $u(z)$:

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{0.6225z^{-2} + 0.3775z^{-3}}{(1 - z^{-1})\dfrac{0.3935z^{-2}}{1 - 0.6065z^{-1}}} = 1.5820\left(\frac{1 - 0.3678z^{-2}}{1 - z^{-1}}\right)$$
$$= 1.5820 + 1.5820z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

Al tomar la transformada z inversa de $U(z)$, encontramos que $u(k)$ es constante para $k \geq 2$. Por lo tanto, no existen componentes oscilatorias entre muestras en la salida una vez que se ha alcanzado el tiempo de asentamiento. La señal $u(t)$ en función de t aparece graficada en la figura 4-61b).

Problema A-4-14

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-62. Diseñe un controlador digital $G_D(z)$ tal que el sistema en lazo cerrado exhiba el tiempo de asentamiento mínimo con un error en estado permanente cero en una respuesta rampa unitaria. El sistema no podrá tener componentes oscilatorias entre muestras en estado permanente. El período de muestreo T se supone de 1 seg. Después de diseñar el controlador, investigue la respuesta del sistema a una entrada delta de Kronecker y a una entrada escalón unitario.

Solución El primer paso en el diseño será determinar la transformada z de la planta que está antecedida por un retén de orden cero:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s^2}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$
$$= \frac{(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}$$

Ahora definamos la función de transferencia pulso en lazo cerrado como $F(z)$:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z)$$

Observe que si $G(z)$ se expande a una serie en z^{-1} entonces el primer término será 0.5 de z^{-1}. Por lo tanto, $F(z)$ debe de empezar con un término en z^{-1}:

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

donde $N \geq n$ siendo n el orden del sistema. Dado que el sistema aquí es de segundo orden, $n = 2$.

En vista de que la entrada es una rampa unitaria, de la ecuación (4-48) requerimos que

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^2 N(z) \tag{4-81}$$

Note que $G(z)$ tiene un polo doble críticamente estable en $z = 1$. Por lo tanto, desde el punto de vista del requisito de estabilidad, $1 - F(z)$ deberá tener un cero doble en $z = 1$. Sin embargo, $1 - F(z)$ ya implica un término $(1 - z^{-1})^2$, satisfaciendo por lo tanto el requisito de estabilidad.

Dado que el sistema no debe mostrar componentes oscilatorias entre muestras en el estado permanente, requerimos que $U(z)$ sea del tipo siguiente de la serie en z^{-1}:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{N-1} z^{-N+1} + b(z^{-N} + z^{-N-1} + z^{-N-2} + \cdots)$$

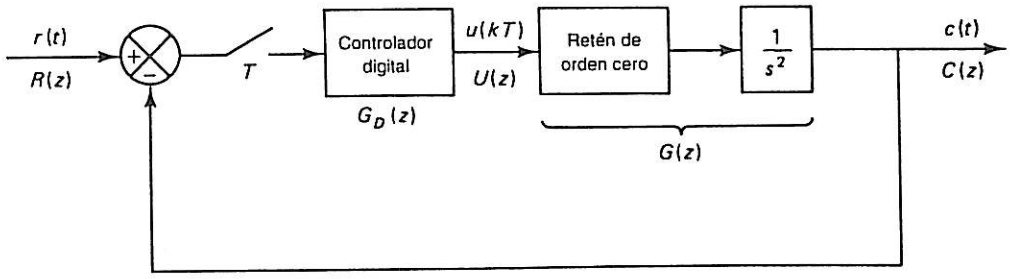


Figura 4-62 Sistema de control digital.

Dado que la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ incluye un doble integrador, b debe ser cero. (De lo contrario, la salida aumentará en forma parabólica, en vez de linealmente.) En consecuencia, tenemos

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{N-1} z^{-N+1}$$

De la figura 4-62, $U(z)$ puede darse en la forma

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \frac{R(z)}{G(z)} \\ &= F(z) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \frac{2(1 - z^{-1})^2}{(1 + z^{-1}) z^{-1}} \\ &= F(z) \frac{2}{1 + z^{-1}} \end{aligned}$$

Para que $U(z)$ sea una serie en z^{-1} con un número finito de términos, $F(z)$ debe ser divisible entre $1 - z^{-1}$:

$$F(z) = (1 + z^{-1}) F_1(z) \tag{4-82}$$

Entonces, $U(z)$ se puede escribir como sigue:

$$U(z) = 2F_1(z) \tag{4-83}$$

donde $F_1(z)$ es un polinomio en z^{-1} con un número finito de términos.

Al comparar las ecuaciones (4-81) y (4-82) y mediante un simple análisis, vemos que $F(z)$ debe incluir un término con por lo menos z^{-3}. Por lo tanto, suponemos

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}$$

Esta forma supuesta de $F(z)$ involucra sólo el número mínimo de términos, la respuesta transitoria se asentará en tres períodos de muestreo.

Determinaremos ahora las constantes a_1, a_2 y a_3. De la ecuación (4-81) tenemos

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} = (1 - z^{-1})^2 N(z)$$

Si dividimos el primer miembro de esta última ecuación entre $(1 - z^{-1})^2$, el cociente es $1 + (2 - a_1)z^{-1}$. El residuo es $[2(2 - a_1) - (1 + a_2)]z^{-2} - [(2 - a_1) + a_3]z^{-3}$. De ahí, se determina $N(z)$ en la forma

$$N(z) = 1 + (2 - a_1)z^{-1}$$

y el residuo se iguala a cero:

$$[2(2 - a_1) - (1 + a_2)]z^{-2} - (2 - a_1 + a_3)z^{-3} = 0$$

Para satisfacer esta última ecuación, es necesario que

$$2(2 - a_1) - (1 + a_2) = 0 \tag{4-84}$$

$$2 - a_1 + a_3 = 0 \tag{4-85}$$

De la ecuación (4-82), tenemos

$$a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} = (1 + z^{-1}) F_1(z)$$

Si dividimos el primer miembro de esta última ecuación entre $1 + z^{-1}$, el cociente es $a_1 z^{-1} + (a_2 - a_1)z^{-2}$. El residuo es $(a_1 - a_2 + a_3)z^{-3}$. Por lo tanto,

$$F_1(z) = a_1 z^{-1} + (a_2 - a_1)z^{-2}$$

y el residuo se iguala a cero:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 0 \tag{4-86}$$

Al resolver las ecuaciones (4-84), (4-85) y (4-86) en función de a_1, a_2 y a_3, obtenemos

$$a_1 = 1.25, \qquad a_2 = 0.5, \qquad a_3 = -0.75$$

Por lo tanto,

$$N(z) = 1 + 0.75z^{-1}$$

y

$$F_1(z) = 1.25z^{-1} - 0.75z^{-2} = 1.25z^{-1}(1 - 0.6z^{-1})$$

y $F(z)$ se determina como sigue:

$$\begin{aligned} F(z) &= 1.25z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.75z^{-3} \\ &= 1.25z^{-1}(1 + z^{-1})(1 - 0.6z^{-1}) \end{aligned}$$

El controlador digital $G_D(z)$ se determina a continuación de la ecuación (4-50):

$$\begin{aligned} G_D(z) &= \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1})^2 N(z)} \\ &= \frac{1.25z^{-1}(1 + z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}{\dfrac{(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}(1 - z^{-1})^2(1 + 0.75z^{-1})} \\ &= \frac{2.5(1 - 0.6z^{-1})}{1 + 0.75z^{-1}} \end{aligned}$$

Con el controlador digital así diseñado, la salida del sistema en respuesta a una entrada rampa unitaria se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} C(z) &= F(z)R(z) \\ &= (1.25z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.75z^{-3})\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= 1.25z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \cdots \end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(0) &= 0 \\ c(1) &= 0 \\ c(2) &= 1.25 \\ c(k) &= k, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Observe que de la ecuación (4-83) tenemos

$$\begin{aligned} U(z) &= 2F_1(z) \\ &= 2(1.25z^{-1})(1 - 0.6z^{-1}) \\ &= 2.5z^{-1} - 1.5z^{-2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la señal de control $U(k)$ se convierte en cero para $k \geq 3$. Consecuentemente, no habrá componentes oscilatorias entre muestras en la respuesta en estado permanente. La figura 4-63 muestra las gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta rampa unitaria.

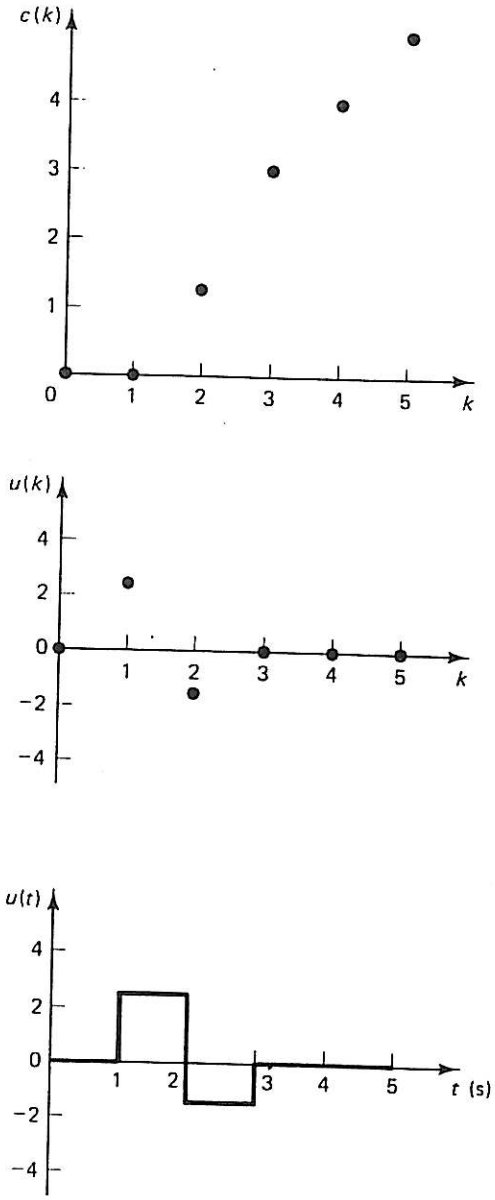


Figura 4-63 Gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta rampa unitaria del sistema diseñado en el problema A-4-14.

A continuación, investiguemos la respuesta de este sistema a una entrada delta de Kronecker y a una entrada escalón unitario. En el caso de una entrada delta de Kronecker

$$C(z) = F(z)R(z) = F(z) = 1.25z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.75z^{-3}$$

Note que $U(z)$ en este caso se convierte en:

$$\begin{aligned} U(z) = F(z)\frac{R(z)}{G(z)} &= \frac{1.25z^{-1}(1 + z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}{(1 + z^{-1})z^{-1}/[2(1 - z^{-1})^2]} \\ &= 2.5(1 - 0.6z^{-1})(1 - z^{-1})^2 \\ &= 2.5 - 6.5z^{-1} + 5.5z^{-2} - 1.5z^{-3} \end{aligned}$$

La señal de control $u(k)$ se convierte en cero para $k \geq 4$. Por lo tanto, no habrá componentes oscilatorias entre muestras después de $t \geq 4T = 4$.

En el caso de la entrada escalón unitario,

$$C(z) = F(z)R(z) = (1.25z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.75z^{-3})\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= 1.25z^{-1} + 1.75z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \cdots$$

El sobrepaso máximo es de 75% en la respuesta escalón unitario. Observe que

$$U(z) = F(z)\frac{R(z)}{G(z)} = \frac{1.25z^{-1}(1 + z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}{\frac{(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}(1 - z^{-1})}$$

$$= 1.25(1 - 0.6z^{-1})(2)(1 - z^{-1})$$

$$= 2.5 - 4z^{-1} + 1.5z^{-2}$$

La señal de control $u(k)$ se convierte en cero para $k \geq 3$. En consecuencia, no habrán componentes oscilatorias entre muestras después de que se ha alcanzado el tiempo de asentamiento. En la figura 4-64*a*) se muestran las gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en respuesta a la entrada delta de Kronecker. La figura 4-64*b*) muestran gráficas similares para la respuesta escalón unitario. Note que cuando el sistema se ha diseñado para la entrada rampa la respuesta a una entrada escalón ya no es oscilatoria.

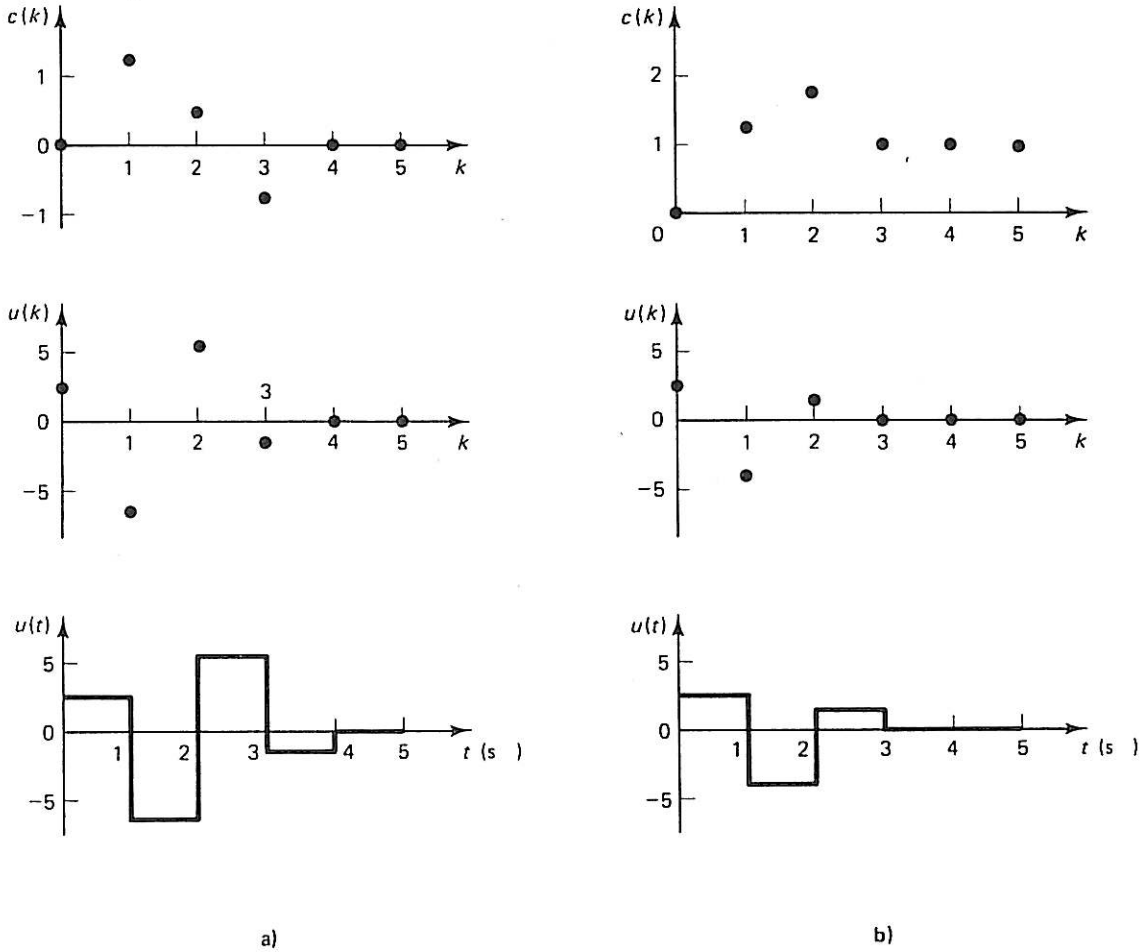


Figura 4-64 *a*) Gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta a una entrada delta de Kronecker del sistema diseñado en el problema A-4-14; *b*) Gráficas de $c(k)$ en función de k, $u(k)$ en función de k y $u(t)$ en función de t en la respuesta escalón unitario para el mismo sistema.

PROBLEMAS

Problema B-4-1

Considere las regiones en el plano s que se muestran en las figuras 4-65a) y b). Dibuje las regiones correspondientes en el plano z. El período de muestreo T se supone de 0.3 seg. (La frecuencia de muestreo es $\omega_s = 2\pi/T = 2\pi/0.3 = 20.9$ rad/seg.)

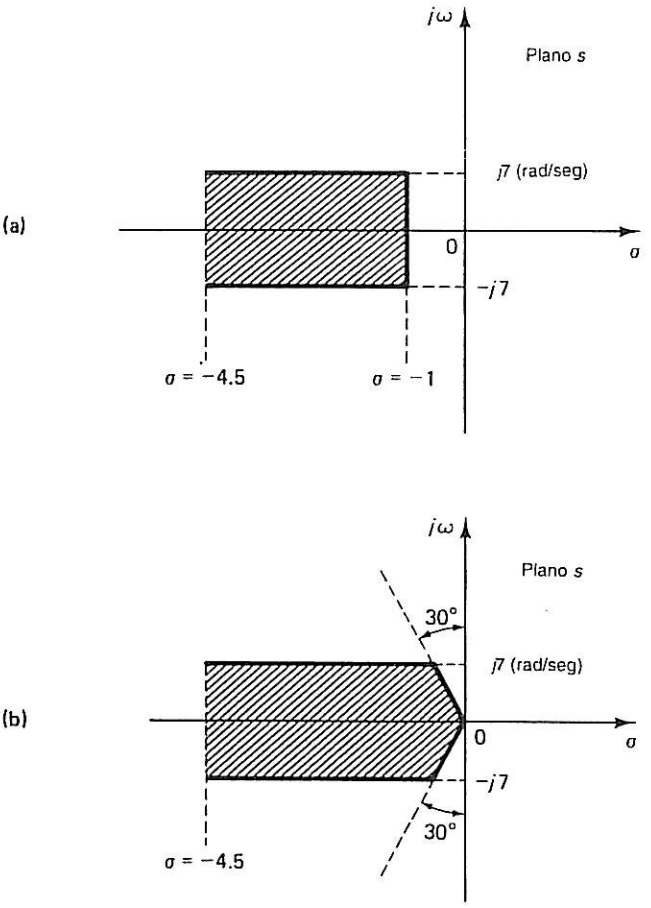


Figura 4-65 a) Región en el plano s limitada por líneas de ω constantes y líneas de σ constantes; b) región en el plano s limitadas por líneas de ζ constantes, líneas de ω constantes y una línea de σ constante.

Problema B-4-2

Considere la siguiente ecuación característica:

$$z^3 + 2.1z^2 + 1.44z + 0.32 = 0$$

Determine si cualquiera de las raíces de la ecuación característica están o no fuera del círculo unitario con centro en el rigen del plano z.

Problema B-4-3

Determine la estabilidad del siguiente sistema en tiempo discreto:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-3}}{1 + 0.5z^{-1} - 1.34z^{-2} + 0.24z^{-3}}$$

Problema B-4-4

Considere el sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado mostrado en la figura 4-13. Determine el intervalo de la ganancia K para estabilidad mediante el uso del criterio de estabilidad de Jury.

Problema B-4-5

Resuelva el problema B-4-4 utilizando la transformación bilineal junto con el criterio de estabilidad de Routh.

Problema B-4-6

Considere el sistema

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Suponga que la secuencia de entrada $\{x(k)\}$ es acotada. Esto es,

$$|x(k)| \leq M_1 = \text{constante}, \qquad \text{siendo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Demuestre que, si todos los polos de $G(z)$ están dentro del círculo unitario en el plano z, entonces la salida $y(k)$ también es acotada; esto es,

$$|y(k)| \leq M_2 = \text{constante}, \qquad \text{siendo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Problema B-4-7

Enuncie las condiciones de estabilidad, inestabilidad y estabilidad crítica en términos de la secuencia de ponderación $g(kT)$ de un sistema de control en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo.

Problema B-4-8

Considere el sistema de control digital que se muestra en la figura 4-66. Trace los lugares geométricos de las raíces conforme se varía la ganancia K desde 0 hasta ∞. Determine el valor crítico de la ganancia K para estabilidad. El período de muestreo es de 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. ¿Qué valor de la ganancia K dará un factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo cerrado igual a 0.5? Con la ganancia K definida para obtener $\zeta = 0.5$, determine la frecuencia natural amortiguada ω_d y el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.

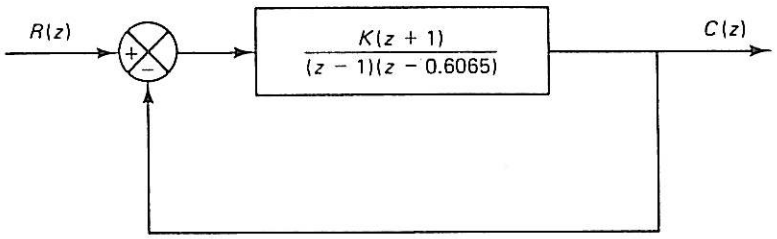


Figura 4-66 Sistema de control digital para el problema B-4-8.

Problema B-4-9

Refiriéndonos al sistema de control digital mostrado en la figura 4-67, diseñe un controlador digital $G_D(z)$ tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5 y el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada sea 8. Suponga que el período de muestreo es de 0.1 seg es decir $T = 0.1$. Determine la constante de error de velocidad estática. También, determine la respuesta del sistema diseñado a una entrada escalón unitario.

Problema B-4-10

Considere el sistema de control mostrado en la figura 4-68. Diseñe un controlador digital adecuado que incluya una acción de control integral. Las especificaciones de diseño son que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5 y que existan por lo menos 8 muestras por ciclo

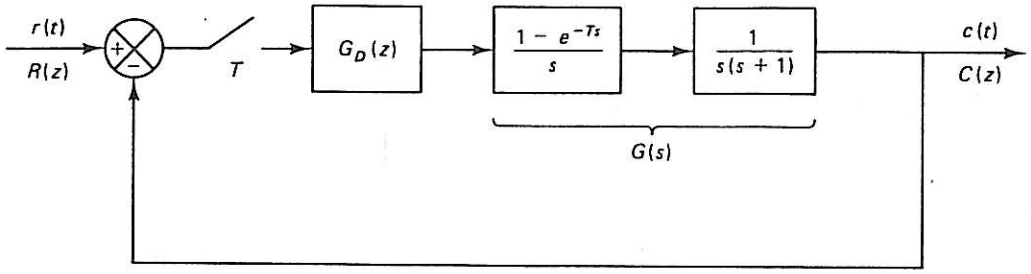


Figura 4-67 Sistema de control digital para el problema B-4-9.

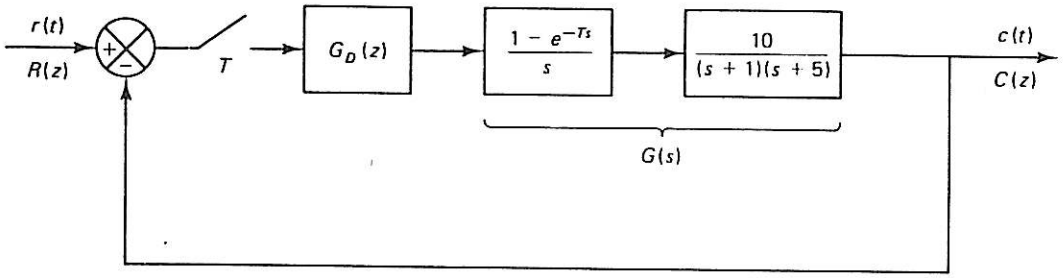


Figura 4-68 Sistema de control digital para el problema B-4-10.

de la oscilación senoidal amortiguada. El período de muestreo se supone de 0.2 seg es decir $T = 0.2$. Una vez diseñado el controlador digital, determine la constante de error de velocidad estática K_v.

Problema B-4-11

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-69, donde la planta es de primer orden y tiene un tiempo muerto de 5 seg. Seleccionando un período de muestreo razonable T, diseñe un controlador digital PI tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.5 y el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada sea 10. Después de diseñar el controlador, determine la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario.

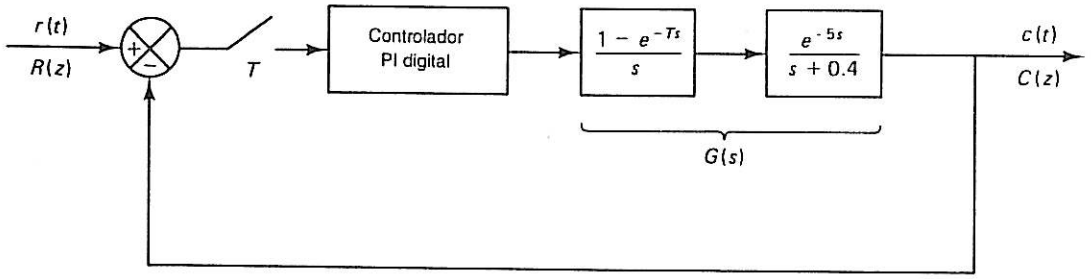


Figura 4-69 Sistema de control digital para el problema B-4-11.

Problema B-4-12

Diseñe un controlador proporcional y derivativo digital para la planta cuya función de transferencia es $1/s^2$ tal y como se muestra en la figura 4-70. Se desea que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea de 0.5 y la frecuencia natural no amortiguada sea 4 rad/seg. El período de muestreo es 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. Después de diseñar el controlador, determine el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.

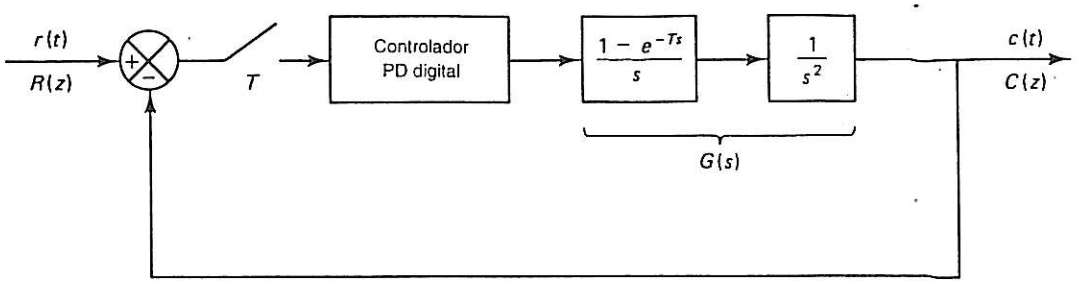


Figura 4-70 Sistema de control digital para el problema B-4-12.

Problema B-4-13

Al hacer referencia al sistema considerado en el problema A-4-9, rediseñe el controlador digital de tal forma que la constante de error de velocidad estática K_v sea 12 seg^{-1}, sin cambiar en forma apreciable las posiciones de los polos dominantes en lazo cerrado en el plano z. El período de muestreo se supone de 0.2 seg o $T = 0.2$. Una vez rediseñado el controlador, obtenga la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema de control digital.

Problema B-4-14

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-71. Dibuje un diagrama Bode en el plano w. Defina la ganancia K de tal manera que el margen de fase sea igual a 50°. Con la ganancia K definida de esta forma, determine el margen de ganancia y la constante de error de velocidad estática K_v. Se supone que el período de muestreo es de 0.1 seg, es decir $T = 0.1$.

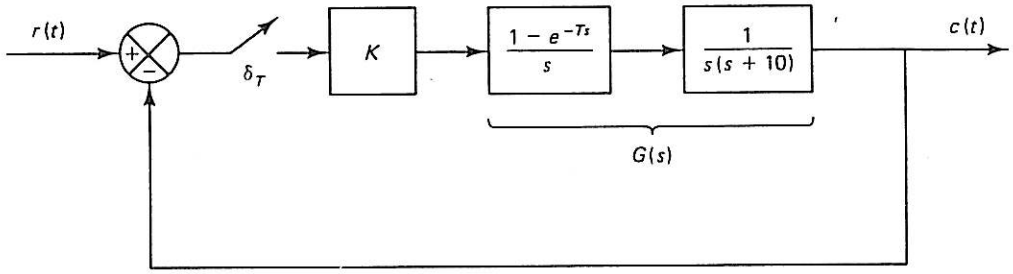


Figura 4-71 Sistema de control digital para el problema B-4-14.

Problema B-4-15

Utilizando el método del diagrama Bode en el plano w, diseñe un controlador digital para el sistema mostrado en la figura 4-72. Las especificaciones de diseño consisten en que el margen de fase sea de 50°, el margen de ganancia de por lo menos 10 dB, y la constante de error de velocidad estática K_v sea de 20 seg^{-1}. El período de muestreo se supone de 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. Una vez diseñado el controlador, calcule el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.

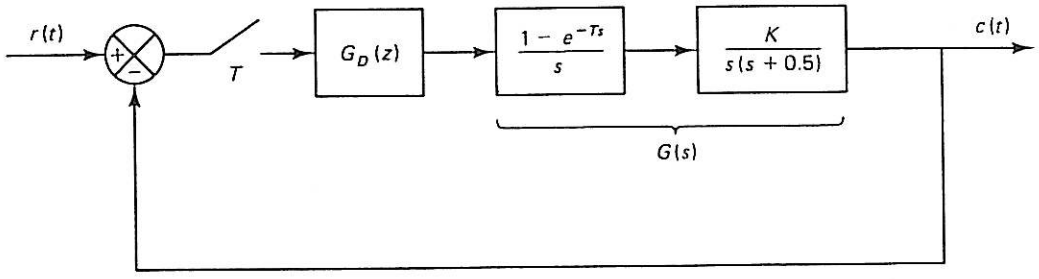


Figura 4-72 Sistema de control digital para el problema B-4-15.

Problema B-4-16

Considere el sistema de control digital de la figura 4-73. Al usar el método del diagrama de Bode en el plano w, diseñe un controlador digital de tal forma que el margen de fase sea de 60°, el margen de ganancia de 12 dB o más, y la constante de error de velocidad estática de 5 seg^{-1}. El período de muestreo se supone de 0.1 seg, es decir $T = 0.1$.

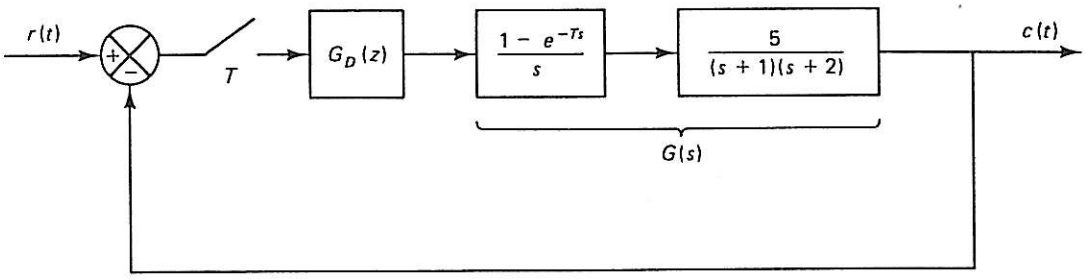


Figura 4-73 Sistema de control digital para el problema B-4-16.

Problema B-4-17

Considere el sistema mostrado en la figura 4-74. Diseñe un controlador digital utilizando un diagrama Bode en el plano w de tal forma que el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia de por lo menos 10 dB. Se desea que la constante de error de velocidad estática K_v sea de 10 seg^{-1}. El período de muestreo está especificado como 0.1 seg, es decir $T = 0.1$. Una vez diseñado el controlador, determine el número de muestras por ciclo de la oscilación senoidal amortiguada.

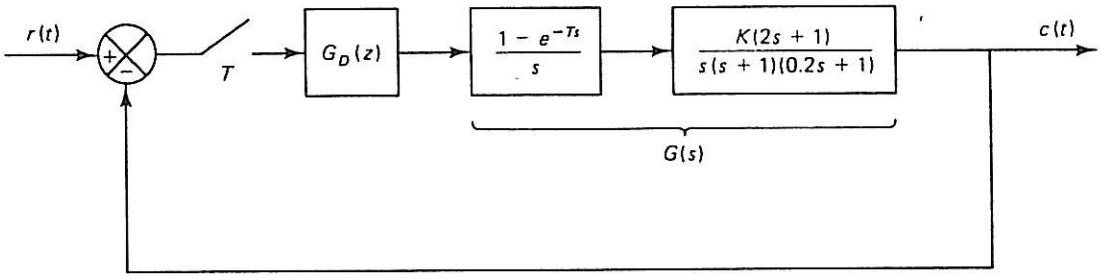


Figura 4-74 Sistema de control digital para el problema B-4-17.

Problema B-4-18

Considere el sistema de control digital mostrado en la figura 4-75. Diseñe un controlador digital $G_D(z)$ tal que la salida del sistema tenga una respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón unitario (esto es, el tiempo de asentamiento será el mínimo posible y el error en estado permanente será cero, también, la salida del sistema no mostrará componentes oscilatorios entre muestras una vez alcanzado el tiempo de asentamiento). El período de muestreo T se supone de 1 seg, es decir $T = 1$.

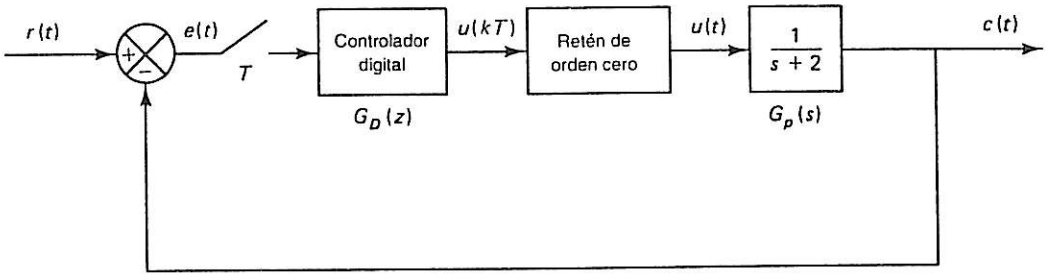


Figura 4-75 Sistema de control digital para el problema B-4-18.

5

Análisis en el espacio de estado

5-1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos 3 y 4 nos ocupamos de los métodos convencionales para el análisis y el diseño de los sistemas de control. Métodos convencionales como los del lugar geométrico de las raíces y los de respuesta en frecuencia, son útiles para los casos de sistemas con una entrada y una salida. Los métodos convencionales son conceptualmente sencillos y nada más requieren de un número razonable de cálculos, pero sólo son aplicables a sistemas lineales invariantes en el tiempo con una entrada y una salida. Se basan en la relación entrada—salida del sistema, es decir, en la función de transferencia o la función de transferencia pulso. No se aplican a sistemas no lineales, excepto en casos simples. Asimismo, los métodos convencionales no son aplicables al diseño de sistemas de control óptimo y adaptable, mismos que son, en su mayor parte, variantes en el tiempo y/o no lineales.

Un sistema de control moderno puede tener muchas entradas y muchas salidas, y éstas están interrelacionadas de una manera complicada. Los métodos en el espacio de estado para el análisis y la síntesis de sistemas de control son más adecuados para tratar con sistemas con varias entradas y varias salidas que se requiere que sean óptimos en algún sentido.

Concepto del método en el espacio de estado. Este método se basa en la descripción del sistema en términos de n ecuaciones en diferencias o diferenciales de primer orden, que pueden combinarse en una ecuación matricial en diferencias o diferencial de primer orden. La utilización de la notación matricial simplifica en gran medida la representación matemática de los sistemas de ecuaciones.

El diseño del sistema mediante el uso del concepto de espacio de estado permite al ingeniero diseñar sistemas de control con respecto a índices de desempeño dados. Además, el diseño en el espacio de estado se puede realizar para toda una *clase* de entradas, en lugar de una función de entrada específica como la función impulso, la función escalón o la función senoidal. Asimismo, los

métodos en el espacio de estado permiten al ingeniero incluir condiciones iniciales dentro del diseño. Ésta es una característica muy importante, que no tienen los métodos de diseño convencional.

A continuación definiremos primero lo que es estado, variable de estado, vector de estado y espacio de estado, y luego presentaremos las ecuaciones en el espacio de estado.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (llamadas *variables de estado*) tales que el conocimiento de dichas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. El concepto de estado de ninguna manera está limitado a sistemas físicos; también se aplica en sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son las que conforman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si para describir en su totalidad el comportamiento de un sistema dinámico se requiere de por lo menos n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (de tal forma que una vez dada la entrada para $t \geq t_0$ y el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema queda completamente determinado), entonces dichas n variables se consideran un conjunto de variables de estado.

Observe que las variables de estado no necesitan ser cantidades físicamente medibles u observables. Aquellas variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no se pueden medir ni observar, se pueden seleccionar como variables de estado. Esta libertad en la selección de variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estado. Sin embargo, en la práctica, lo conveniente es seleccionar cantidades fácilmente medibles como variables de estado, si esto fuera posible, ya que las leyes de control óptimo requerirán la retroalimentación de todas las variables de estado, con una adecuada ponderación.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces estas n variables de estado se pueden considerar como los n componentes de un vector $\mathbf{x}$. Dicho vector se conoce como *vector de estado*. Un vector de estado es, por tanto, un vector que determina en forma única el estado $\mathbf{x}(t)$ del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez dado el estado en $t = t_0$ y especificada la entrada $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$.

Espacio de estado. El espacio de n dimensiones cuyos ejes coordenados están formados por el eje x_1, eje x_2, . . . , eje x_n se conoce como *espacio de estado*. Cualquier estado puede representarse por un punto dentro del espacio de estado.

Ecuaciones en el espacio de estado. En el análisis en el espacio de estado se tratará con tres tipos de variables que están involucradas en el modelado de sistemas dinámicos: las variables de entrada, las de salida y las de estado. Como se verá en la sección 5-2, la representación en el espacio de estado para un sistema dado no es única, con la excepción de que el número de variables de estado es el mismo para cualquiera de las distintas representaciones en el espacio de estado del mismo sistema.

Para sistemas (lineales o no lineales) de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado se puede escribir como

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

y la ecuación de salida como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

Para los sistemas lineales de tiempo discreto variantes en el tiempo, la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden simplificar a

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector n (vector de estado)

$\mathbf{y}(k)$ = vector m (vector de salida)

$\mathbf{u}(k)$ = vector r (vector de entrada)

$\mathbf{G}(k)$ = matriz $n \times n$ (matriz de estado)

$\mathbf{H}(k)$ = matriz $n \times r$ (matriz de entrada)

$\mathbf{C}(k)$ = matriz $m \times n$ (matriz de salida)

$\mathbf{D}(k)$ = matriz $m \times r$ (matriz de transmisión directa)

La presencia de la variable k en los argumentos de las matrices $\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ y $\mathbf{D}(k)$ implica que estas matrices varían con el tiempo. Si la variable k no aparece en forma explícita en estas matrices, se supone que son invariables en el tiempo, es decir, constantes. Esto es, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se pueden simplificar a

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-1}$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-2}$$

Al igual que en el caso del tiempo discreto, los sistemas de tiempo continuo (lineal o no lineal) se pueden representar mediante la siguiente ecuación de estado y la siguiente ecuación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

Para sistemas lineales de tiempo continuo variantes en el tiempo, las ecuaciones de estado y de salida están dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las dos últimas ecuaciones se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{5-3}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{5-4}$$

En la figura 5-1*a*) se muestra la representación en diagrama de bloques del sistema de control en tiempo discreto definido por las ecuaciones (5-1) y (5-2), y la figura 5-1*b*) muestra el sistema de control en tiempo continuo definido por las ecuaciones (5-3) y (5-4). Observe que las configuraciones básicas de los sistemas en tiempo discreto y en tiempo continuo son las mismas.

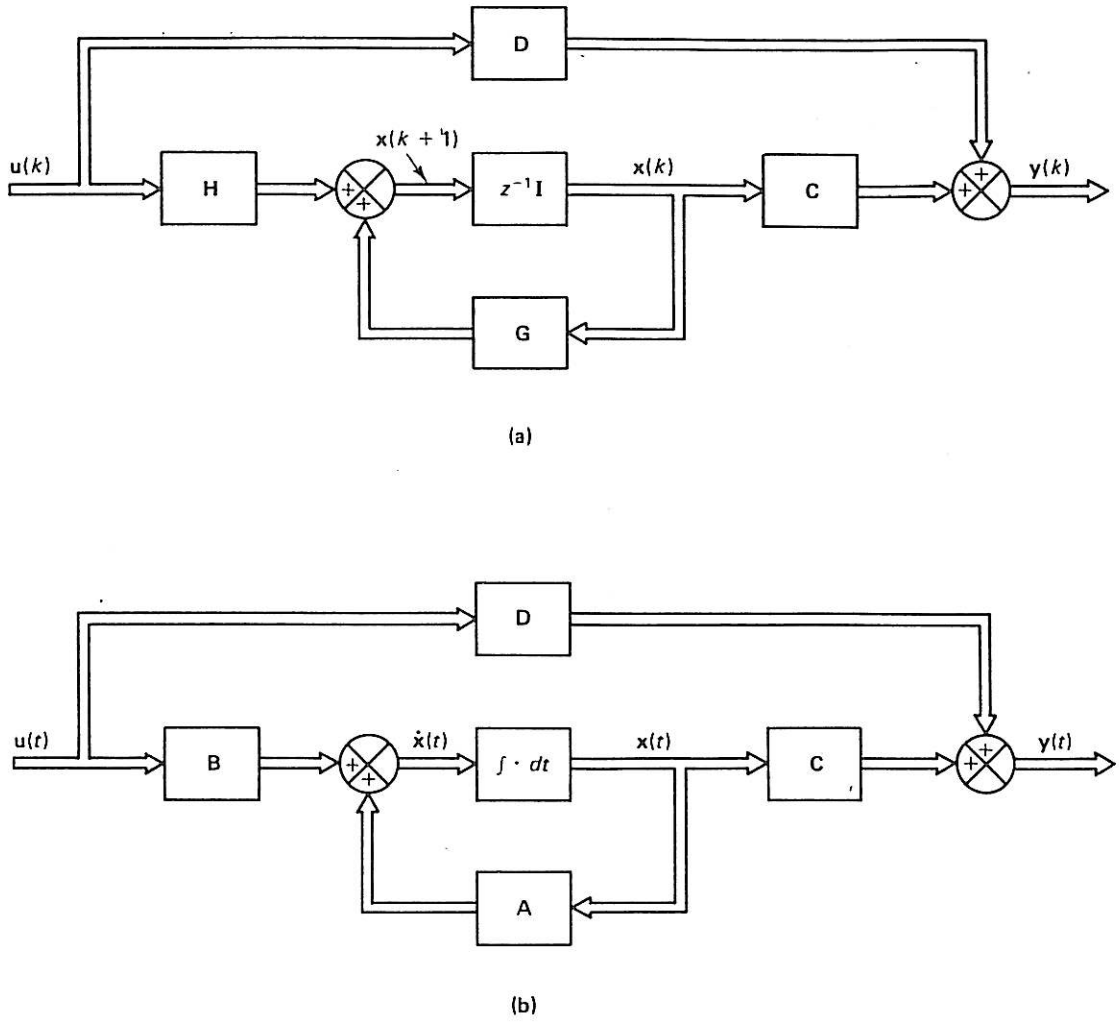


Figura 5-1 *a*) Diagrama de bloques de un sistema de control lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo representado en el espacio de estado; *b*) diagrama de bloques de un sistema de control lineal en tiempo continuo invariante en el tiempo representado en el espacio de estado.

Observe que en este libro $\mathbf{u}(k)$ [o bien $\mathbf{u}(t)$] denota tanto el vector de entrada a un sistema como el vector de control (entrada de control a una planta). Por tanto, $\mathbf{u}(k)$ [o $\mathbf{u}(t)$] se interpreta ya sea como el vector de entrada o como el vector de control, de acuerdo con las circunstancias.

Reseña del capítulo. La sección 5-1 presentó una introducción del método en el espacio de estado y definió algunos términos básicos. La sección 5-2 se ocupa de varias representaciones en el espacio de estado de sistemas lineales de tiempo discreto invariantes en el tiempo. La sección 5-3 primero obtiene la solución de la ecuación de estado lineal de tiempo discreto invariante en el tiempo mediante el procedimiento de recursión y el método de la transformada z. Posteriormente presenta un método para calcular $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$, y concluye con un análisis para la solución de la ecuación de estado lineal de tiempo discreto invariante en el tiempo. La sección 5-4 se ocupa de la matriz de la función de transferencia pulso. La sección 5-5 en principio trata la discretización de las ecuaciones en el espacio de estado lineal de tiempo continuo y luego analiza la respuesta en tiempo entre dos

instantes de muestreo consecutivos. La sección final, sección 5-6, presenta el análisis de estabilidad de Liapunov. Empieza con la discusión de la función de Liapunov y las definiciones de estabilidad de sistemas dinámicos. Asimismo, presenta el teorema principal de estabilidad de Liapunov, seguido por sus aplicaciones al análisis de estabilidad de sistemas lineales de tiempo continuo y de tiempo discreto.

5-2 REPRESENTACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Formas canónicas para ecuaciones en el espacio de estado en tiempo discreto. Existen muchas técnicas para obtener representaciones en el espacio de estado correspondientes a sistemas en tiempo discreto. Considere el sistema en tiempo discreto descrito por

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \tag{5-5}$$

donde $u(k)$ es la entrada e $y(k)$ es la salida del sistema en el instante de muestreo k. Observe que algunos de los coeficientes $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ y $b_j (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ pueden ser cero. La ecuación (5-5) se puede escribir en la forma de la función de transferencia pulso como

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{5-6}$$

o bien

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{5-7}$$

Existen muchas formas de llevar a cabo representaciones en el espacio de estado para el sistema en tiempo discreto descrito por las ecuaciones (5-5), (5-6) o (5-7). Aquí se presentan las siguientes:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal
4. Forma canónica de Jordan

(Por lo que se refiere al significado de los términos *controlable* y *observable*, vea las secciones 6-2 y 6-3.) La forma canónica controlable se puede obtener con el método de programación directa. (Vea el problema A-5-1.) La forma canónica observable se puede obtener a partir del método de programación anidada. (Vea el problema A-5-2.) La forma canónica diagonal y la forma canónica de Jordan se pueden obtener utilizando el método de expansión en fracciones parciales. (Vea los problemas A-5-3 y A-5-4.)

Forma canónica controlable La representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto obtenida de las ecuaciones (5-5), (5-6) o (5-7) se puede expresar en la forma dada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-8}$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-9}$$

Las ecuaciones (5-8) y (5-9) son las ecuaciones de estado y salida, respectivamente. La representación en el espacio de estado dada por las ecuaciones (5-8) y (5-9) se conoce comúnmente como *forma canónica controlable*. [Para la deducción de las ecuaciones (5-8) y (5-9) vea el problema A-5-1.]

Observe que si se invierte el orden de las variables de estado, es decir, si se define nuevas variables de estado, de acuerdo con la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación de estado se puede escribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-10}$$

La ecuación de salida se puede dar en la forma

$$y(k) = [b_1 - a_1 b_0 \vdots b_2 - a_2 b_0 \vdots \cdots \vdots b_n - a_n b_0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-11}$$

Las ecuaciones (5-10) y (5-11) también están en la forma canónica controlable.

Forma canónica observable. La representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto dada por las ecuaciones (5-5), (5-6) o (5-7) se puede expresar en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-12}$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-13}$$

La representación en el espacio de estado dada por las ecuaciones (5-12) y (5-13) se conoce como *forma canónica observable*. [Para la deducción de las ecuaciones (5-12) y (5-13), vea el problema A-5-2.] Observe que la matriz de estado de $n \times n$ de la ecuación de estado dada por la ecuación (5-12) es la transpuesta de la matriz correspondiente de la ecuación de estado definida por la ecuación (5-8).

Observe que si se invierte el orden de las variables de estado, es decir, si se definen

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación de estado y la ecuación de salida se convierten en:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-14}$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-15}$$

Las ecuaciones (5-14) y (5-15) también están en la forma canónica observable.

Forma canónica diagonal. Si los polos de la función de transferencia pulso dados por las ecuaciones (5-5), (5-6) o (5-7) son todos distintos, entonces la representación en el espacio de estado se puede expresar en la forma canónica diagonal como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-16}$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-17}$$

[Para las correspondientes deducciones de las ecuaciones (5-16) y (5-17), vea el problema A-5-3.]

Forma canónica de Jordan. Si la función de transferencia pulso dada por las ecuaciones (5-5), (5-6) o (5-7) incluye un polo múltiple del orden m en $z = p_1$ y todos los demás polos son distintos, entonces la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden expresar como sigue:

$$\left[\begin{array}{c} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ \hline x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc:ccc} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ \hline x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] u(k) \tag{5-18}$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-19}$$

[Las deducciones de las ecuaciones (5-18) y (5-19), aparecen en el problema A-5-4.] La matriz de estado de $n \times n$ está en la forma canónica de Jordan. (Para mayores detalles sobre las formas canónicas de Jordan, vea el apéndice A.)

Ejemplo 5-1

Considere el sistema siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$$

Las representaciones en el espacio de estado en las formas canónica controlable, canónica observable y canónica diagonal, se convierten en:

FORMA CANÓNICA CONTROLABLE:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

FORMA CANÓNICA OBSERVABLE:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

FORMA CANÓNICA DIAGONAL:

La función de transferencia pulso $Y(z)/U(z)$ obtenida se puede expandir como sigue:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{5/3}{z + 0.5} + \frac{-2/3}{z + 0.8}$$

Y, por tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

No unicidad de las representaciones en el espacio de estado. Para un sistema con función de transferencia pulso dada, la representación en el espacio de estado no es única. Se ha demostrado que existen diferentes representaciones en el espacio de estado para un sistema con función de transferencia pulso. Las ecuaciones de estado, sin embargo, están relacionadas unas con otras mediante una transformación de similitud.

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-20}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-21}$$

Se define un nuevo vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ mediante

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) \tag{5-22}$$

donde $\mathbf{P}$ es una matriz no singular. [Observe que, en vista de que tanto $\mathbf{x}(k)$ como $\hat{\mathbf{x}}(k)$ son vectores de dimensión n, están relacionados uno con el otro mediante una matriz no singular.]

Entonces, al sustituir la ecuación (5-22) en la ecuación (5-20) se obtiene

$$\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-23}$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación (5-23) por $\mathbf{P}^{-1}$, da

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-24}$$

Definiendo

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

La ecuación (5-24) se puede escribir como sigue:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k) \tag{5-25}$$

En forma similar, si se sustituye la ecuación (5-22) en la ecuación (5-21), se obtiene

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-26}$$

Definiendo

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}, \qquad \mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}$$

la ecuación (5-26) se puede escribir como

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \tag{5-27}$$

Se ha demostrado así que la representación en el espacio de estado dada por las ecuaciones (5-20) y (5-21),

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

es equivalente a la representación en el espacio de estado dada por las ecuaciones (5-25) y (5-27),

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k)$$

Los vectores de estado $\mathbf{x}(k)$ y $\hat{\mathbf{x}}(k)$ están relacionados entre sí mediante la ecuación (5-22). Dado que la matriz $\mathbf{P}$ puede ser cualquier matriz no singular de $n \times n$, para un sistema dado existe una cantidad infinita de representaciones en el espacio de estado.

En algunas aplicaciones se podría desear diagonalizar la matriz de estado $\mathbf{G}$. Esto se puede llevar a cabo si se selecciona en forma adecuada una matriz $\mathbf{P}$, de forma que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \text{matriz diagonal}$$

En el caso donde la diagonalización no sea posible, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}$ puede transformarse a la forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \text{forma canónica de Jordan}$$

Refiérase al apéndice A para métodos de transformación de la matriz $\mathbf{G}$ a una matriz diagonal o a una matriz en la forma canónica de Jordan. [Observe que si se utiliza el método de programación de expansión en fracciones parciales, la matriz de estado se convierte en diagonal si todos los polos involucrados son distintos, y se convierte en una forma canónica de Jordan si en $Y(z)/U(z)$ están involucrados polos múltiples.]

5-3 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO

En esta sección, primero se presenta la solución de la ecuación lineal de estado en tiempo discreto e invariante en el tiempo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

mediante un procedimiento de recursión y, posteriormente, a través del método de la transformada z. Luego se analizan los métodos para calcular $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$. Por último, se resuelve la ecuación de estado lineal en tiempo discreto y variante en el tiempo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

Solución de la ecuación de estado lineal en tiempo discreto e invariante en el tiempo. En general, las ecuaciones de tiempo discreto son más fáciles de resolver que las ecuaciones diferenciales, porque las primeras pueden resolverse simplemente mediante un procedimiento de recursión. Éste es bastante sencillo y conveniente para cálculos digitales.

Considere las siguientes ecuación de estado y ecuación de salida:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-28}$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-29}$$

La solución de la ecuación (5-28) para cualquier entero positivo k se puede obtener directamente por recursión, como sigue:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2)$$

$$\vdots$$

Mediante la repetición de este procedimiento, se obtiene

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5-30}$$

Claramente, $\mathbf{x}(k)$ está formado de dos partes, una que representa la contribución del estado inicial $\mathbf{x}(0)$ y la otra, la contribución de la entrada $\mathbf{u}(j)$, donde $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. La salida $\mathbf{y}(k)$ está dada por

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-31}$$

Matriz de transición de estado. Observe que es posible escribir la solución de la ecuación de estado homogénea

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{5-32}$$

en la forma

$$\mathbf{x}(k) = \Psi(k)\mathbf{x}(0) \tag{5-33}$$

donde $\Psi(k)$ es una matriz única de $n \times n$ que satisface la condición

$$\Psi(k+1) = \mathbf{G}\Psi(k), \qquad \Psi(0) = \mathbf{I} \tag{5-34}$$

Es claro que $\Psi(k)$ puede estar dada por

$$\Psi(k) = \mathbf{G}^k \tag{5-35}$$

De la ecuación (5-33), se puede ver que la solución (5-32) es simplemente una transformación del estado inicial. Por lo tanto, la matriz única $\Psi(k)$ se llama *matriz de transición de estado*. También se conoce como *matriz fundamental*. La matriz de transición de estado contiene toda la información sobre los movimientos libres del sistema definidos por la ecuación (5-32).

En términos de la matriz de transición de estado $\Psi(k)$, la ecuación (5-30) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{x}(k) = \Psi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(k-j-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \tag{5-36}$$

$$= \Psi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j)\mathbf{H}\mathbf{u}(k-j-1) \tag{5-37}$$

Al sustituir la ecuación (5-36) o la (5-37) en la ecuación (5-31), se puede obtener la siguiente ecuación de salida:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\Psi(k)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\Psi(k-j-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-38}$$

$$= \mathbf{C}\Psi(k)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\Psi(j)\mathbf{H}\mathbf{u}(k-j-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-39}$$

Método de la transformada z a la solución de las ecuaciones de estado en tiempo discreto. A continuación se presenta la solución de una ecuación de estado en tiempo discreto mediante el método de la transformada z. Considere el sistema en tiempo discreto descrito por la ecuación (5-28):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-40}$$

Si se toma la transformada z de ambos lados de la ecuación (5-40) se obtiene

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

donde $\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)]$ y $\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{u}(k)]$. Entonces

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

Premultiplicando ambos lados de esta última ecuación por $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) \tag{5-41}$$

Al tomar la transformada inversa z en ambos lados de la ecuación (5-41), da

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]\mathbf{x}(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \tag{5-42}$$

Al comparar la ecuación (5-30) con la ecuación (5-42), obtenemos

$$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \tag{5-43}$$

y

$$\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \tag{5-44}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Observe que la solución del método de la transformada z involucra el proceso de invertir la matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$, lo que puede realizarse mediante métodos analíticos o utilizando una rutina de computadora. La solución también requiere de las transformadas inversas z de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z$ y $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)$.

Ejemplo 5-2

Obtenga la matriz de transición de estado del siguiente sistema en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Posteriormente obtenga el estado $\mathbf{x}(k)$ y la salida $y(k)$ cuando la entrada $u(k) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Suponga que el estado inicial está dado por

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones (5-35) y (5-43), la matriz de transición de estado $\Psi(k)$ es

$$\Psi(k) = \mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]$$

Por tanto, primero se obtiene $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z + 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z + 1}{(z + 0.2)(z + 0.8)} & \dfrac{1}{(z + 0.2)(z + 0.8)} \\ \dfrac{-0.16}{(z + 0.2)(z + 0.8)} & \dfrac{z}{(z + 0.2)(z + 0.8)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{4}{3}}{z + 0.2} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{z + 0.8} & \dfrac{\frac{5}{3}}{z + 0.2} + \dfrac{-\frac{5}{3}}{z + 0.8} \\ \dfrac{-\frac{0.8}{3}}{z + 0.2} + \dfrac{\frac{0.8}{3}}{z + 0.8} & \dfrac{-\frac{1}{3}}{z + 0.2} + \dfrac{\frac{4}{3}}{z + 0.8} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estado $\Psi(k)$ se obtiene ahora como sigue:

$$= \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\dfrac{z}{z + 0.2} - \frac{1}{3}\dfrac{z}{z + 0.8} & \frac{5}{3}\dfrac{z}{z + 0.2} - \frac{5}{3}\dfrac{z}{z + 0.8} \\ -\dfrac{0.8}{3}\dfrac{z}{z + 0.2} + \dfrac{0.8}{3}\dfrac{z}{z + 0.8} & -\frac{1}{3}\dfrac{z}{z + 0.2} + \frac{4}{3}\dfrac{z}{z + 0.8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k - \frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k - \frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k + \frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} \tag{5-45}$$

La ecuación (5-45) da la matriz de transición de estado.

Ahora, se calcula $\mathbf{x}(k)$. La transformada z de $\mathbf{x}(k)$ está dada por

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}U(z)$$
$$= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z)]$$

Dado que

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

se obtiene

$$z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z - 1} \\ \dfrac{z}{z - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z - 1} \\ \dfrac{-z^2 + 2z}{z - 1} \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z)]$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(z^2 + 2)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \\ \dfrac{(-z^2 + 1.84z)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-\frac{17}{6}z}{z+0.2} + \dfrac{\frac{22}{9}z}{z+0.8} + \dfrac{\frac{25}{18}z}{z-1} \\ \dfrac{\frac{3.4}{6}z}{z+0.2} + \dfrac{-\frac{17.6}{9}z}{z+0.8} + \dfrac{\frac{7}{18}z}{z-1} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el vector de estado $\mathbf{x}(k)$ está dado por

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la salida $y(k)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} \\ &= -\tfrac{17}{6}(-0.2)^k + \tfrac{22}{9}(-0.8)^k + \tfrac{25}{18} \end{aligned}$$

Cálculo de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$. La solución de la ecuación de estado dada por la ecuación (5-28) mediante el método de la transformada z requiere del cálculo de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$. El cálculo de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ es, por lo general, una tarea que toma mucho tiempo, excepto en casos simples. Existen métodos tanto analíticos como de cómputo para el cálculo de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$. Aquí se presenta uno.

Método para calcular $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$. Este método está basado en la expansión de la adjunta de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$. La inversa de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ se puede escribir en términos de la adjunta de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$, como sigue:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \frac{\text{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \tag{5-46}$$

Observe que en el determinante $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ se puede escribir como sigue:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n \tag{5-47}$$

Se puede demostrar (vea el problema A-5-13), que adj$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ se puede obtener mediante

$$\text{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) = \mathbf{I}z^{n-1} + \mathbf{H}_1 z^{n-2} + \mathbf{H}_2 z^{n-3} + \cdots + \mathbf{H}_{n-1} \tag{5-48}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{G} + a_1\mathbf{I} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{G}\mathbf{H}_1 + a_2\mathbf{I} \\ &\vdots \\ \mathbf{H}_{n-1} &= \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-2} + a_{n-1}\mathbf{I} \\ \mathbf{H}_n &= \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5-49}$$

Observe que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes que aparecen en el determinante dado por la ecuación (5-47). Las a_i también se pueden obtener (vea el problema A-5-13) mediante el empleo de la traza, como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\operatorname{tr}\mathbf{G} \\ a_2 &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_1 \\ a_3 &= -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ &\vdots \\ a_n &= -\frac{1}{n}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1} \end{aligned} \tag{5-50}$$

(La traza de una matriz de $n \times n$ es la suma de sus elementos diagonales.)

Para un determinante de orden superior ($n > 3$), la expansión del determinante $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ en la forma dada por la ecuación (5-47) puede ocupar mucho tiempo, en este caso, resulta útil emplear la ecuación (5-50) para calcular las a_i, ya que a_1, $\mathbf{H}_1$, a_2, $\mathbf{H}_2$, . . . , a_{n-1}, $\mathbf{H}_{n-1}$ se pueden calcular fácilmente de manera secuencial.

Al sustituir la ecuación (5-49) en la ecuación (5-48) y sustituyendo la ecuación resultante en la ecuación (5-46), se obtiene la inversa de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$. Este método es conveniente para soluciones en computadora; ya existe un programa estándar.

Ejemplo 5-3

Determine la inversa de la matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$, donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

También obtenga $\mathbf{G}^k$.

De las ecuaciones (5-46), se tiene

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}$$

A pesar de que el determinante $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ se puede expandir fácilmente, utilizaremos aquí, para efectos de demostración, la ecuación (5-50) para el cálculo de a_1, a_2 y a_3. Primero observe que

$$a_1 = -\operatorname{tr}\mathbf{G} = -\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix} = 0.3$$

Entonces, de la ecuación (5-49), se obtiene

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{G} + a_1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_1 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0.07 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -0.04$$

Si se sustituye la matriz $\mathbf{H}_1$ y el valor de a_2 que se acaba de obtener en la ecuación (5-49) se obtiene

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{G}\mathbf{H}_1 + a_2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & -0.03 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}$$

y

$$a_3 = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{G}\mathbf{H}_2 = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 0.012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012 \end{bmatrix} = -0.012$$

Observe que

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{G}\mathbf{H}_2 - 0.012\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

La adjunta de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ se puede dar ahora mediante la ecuación (5-48), es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G}) &= \mathbf{I}z^2 + \mathbf{H}_1 z + \mathbf{H}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & -0.02 \\ 0.09 & -0.03 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z^2 + 0.4z + 0.03 & 0.1z + 0.03 & -0.02 \\ 0.3z + 0.09 & z^2 + 0.2z - 0.03 & -0.2z + 0.02 \\ 0 & 0 & z^2 - 0.04 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G}| &= z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = z^3 + 0.3z^2 - 0.04z - 0.012 \\ &= (z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} &= \frac{\mathrm{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{z + 0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \dfrac{0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \dfrac{-0.02}{(z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3)} \\ \dfrac{0.3}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \dfrac{z - 0.1}{(z + 0.2)(z - 0.2)} & \dfrac{-0.2(z - 0.1)}{(z + 0.2)(z - 0.2)(z + 0.3)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z + 0.3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta última ecuación da la inversa de $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$.

A continuación, se obtendrá $\mathbf{G}^k$. De la ecuación (5-43), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^k &= \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{0.25z}{z + 0.2} + \dfrac{0.75z}{z - 0.2} & -\dfrac{0.25z}{z + 0.2} + \dfrac{0.25z}{z - 0.2} & \dfrac{0.5z}{z + 0.2} - \dfrac{0.1z}{z - 0.2} - \dfrac{0.4z}{z + 0.3} \\ -\dfrac{0.75z}{z + 0.2} + \dfrac{0.75z}{z - 0.2} & \dfrac{0.75z}{z + 0.2} + \dfrac{0.25z}{z - 0.2} & -\dfrac{1.5z}{z + 0.2} - \dfrac{0.1z}{z - 0.2} + \dfrac{1.6z}{z + 0.3} \\ 0 & 0 & \dfrac{z}{z + 0.3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.25(-0.2)^k + 0.75(0.2)^k & -0.25(-0.2)^k + 0.25(0.2)^k & \\ -0.75(-0.2)^k + 0.75(0.2)^k & 0.75(-0.2)^k + 0.25(0.2)^k & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5(-0.2)^k - 0.1(0.2)^k - 0.4(-0.3)^k \\ -1.5(-0.2)^k - 0.1(0.2)^k + 1.6(-0.3)^k \\ (-0.3)^k \end{bmatrix} \tag{5-51}$$

Solución de las ecuaciones de estado lineales en tiempo discreto y variantes en el tiempo. Considere la siguiente ecuación de estado lineal en tiempo discreto y variante en el tiempo junto con la correspondiente ecuación de salida:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \tag{5-52}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \tag{5-53}$$

La solución de la ecuación (5-52) se puede encontrar fácilmente mediante recursión, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(h+1) &= \mathbf{G}(h)\mathbf{x}(h) + \mathbf{H}(h)\mathbf{u}(h) \\ \mathbf{x}(h+2) &= \mathbf{G}(h+1)\mathbf{x}(h+1) + \mathbf{H}(h+1)\mathbf{u}(h+1) \\ &= \mathbf{G}(h+1)\mathbf{G}(h)\mathbf{x}(h) + \mathbf{G}(h+1)\mathbf{H}(h)\mathbf{u}(h) + \mathbf{H}(h+1)\mathbf{u}(h+1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

La matriz de transición de estado (matriz fundamental) para el sistema definido por la ecuación (5-52) se define como $\Psi(k, h)$. Se trata de una matriz única, que satisface las condiciones

$$\Psi(k+1, h) = \mathbf{G}(k)\Psi(k, h), \qquad \Psi(h, h) = \mathbf{I}$$

donde $k = h, h+1, h+2, \ldots$. Se puede ver que la matriz de transición de estado $\Psi(k, h)$ está dada por la ecuación

$$\Psi(k, h) = \mathbf{G}(k-1)\mathbf{G}(k-2)\cdots\mathbf{G}(h), \qquad k > h \tag{5-54}$$

Utilizando $\Psi(k, h)$, la solución de la ecuación (5-52) se convierte en

$$\mathbf{x}(k) = \Psi(k, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{i=h}^{k-1} \Psi(k, j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j), \qquad k > h \tag{5-55}$$

Observe que el primer término segundo miembro de la ecuación (5-55) es la contribución del estado inicial $\mathbf{x}(h)$ al estado actual $\mathbf{x}(k)$, y que el segundo término es la contribución de la entrada $\mathbf{u}(h)$, $\mathbf{u}(h+1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$.

Es fácil verificar la ecuación (5-55). En referencia a la ecuación (5-54), se tiene

$$\Psi(k+1, h) = \mathbf{G}(k)\mathbf{G}(k-1)\cdots\mathbf{G}(h) = \mathbf{G}(k)\Psi(k, h) \tag{5-56}$$

Si se sustituye la ecuación (5-56) en

$$\mathbf{x}(k+1) = \Psi(k+1, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k} \Psi(k+1, j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j)$$

se obtiene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\Psi(k, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \Psi(k+1, j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j) + \Psi(k+1, k+1)\mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$= \mathbf{G}(k)\left[\Psi(k,h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1}\Psi(k,j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j)\right] + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$
$$= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

Por tanto, se ha demostrado que la ecuación (5-55) es la solución de la ecuación (5-52).

Una vez obtenida la solución de $\mathbf{x}(k)$, la ecuación de salida, ecuación (5-53), se convierte en:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\Psi(k,h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1}\mathbf{C}(k)\Psi(k,j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k), \qquad k > h$$

Si $\mathbf{G}(k)$ es no singular para todos los valores de k considerados, de forma que la inversa de $\Psi(k, h)$ exista, entonces la inversa de $\Psi(k, h)$, denotada como $\Psi(h, k)$, está dada como sigue:

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(k,h) &= \Psi(h,k)\\ &= [\mathbf{G}(k-1)\mathbf{G}(k-2)\cdots\mathbf{G}(h)]^{-1}\\ &= \mathbf{G}^{-1}(h)\mathbf{G}^{-1}(h+1)\cdots\mathbf{G}^{-1}(k-1)\end{aligned} \tag{5-57}$$

Resumen sobre $\Psi(k, h)$. Un resumen de la matriz de transición de estado $\Psi(k, h)$ da lo siguiente:

1. $\Psi(k, k) = \mathbf{I}$
2. $\Psi(k, h) = \mathbf{G}(k-1)\mathbf{G}(k-2)\cdots\mathbf{G}(h), \qquad k > h$
3. Si la inversa de $\Psi(k, h)$ existe, entonces
$$\Psi^{-1}(k,h) = \Psi(h,k)$$
4. Si $\mathbf{G}(k)$ es no singular para todos los valores de k considerados, entonces
$$\Psi(k, i) = \Psi(k, j)\Psi(j, i), \qquad \text{para cualquier } i, j, k$$
Si $\mathbf{G}(k)$ es singular para cualquiera de los valores de k, entonces
$$\Psi(k, i) = \Psi(k, j)\Psi(j, i), \qquad \text{para } k > j > i$$

5-4 MATRIZ DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PULSO

Un sistema en tiempo discreto de una entrada y una salida se puede representar o modelar mediante una función de transferencia pulso. La extensión del concepto de la función de transferencia pulso a un sistema en tiempo discreto de varias entradas y varias salidas da la matriz de función de transferencia pulso. En esta sección se estudiará la relación entre la representación en el espacio estado y la representación mediante la matriz de función de transferencia pulso.

Matriz de función de transferencia pulso. La representación en el espacio de estado de un sistema lineal en tiempo discreto e invariante en el tiempo de orden n, con r entradas y m salidas, se puede dar mediante

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-58}$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{5-59}$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector-n, $\mathbf{u}(k)$ es un vector-r y $\mathbf{y}(k)$ es un vector-m, $\mathbf{G}$ es una matriz de $n \times n$, $\mathbf{H}$ es una matriz de $n \times r$, $\mathbf{C}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{D}$ es una matriz de $m \times r$. Al tomar las transformadas z de las ecuaciones (5-58) y (5-59), se obtiene

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)$$

Observe que la definición de función de transferencia pulso exige la suposición de condiciones iniciales cero, aquí también suponemos que el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ es cero. Entonces se obtiene

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

y

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(z) = \mathbf{F}(z)\mathbf{U}(z)$$

donde

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} \tag{5-60}$$

$\mathbf{F}(z)$ se conoce como matriz de función de transferencia pulso. Se trata de una matriz de $m \times r$. La matriz de función de transferencia pulso $\mathbf{F}(z)$ caracteriza la dinámica de entrada/salida del sistema de tiempo discreto dado.

En vista de que la inversa de la matriz $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})$ se puede escribir en la forma

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \frac{\text{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}$$

la matriz de función de transferencia pulso $\mathbf{F}(z)$ se puede dar mediante la ecuación

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{C}\,\text{adj}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{H}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} + \mathbf{D}$$

Es claro que los polos de $\mathbf{F}(z)$ son los ceros de $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$. Esto significa que la ecuación característica del sistema en tiempo discreto está dada por

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$$

o bien

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

donde los coeficientes a_i dependen de los elementos de $\mathbf{G}$.

Transformación de similitud. Se ha demostrado que para el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

la matriz de función de transferencia pulso es

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}$$

En la sección 5-2 se mostró que varias representaciones en el espacio de estado distintas para un sistema dado están interrelacionadas por una transformación de similitud. Al definir un nuevo vector estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ utilizando una matriz de transformación de similitud $\mathbf{P}$, es decir

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

donde $\mathbf{P}$ es una matriz no singular de $n \times n$, se tiene

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k) \tag{5-61}$$

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \tag{5-62}$$

donde $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, están relacionadas, respectivamente, mediante

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}$$

La matriz de función de transferencia pulso $\hat{\mathbf{F}}(z)$ para el sistema definido por las ecuaciones (5-61) y (5-62) es

$$\hat{\mathbf{F}}(z) = \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{D}}$$

Observe que las matrices de función de transferencia pulso $\mathbf{F}(z)$ y $\hat{\mathbf{F}}(z)$ son iguales, en vista de que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}(z) &= \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{C}\mathbf{P}(z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}(z\mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(z\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D} = \mathbf{F}(z)\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de función de transferencia pulso es invariante bajo una transformación de similitud. Es decir, no depende del vector estado determinado $\mathbf{x}(k)$ seleccionado para la representación del sistema.

La ecuación característica $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ también es invariante bajo una transformación de similitud, ya que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = |\mathbf{P}^{-1}||z\mathbf{I} - \mathbf{G}||\mathbf{P}| = |z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}| = |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}|$$

Por tanto, los valores característicos de $\mathbf{G}$ son invariantes bajo una transformación de similitud.

5-5 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO

En el control digital de plantas en tiempo continuo es necesario convertir ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo, en ecuaciones en el espacio de estado en tiempo discreto. Se puede realizar dicha conversión si se introducen en los sistemas en tiempo continuo muestreadores y dispositivos de retención ficticios. El error introducido por la discretización se puede hacer despreciar utilizando un período de muestreo suficientemente pequeño en comparación con la constante de tiempo más significativa del sistema.

Repaso de la solución de las ecuaciones de estado en tiempo continuo. Primero se revisará la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$. La matriz exponencial se define como

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!}$$

Debido a que la serie finita $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k t^k / k$ converge, la serie se puede diferenciar término por término para dar

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right]\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

La matriz exponencial tiene la propiedad de que

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Esto se puede probar como sigue:

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k s^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\left[\sum_{i=0}^{k}\frac{t^i s^{k-i}}{i!(k-i)!}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{(t+s)^k}{k!} = e^{\mathbf{A}(t+s)}$$

En particular, si $s = -t$, entonces

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ es $e^{-\mathbf{A}t}$. Dado que siempre existe la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$, $e^{\mathbf{A}t}$ es no singular.

Es importante apuntar que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

A continuación se obtendrá la solución de la ecuación de estado en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5-63}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado (vector n), $\mathbf{u}$ es el vector de entrada (vector r), $\mathbf{A}$ es una matriz constante de $n \times n$, y $\mathbf{B}$ es una matriz constante de $n \times r$.

Si la ecuación (5-63) se escribe en la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

y premultiplicamos ambos lados de esta última ecuación por $e^{-\mathbf{A}t}$, obtenemos

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Al integrar la ecuación anterior entre 0 y t, da

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

es decir

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{5-64}$$

La ecuación (5-64) es la solución de la ecuación (5-63). Observe que la solución de la ecuación de estado que comienza en el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{5-65}$$

Discretización de las ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo. Ahora se presentará un procedimiento para la discretización de ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo. Se supone que el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ cambia sólo en instantes de muestreo uniformemente espaciados. Observe que la operación de muestreo aquí es ficticia. Se deducirá una ecuación de estado en tiempo discreto y una ecuación de salida que den como resultado los valores exactos en $t = kT$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Considere la ecuación de estado en tiempo continuo y la ecuación de salida

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5-66}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{5-67}$$

En el siguiente análisis, con el objeto de simplificar la presentación, se utilizará la notación kT y $(k+1)T$ en vez de k y $k+1$. La representación en tiempo discreto de la ecuación (5-66) tomará la forma

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \tag{5-68}$$

Observe que las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dependen del período de muestreo T. Una vez fijo el período de muestreo T, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son matrices constantes.

Para determinar $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$, se utiliza la ecuación (5-64), solución de la ecuación (5-66). Se supone que la entrada $\mathbf{u}(t)$ es muestreada y alimentada a un retenedor de orden cero, de forma que todos los componentes de $\mathbf{u}(t)$ sean constantes en el intervalo entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera, es decir

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \qquad \text{para } kT \le t < kT + T \tag{5-69}$$

En vista de que

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{5-70}$$

y

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}kT}\int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{5-71}$$

al multiplicar la ecuación (5-71) por $e^{\mathbf{A}t}$ y sustraerla de la ecuación (5-70) nos da

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Dado que la ecuación (5-69) $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$ para $kT \le t < kT + T$, se puede sustituir $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT) =$ constante en esta última ecuación. [Observe que $\mathbf{u}(t)$ puede tomar un valor en $t = kT + T$, es decir, $\mathbf{u}(kT+T)$, que puede ser distinto de $\mathbf{u}(kT)$. Este valor en $\mathbf{u}(\tau)$ con $\tau = kT + T$, que es el límite superior de la integración, no afecta el valor de la integral en esta última ecuación, ya que el integrando no incluye funciones impulso.] Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T}\int_0^T e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\,dt$$

$$= e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\,d\lambda \tag{5-72}$$

donde $\lambda = T - t$. Si se definen

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \tag{5-73}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\,d\lambda\right)\mathbf{B} \tag{5-74}$$

entonces la ecuación (5-72) se convierte en

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \tag{5-75}$$

que es la ecuación (5-68). Entonces, las ecuaciones (5-73) y (5-74) dan las matrices deseadas $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$. Note que $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$ dependen del período de muestreo T. Con referencia a la ecuación (5-67), la ecuación de salida se convierte en

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \tag{5-76}$$

donde las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son matrices constantes y no dependen del período de muestreo T.

Si la matriz $\mathbf{A}$ es no singular, entonces $\mathbf{H}(T)$ dada por la ecuación (5-74) se puede simplificar a

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\,d\lambda\right)\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B} = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Comentarios

1. En el enfoque del espacio de estado, observe que al suponer el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ constante entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera, la representación en tiempo discreto se puede obtener simplemente integrando la ecuación de estado en tiempo continuo sobre un período de muestreo. La ecuación de estado en tiempo discreto dada por la ecuación (5-68) se conoce como *equivalente con retenedor de orden cero* de la ecuación de estado en tiempo continuo dada por la ecuación (5-66).
2. En general, para convertir la ecuación de un sistema en tiempo continuo en una ecuación de un sistema en tiempo discreto, es necesario algún tipo de aproximación. Es importante apuntar que la ecuación (5-75) no incluye ninguna aproximación, siempre que el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ sea constante entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera, tal y como se supuso en la deducción.
3. Observe que para $T << 1$, $\mathbf{G}(T) \doteq \mathbf{G}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$. Por tanto, conforme el período de muestreo T se hace muy pequeño, $\mathbf{G}(T)$ se aproxima a la matriz de identidad.

Ejemplo 5-4

Considere el sistema en tiempo continuo dado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Obtenga la representación en el espacio de estado en tiempo continuo de este sistema. Luego discretice la ecuación de estado y la ecuación de salida y obtenga la representación en el espacio de estado en tiempo discreto del sistema. También obtenga la función de transferencia pulso del sistema mediante el empleo de la ecuación (5-60).

La representación en el espacio de estado en tiempo continuo del sistema es simplemente

$$\dot{x} = -ax + u$$

$$y = x$$

Ahora se discretiza la ecuación de estado y la ecuación de salida. Con referencia a las ecuaciones (5-73) y (5-74), se tiene

$$G(T) = e^{-aT}$$

$$H(T) = \int_0^T e^{-a\lambda}\, d\lambda = \frac{1 - e^{-aT}}{a}$$

Por tanto, la versión discretizada de las ecuaciones de este sistema es

$$x(k + 1) = e^{-aT}x(k) + \frac{1 - e^{-aT}}{a}u(k)$$

$$y(k) = x(k)$$

Con referencia a la ecuación (5-60), la función de transferencia pulso para este sistema es

$$F(z) = C(zI - G)^{-1}H$$

$$= (z - e^{-aT})^{-1}\frac{1 - e^{-aT}}{a} = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

Este resultado concuerda con la transformada z de $G(s)$ cuando está precedida por un muestreador y un retenedor de orden cero [es decir, en donde la señal $u(t)$ se muestrea y alimenta a un retenedor de orden cero antes de que sea aplicada a $G(s)$]:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s + a}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s + a)}\right]$$

$$= \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

Ejemplo 5-5

Obtenga las ecuaciones de estado y de salida en tiempo discreto y la función de transferencia pulso (cuando el período de muestreo $T = 1$) del sistema en tiempo continuo siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s + 2)}$$

mismo que se puede representar en el espacio de estado mediante las ecuaciones

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

La ecuación de estado en tiempo discreto deseada tendrá la forma

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)u(kT)$$

donde las matrices $\mathbf{G}(T)$ y $\dot{\mathbf{H}}(T)$ se obtienen a partir de las ecuaciones (5-73) y (5-74) como sigue:

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}t}\,dt\right)\mathbf{B} = \left\{\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} u(kT)$$

La ecuación de salida se convierte en

$$y(kT) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

Cuando el período de muestreo es de 1 segundo, es decir, $T = 1$, la ecuación de estado en tiempo discreto y la ecuación de salida se convierten, respectivamente, en

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4323 \\ 0 & 0.1353 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2838 \\ 0.4323 \end{bmatrix} u(k)$$

y

$$y(k) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

La representación en la función de transferencia pulso de este sistema se puede obtener a partir de la ecuación (5-60), como sigue:

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D \\ &= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z - 1 & -0.4323 \\ 0 & z - 0.1353 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.2838 \\ 0.4323 \end{bmatrix} + 0 \\ &= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{0.4323}{(z-1)(z-0.1353)} \\ 0 & \frac{1}{z-0.1353} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2838 \\ 0.4323 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.2838z + 0.1485}{(z-1)(z-0.1353)} \\ &= \frac{0.2838z^{-1} + 0.1485z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.1353z^{-1})} \end{aligned}$$

Observe que se puede obtener la misma función de transferencia pulso si se toma la transformada z de $G(s)$ cuando está precedida de un muestreador y un retenedor de orden cero. Al suponer $T = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{Ts}}{s}\frac{1}{s(s+2)}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{0.5}{s^2} - \frac{0.25}{s} + \frac{0.25}{s+2}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left[\frac{0.5z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{0.25}{1 - z^{-1}} + \frac{0.25}{1 - 0.1353z^{-1}}\right] \\ &= \frac{0.2838z^{-1} + 0.1485z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.1353z^{-1})} \end{aligned}$$

Enfoque de MATLAB para la discretización de ecuaciones de estado en tiempo continuo. MATLAB tiene un comando muy útil para discretizar una ecuación de estado en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

y convertirla a

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{Hu}(k)$$

El comando MATLAB para discretización es

```
[G,H] = c2d(A,B,T)
```

donde T es el período de muestreo del sistema en tiempo discreto. T se deberá especificar en segundos.

Si se requiere de buena precisión en la obtención de **G** y de **H** utilice *format long*. Si solamente se necesitan cuatro decimales, utilice *format short*. Si no se incluye enunciado de formato en el programa, MATLAB producirá **G** y **H** en *format short*.

Considere el ejemplo siguiente: si el sistema en tiempo continuo está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{5-77}$$

entonces, al considerar que el período de muestreo es de 0.05 segundos, se obtienen **G** y **H** como sigue:

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

    0.9709    0.0448
   -1.1212    0.7915

H =

    0.0012
    0.0448
```

Observe que la matriz de estado **G** y la matriz de entrada **H** de la ecuación en el espacio de estado de tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

dependen del período de muestreo T. Por ejemplo, considere la discretización del sistema en tiempo continuo dado por la ecuación (5-77) con dos períodos de muestreo distintos: $T = 0.2$ segundos y $T = 1$ segundo. Como se ha visto en las salidas de MATLAB anteriores y en las que siguen, un conjunto de matrices **G** y **H** difieren en función de un período de muestreo T diferente.

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,0.2)

G =

      0.6401    0.1161
     -2.9017    0.1758

H =

      0.0144
      0.1161
```

```
A = [0   1;-25   -4];
B = [0;1];
[G,H] = c2d(A,B,1)

G =

     -0.0761   -0.0293
      0.7321    0.0410

H =

      0.0430
     -0.0293
```

Como otro ejemplo, veamos el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Al suponer que el período de muestreo T es de 0.5 segundos y sin especificar el formato, se obtiene la siguiente ecuación de estado en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde las matrices **G** y **H** se pueden encontrar en la siguiente salida de computadora:

```
A = [0          1  0  0
     20.601     0  0  0
     0          0  0  1
     -0.4905    0  0  0];
B = [0;-1;0;0.5];
[G,H] = c2d(A,B,0.05)

G =

     1.0259    0.0504         0         0
     1.0389    1.0259         0         0
    -0.0006   -0.0000    1.0000    0.0500
    -0.0247   -0.0006         0    1.0000

H =

    -0.0013
    -0.0504
     0.0006
     0.0250
```

Respuesta en tiempo entre dos instantes de muestreo consecutivos. En un sistema en tiempo continuo muestreado, la salida es constante en el tiempo. Como se vio en los capítulos 3 y 4, la solución mediante la transformada z de la ecuación del sistema en tiempo discreto da la respuesta de la salida sólo en los instantes de muestreo. En la práctica, se puede desear determinar la salida entre dos instantes de muestreo consecutivos. Existen algunos métodos para encontrar la respuesta (salida) entre dos instantes de muestreo consecutivos, como el método de la transformada de Laplace y el método de la transformada z modificada (vea el apéndice B). Aquí se demostrará cómo se puede modificar fácilmente el método en el espacio de estado para obtener la salida entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera.

Considere el sistema en tiempo continuo invariante en el tiempo definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Se supone que la entrada $\mathbf{u}$ se muestrea y alimenta a un retenedor de orden cero. Entonces $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT)$ para $kT \leq \tau < kT + T$. Con referencia a la ecuación (5-65), la solución de la ecuación de estado que comienza con el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Para obtener la respuesta del sistema muestreado en $t = kT + \Delta T$, donde $0 < \Delta T < T$, se hace que $t = kT + \Delta T$, $t_0 = kT$ y $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT)$ en la solución $\mathbf{x}(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(kT + \Delta T) &= e^{\mathbf{A}\Delta T}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+\Delta T} e^{\mathbf{A}(kT+\Delta T-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\,d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta T}\mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{\Delta T} e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT)\,d\lambda\end{aligned}$$

donde $\lambda = kT + \Delta T - \tau$. Se define

$$\mathbf{G}(\Delta T) = e^{\mathbf{A}\Delta T} \tag{5-78}$$

$$\mathbf{H}(\Delta T) = \left(\int_{0}^{\Delta T} e^{\mathbf{A}\lambda}\,d\lambda\right)\mathbf{B} \tag{5-79}$$

Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{x}(kT + \Delta T) = \mathbf{G}(\Delta T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(\Delta T)\mathbf{u}(kT) \tag{5-80}$$

La salida $\mathbf{y}(kT + \Delta T)$ se puede dar mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(kT + \Delta T) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(kT + \Delta T) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{G}(\Delta T)\mathbf{x}(kT) + [\mathbf{C}\mathbf{H}(\Delta T) + \mathbf{D}]\mathbf{u}(kT)\end{aligned} \tag{5-81}$$

Por tanto, los valores de $\mathbf{x}(kT + \Delta T)$ y $\mathbf{y}(kT + \Delta T)$ entre dos instantes de muestreo consecutivos cualesquiera se pueden obtener si se calcula $\mathbf{G}(\Delta T)$ y $\mathbf{H}(\Delta T)$ para varios valores de ΔT, donde $0 < \Delta T < T$, y se introducen dichos valores calculados en las ecuaciones (5-80) y (5-81). (Estos cálculos se pueden programar fácilmente en una computadora digital.)

Ejemplo 5-6

Considere el sistema analizado en el ejemplo 5-5. Obtenga la ecuación de estado en tiempo discreto así como la ecuación de salida en $t = kT + \Delta T$. También obtenga las expresiones específicas correspondientes a la ecuación de estado y la ecuación de salida cuando $T = 1$ segundo y $\Delta T = 0.5$ segundos.

En el ejemplo 5-5, se obtuvieron las matrices $\mathbf{G}(T)$ y $\mathbf{H}(T)$ como sigue:

$$\mathbf{G}(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(T + \dfrac{e^{-2T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

Para obtener la ecuación de estado y la ecuación de salida en $t = kT + \Delta T$, donde $0 < \Delta T < T$, primero se convierte $\mathbf{G}(T)$ en $\mathbf{G}(\Delta T)$ y $\mathbf{H}(T)$ en $\mathbf{H}(\Delta T)$, y luego se sustituye $\mathbf{G}(\Delta T)$ y $\mathbf{H}(\Delta T)$ en las ecuaciones (5-80) y (5-81), como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \Delta T) \\ x_2(kT + \Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Delta T}) \\ 0 & e^{-2\Delta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\Delta T + \dfrac{e^{-2\Delta T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Delta T}) \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT + \Delta T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Delta T}) \\ 0 & e^{-2\Delta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\Delta T + \dfrac{e^{-2\Delta T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Delta T}) \end{bmatrix} u(kT)$$

Para $T = 1$ y $\Delta T = 0.5$ se obtiene la ecuación de estado y la ecuación de salida como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 0.5) \\ x_2(k + 0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3161 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0920 \\ 0.3161 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k + 0.5) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + (0.0920)u(k)$$

5-6 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

El análisis de estabilidad de Liapunov juega un papel importante en el análisis de la estabilidad de los sistemas de control descritos por ecuaciones en el espacio de estado. Existen dos métodos de análisis de estabilidad de Liapunov, llamados *primer método* y *segundo método*; ambos se aplican para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales o en diferencias ordinarias. El primer método está formado por procedimientos en los que se utilizan las formas explícitas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales o de las ecuaciones en diferencias para el análisis. Por otra parte, el segundo método no requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales o en diferencias, por lo que resulta más útil en la práctica.

Aunque existen muchos criterios de estabilidad poderosos para los sistemas de control, como son el criterio de estabilidad de Jury y el criterio de estabilidad de Routh—Hurwitz, éstos están restringidos a sistemas lineales invariantes en el tiempo. Por otro lado, el segundo método de Liapunov

no está limitado a sistemas lineales invariantes en el tiempo: es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales, variantes e invariantes en el tiempo. En particular, el segundo método de Liapunov es indispensable para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales en los que las soluciones exactas no son posibles. (Es importante señalar, sin embargo, que a pesar de que el segundo método de Liapunov es aplicable a cualquier sistema no lineal, los resultados no son una tarea fácil. Se necesita experiencia e imaginación para llevar a cabo el análisis de estabilidad en la mayoría de los sistemas no lineales.)

El segundo método de Liapunov también se conoce como *método directo* de Liapunov.

Segundo método de Liapunov. De la teoría de la mecánica clásica, se sabe que un sistema vibratorio es estable si su energía total se reduce continuamente, hasta alcanzar un estado de equilibrio.

El segundo método de Liapunov se basa en una generalización de lo anterior: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, entonces la energía almacenada en él desplazada dentro del dominio de atracción se decrementa al aumentar el tiempo, hasta que por último adopta su valor mínimo en el estado de equilibrio. Sin embargo, para sistemas puramente matemáticos, no existe una forma simple de definir una "función de energía". Para vencer esta dificultad, Liapunov introdujo la función de Liapunov, una función ficticia de energía. Esta idea es más general y más utilizada qué la de la energía. De hecho, cualquier función escalar que satisfaga las hipótesis de los teoremas de estabilidad de Liapunov (vea los teoremas 5-1 hasta 5-6) puede servir como función de Liapunov.

Antes de que se analice más profundamente la función de Liapunov, es necesario explicar la definición positiva de las funciones escalares.

Definición positiva de funciones escalares. Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida positiva* en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estado) si $V(\mathbf{x}) > 0$ para todos los estados $\mathbf{x}$ no cero de la región Ω y si $V(\mathbf{0}) = 0$.

Se dice que una función variante en el tiempo $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estado) si está limitada por debajo por una función definida positiva invariante en el tiempo, es decir, si existe una función definida positiva $V(\mathbf{x})$ tal que

$$V(\mathbf{x}, t) > V(\mathbf{x}), \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

$$V(\mathbf{0}, t) > 0, \qquad \text{para toda } t \geq t_0$$

Definición negativa de funciones escalares. Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida negativa* si $-V(\mathbf{x})$ es definida positiva.

Semidefinición positiva de funciones escalares. Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida positiva* si es positiva en todos los estados en la región Ω excepto en el origen y en determinados estados donde es cero.

Semidefinición negativa de funciones escalares. Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida negativa* si $-V(\mathbf{x})$ es positiva semidefinida.

Indefinición de funciones escalares. Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *indefinida* si en la región Ω adopta tanto valores positivos como negativos, independientemente de lo pequeña que sea la región Ω.

Ejemplo 5-7

En este ejemplo se dan varias funciones escalares y sus clasificaciones de acuerdo con las definiciones anteriores. Aquí se supone que $\mathbf{x}$ es un vector de dos dimensiones.

1. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ definida positiva
2. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{1+x_2^2}$ definida positiva
3. $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$ semidefinida positiva
4. $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (x_1 + x_2)^2$ definida negativa
5. $V(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2^2$ indefinida

Funciones de Liapunov. La función de Liapunov, que es una función escalar, es una función definida positiva y es continua junto con sus primeras derivadas parciales (en relación con sus argumentos) en la región Ω alrededor del origen y tiene una derivada con respecto al tiempo que, cuando se toma a lo largo de la trayectoria, es definida negativa (o semidefinida negativa). Las funciones de Liapunov involucran a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y, posiblemente, a t. Se expresan en la forma $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, o sólo mediante $V(\mathbf{x}, t)$. Si las funciones de Liapunov no incluyen a t en forma explícita, entonces se expresan mediante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o bien, $V(\mathbf{x})$.

Observe que $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es de hecho la derivada de $V(\mathbf{x}, t)$ con respecto a t a lo largo de una solución del sistema. Por tanto, $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$ implica que $V(\mathbf{x}, t)$ se va decrementando en función de t. Una función de Liapunov no es única para un sistema dado. (Por esta razón, el segundo método de Liapunov es una herramienta más poderosa que las consideraciones convencionales de energía. Observe que para un sistema cuya energía E se reduce en promedio, pero no necesariamente es estable en cada instante, E no es una función de Liapunov.)

Más adelante en esta sección se demostrará que en el segundo método de Liapunov el comportamiento del signo de $V(\mathbf{x}, t)$ y el de su derivada de tiempo $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = dV(\mathbf{x}, t)/dt$ dan información sobre la estabilidad de un estado en equilibrio sin tener la solución.

Observe que la función definida positiva más sencilla es de forma cuadrática:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

En general, las funciones de Liapunov pueden no ser de forma cuadrática simple. No obstante, en el caso de cualquier función de Liapunov, los términos de grado menor en V deben ser pares. Esto se puede ver como sigue. Si se definen

$$\frac{x_1}{x_n} = \hat{x}_1, \qquad \frac{x_2}{x_n} = \hat{x}_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{x_{n-1}}{x_n} = \hat{x}_{n-1}$$

entonces en la vecindad del origen, sólo los términos de grado más bajo se harán dominantes y $V(\mathbf{x})$ se puede escribir como

$$V(\mathbf{x}) = x_n^p V(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n-1}, 1)$$

Si se mantienen las $\hat{x}_i$ fijas, $V(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n-1}, 1)$ será una cantidad fija. Para el caso de p impar, $\hat{x}_n^p$ puede adoptar tanto valores positivos como negativos cerca del origen, lo que significa que $V(\mathbf{x})$ no es definida positiva. Por tanto, p deberá ser par.

A continuación se dan las definiciones de sistema, estado de equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad.

Sistema. El sistema que se considera está definido como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{5-82}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de estado (un vector-n) y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es un vector-n cuyos elementos son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y de t. (Observe que como modelo se utiliza un sistema de tiempo continuo para presentar los conceptos básicos sobre el análisis de estabilidad mediante el segundo método de Liapunov. Posteriormente se extienden los resultados obtenidos al sistema en tiempo discreto.) Se supone que el sistema de la ecuación (5-82) tiene una solución única, que empieza en la condición inicial dada. La solución de la ecuación (5-82) se denota como $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$, donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ en $t = t_0$ y t es el tiempo observado. Por tanto,

$$\phi(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$$

Estado de equilibrio. En el sistema de la ecuación (5-82), un estado $\mathbf{x}_e$, donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para toda } t \tag{5-83}$$

se llama *estado de equilibrio* para el sistema. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, esto es, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces sólo existirá un estado de equilibrio si $\mathbf{A}$ es no singular, y un número infinito de estados de equilibrio si $\mathbf{A}$ es singular. En el caso de los sistemas no lineales, pueden existir uno o más estados de equilibrio. Estos estados corresponden a las soluciones constantes del sistema ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ para toda t). La determinación de los estados de equilibrio no involucra la solución de la ecuación diferencial del sistema, ecuación (5-82), sino sólo la solución de la ecuación (5-83).

Cualquier estado de equilibrio aislado (es decir aislado de otros) puede ser desplazado al origen de las coordenadas, o $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = 0$, mediante traslación de coordenadas. En esta sección, únicamente se tratará el análisis de estabilidad de este tipo de estados.

Estabilidad en el sentido de Liapunov. A continuación, una región esférica de radio r, alrededor de un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ se denotará como

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq r$$

donde $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ se llama *norma Euclidiana* y se define como sigue:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Sea $S(\delta)$ el conjunto formado por todos los puntos tales que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$$

y hagamos que $S(\epsilon)$ sean todos los puntos tales que

$$\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \delta, \qquad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema de la ecuación (5-82) es *estable en el sentido de Liapunov* si, para cada $S(\epsilon)$ existe un $S(\delta)$ tal que las trayectorias que se inicien en $S(\delta)$ no salgan de $S(\epsilon)$ al aumentar t en forma indefinida. El número real δ depende de ϵ y, en general, también depende de t_0. Si δ no depende de t_0, se dice que el estado de equilibrio es *uniformemente estable*.

Lo que se ha enunciado aquí es que primero se escoge la región $S(\epsilon)$ y, para cada $S(\epsilon)$, deberá existir una región $S(\delta)$ tal que trayectorias que se inicien dentro de $S(\delta)$ no salgan de $S(\epsilon)$ conforme t se incrementa en forma indefinida.

Estabilidad asintótica. Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema de la ecuación (5-82) es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Liapunov y si cada solución que se inicie desde el interior de $S(\delta)$ converge, sin salir de $S(\epsilon)$ hacia $\mathbf{x}_e$ conforme t se incrementa en forma indefinida.

En la práctica, la estabilidad asintótica es más importante que la simple estabilidad. Sin embargo, dado que la estabilidad asintótica es un concepto local, el hecho de establecer la estabilidad asintótica no necesariamente significa que el sistema operará de manera correcta. Por lo general, es necesario algún conocimiento del tamaño de la región más grande de la estabilidad asintótica. Esta región se conoce como *dominio de atracción*. Es esa parte del espacio de estado en la cual se originan las trayectorias asintóticamente estables. En otras palabras, cualquier trayectoria que se origine en el dominio de atracción es asintóticamente estable.

Estabilidad asintótica global. Si la estabilidad asintótica es válida para todos los estados (para todos los puntos en el espacio de estado) a partir de donde se originan todas las trayectorias, se dice que el estado de equilibrio es *estable asintóticamente global*. Esto es, el estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema dado por la ecuación (5-82) se dice estable asintóticamente global si es estable y cada solución converge a $\mathbf{x}_e$ conforme t se incrementa en forma indefinida. Es claro que una condición necesaria para la estabilidad asintótica global es que exista sólo un estado de equilibrio en la totalidad del espacio de estado.

En problemas de ingeniería de control, la estabilidad asintótica global es una característica deseable. Si el estado de equilibrio no es estable asintóticamente global, entonces el problema se convierte en determinar la región más grande de estabilidad asintótica. Esto por lo regular es muy difícil. No obstante, para efectos prácticos, es suficiente con determinar una región de estabilidad asintótica lo suficientemente grande para que ninguna perturbación la exceda.

Inestabilidad. Se dice que un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ es inestable si para algún número real $\epsilon > 0$ y cualquier número real $\delta > 0$, sin importar qué tan pequeño, siempre existirá un estado $\mathbf{x}_0$ en $S(\delta)$ tal que la trayectoria que se inicie en ese estado salga de $S(\epsilon)$.

Representación gráfica de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad. Una representación gráfica de las definiciones anteriores aclarará sus significados.

Consideremos el caso de dos dimensiones. Las figuras 5-2*a*), *b*) y *c*) muestran los estados de equilibrio y las trayectorias típicas que corresponden a estabilidad, estabilidad asintótica e inestabi-

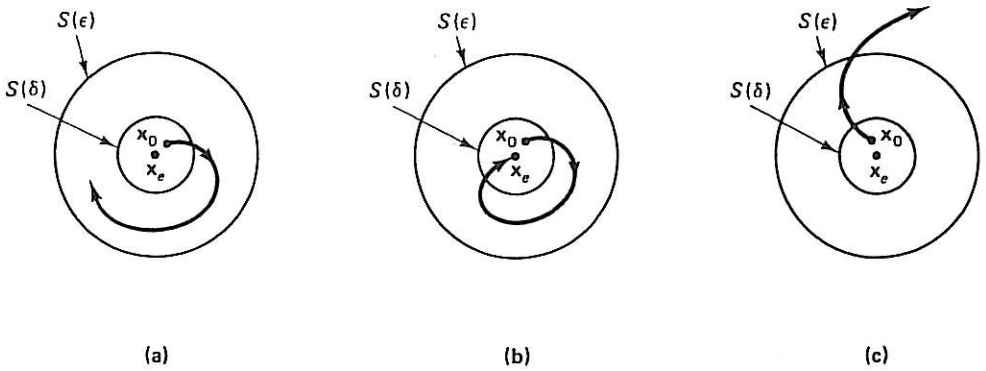


Figura 5-2 *a*) Estado de equilibrio estable y una trayectoria representativa; *b*) estado de equilibrio estable asintóticamente y una trayectoria representativa; *c*) estado de equilibrio inestable y una trayectoria representativa.

lidad en forma respectiva. En la figura 5-2*a*), *b*) o *c*), la región $S(\delta)$ limita el estado inicial $\mathbf{x}_0$, y la región $S(\epsilon)$ corresponde a los límites de la trayectoria que se inicia de cualquier estado inicial $\mathbf{x}_0$ en la región $S(\delta)$.

Observe que las definiciones anteriores no especifican la región exacta de las condiciones iniciales permisibles. Por tanto, las definiciones sólo se aplican a la vecindad del estado de equilibrio, a menos que $S(\epsilon)$ corresponda a la totalidad del plano de estado.

Observe que en la figura 5-2*c*) la trayectoria sale de $S(\epsilon)$ y, por tanto, todo el estado de equilibrio es inestable. No podemos, sin embargo, decir que la trayectoria se irá al infinito, ya que podría acercarse a un ciclo límite fuera de la región $S(\epsilon)$. (Si un sistema lineal de tiempo invariante es inestable, las trayectorias que se inician incluso cerca del estado de equilibrio inestable van al infinito. Pero tratándose de sistemas no lineales, esto no es necesariamente cierto.)

Es importante señalar que las definiciones aquí presentadas no son las únicas que definen los conceptos de la estabilidad de un estado de equilibrio. De hecho, existen algunos libros con diferentes formas de definir la estabilidad. Por ejemplo, en la teoría de control convencional, sólo aquellos sistemas que son estables asintóticamente se denominan sistemas estables, y aquellos sistemas estables en el sentido de Liapunov, pero que no son estables asintóticamente, se llaman inestables. Otro ejemplo es la estabilidad BIBO. Un sistema lineal de tiempo invariante se llama estable de entrada acotada y salida acotada (estable BIBO) si la salida que se inicia a partir de un estado inicial arbitrario queda acotada cuando la entrada también está acotada. Se debe notar, sin embargo, que en este libro, cuando se utilice la palabra "estabilidad", por lo general significará estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov.

Teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica. Se puede demostrar que si una función escalar $V(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x}$ es un vector n, es definida positiva, entonces los estados $\mathbf{x}$ que satisfacen

$$V(\mathbf{x}) = C$$

donde C es una constante positiva, están en una hipersuperficie cerrada en el espacio de estado de n dimensiones, al menos en la vecindad del origen. Si $V(\mathbf{x}) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, entonces esas superficies cerradas se extienden sobre la totalidad del espacio de estado. La hipersuperficie $V(\mathbf{x}) = C_1$ está enteramente en el interior de la hipersuperficie $V(\mathbf{x}) = C_2$ siempre que $C_1 < C_2$.

Para un sistema dado, si es posible encontrar una función escalar definida positiva $V(\mathbf{x})$, tal que su derivada de tiempo tomada a lo largo de una trayectoria sea siempre negativa, entonces conforme el tiempo aumenta, $V(\mathbf{x})$ toma valores cada vez más pequeños de C. Conforme el tiempo aumenta, $V(\mathbf{x})$ finalmente se reduce a cero y, por tanto, $\mathbf{x}$ también se reduce a cero. Esto implica estabilidad asintótica del origen del espacio de estado. El teorema principal de estabilidad de Liapunov, que es una generalización de lo anterior, proporciona una condición suficiente para la estabilidad asintótica. Este teorema puede enunciarse como sigue.

Teorema 5-1. Suponga que un sistema está descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para todo } t$$

Si existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ con derivadas parciales de primer orden continuas y que satisfagan las condiciones

1. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva.
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es definida negativa.

entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable.

Si, además, $V(\mathbf{x}, t) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable global. (Para probar este teorema, vea el problema A-5-18.)

Las condiciones de este teorema se pueden modificar como sigue:

1′. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva.
2′. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es semidefinida negativa.
3′. $\dot{V}(\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ no desaparece para $t \geq t_0$ para cualquier t_0 y para cualquier $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, donde $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ denota la solución que se inicia a partir de $\mathbf{x}_0$ en $t = t_0$.

Entonces el origen de sistema es uniforme y asintóticamente estable global.

La equivalencia de la condición 2 del teorema y las condiciones modificadas 2′ y 3′ se pueden ver como sigue. Si $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ no es definida negativa sino sólo semidefinida negativa, entonces la trayectoria del punto representativo se puede volver tangente a alguna superficie determinada $V(\mathbf{x}, t) = C$. Dado que $\dot{V}(\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ no desaparece para $t \geq t_0$ para cualquier t_0 y para cualquier $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, el punto representativo no puede permanecer en el punto tangente [el punto que corresponde a $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 0$] y por tanto debe moverse hacia el origen.

Teorema de Liapunov sobre la estabilidad. Para probar la estabilidad (pero no la estabilidad asintótica) del origen del sistema definido por la ecuación (5-82) se puede aplicar el siguiente teorema.

Teorema 5-2. Suponga un sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ para toda t. Si existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ que tenga derivadas parciales de primer orden continuas y que satisfaga las condiciones

1. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva.
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es semidefinida negativa.

entonces el estado de equilibrio en el origen es uniformemente estable.

Deberá notarse que la semidefinición negativa de $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ [$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0$ a lo largo de las trayectorias] significa que el origen es uniformemente estable pero no necesariamente uniforme y asintóticamente estable. Por tanto, en este caso, el sistema puede mostrar una operación cíclica límite.

Inestabilidad. Si un estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de un sistema es inestable, entonces existe una función escalar $W(\mathbf{x}, t)$ que determina la inestabilidad del estado de equilibrio. A continuación se presentará un teorema sobre la inestabilidad.

Teorema 5-3. Suponga que un sistema está descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para todo } t \geq t_0$$

Si existe una función escalar $W(\mathbf{x}, t)$ que tenga primeras derivadas parciales continuas y que satisfaga las condiciones

1. $W(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en alguna región alrededor del origen.
2. $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en la misma región.

entonces el estado de equilibrio en el origen es inestable.

Observaciones. Cuando se aplica el análisis de estabilidad de Liapunov a sistemas no lineales es necesario hacer algunos comentarios.

1. En la aplicación de los teoremas de estabilidad de Liapunov a un sistema no lineal, las condiciones de estabilidad obtenidas a partir de una función de Liapunov determinada son condiciones suficientes pero no son condiciones necesarias.
2. Una función de Liapunov para un sistema determinado no es única. Por tanto, es importante señalar que el no encontrar una función de Liapunov adecuada para mostrar estabilidad o estabilidad asintótica o inestabilidad del estado de equilibrio bajo consideración, puede no dar información sobre la estabilidad.
3. Aunque una función de Liapunov determinada puede probar que el estado en equilibrio bajo consideración es estable o estable asintóticamente en la región Ω donde incluye este estado de equilibrio, esto no necesariamente significa que los movimientos son inestables fuera de la región Ω.
4. Para un estado de equilibrio estable o asintóticamente estable, siempre existe una función de Liapunov con las propiedades requeridas.

Análisis de estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Existen muchos métodos para la investigación de la estabilidad asintótica de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Por ejemplo, para un sistema de tiempo continuo descrito por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

se puede decir que una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen del sistema es que todos los valores propios de $\mathbf{A}$ tengan partes reales negativas, o que los ceros del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

tengan partes reales negativas.

De igual manera, para un sistema en tiempo discreto representado por la ecuación

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

una condición necesaria y suficiente que se puede enunciar para la estabilidad asintótica del origen es que todos los valores propios de $\mathbf{G}$ tengan magnitud menor que la unidad, o que los ceros del polinomio característico

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

se encuentren en el interior del círculo unitario centrado en el origen del plano z.

Sin embargo, encontrar los valores propios puede ser difícil, en el caso de sistemas de orden superior o cuando algunos de los coeficientes del polinomio característico no son numéricos. En estos casos, puede aplicarse el criterio de estabilidad de Jury o los criterios de estabilidad de Routh—Hurwitz. El método de Liapunov, que proporciona una alternativa al análisis de estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo, es algebraico y no requiere factorización del polinomio característico, como más adelante se verá. Es importante notar que para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, el segundo método de Liapunov no da sólo condiciones suficientes, sino también condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad o para la estabilidad asintótica.

En el siguiente análisis de estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se supone que si un valor propio λ_i de la matriz **A** es una cantidad compleja, entonces **A** debe contener a $\overline{\lambda}_i$, que es el conjugado complejo de λ_i, como su valor propio. Entonces, cualesquiera valores propios complejos de **A** aparecerán como pares complejos conjugados. Asimismo, en las siguientes discusiones sobre estabilidad, se utilizará la expresión de transpuesta conjugada, en lugar de la expresión de transpuesta de la matriz **A**, ya que los elementos de la matriz **A** pueden incluir conjugados complejos. La transpuesta conjugada de **A** se describe como **A***. Es una conjugada de la transpuesta:

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$$

Análisis de estabilidad Liapunov de sistemas lineales en tiempo continuo e invariantes en el tiempo. Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5-84}$$

donde **x** es el vector de estado (un vector-n) y **A** es una matriz constante de $n \times n$. Se supone que **A** es no singular. Entonces el único estado de equilibrio es el origen, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La estabilidad del estado de equilibrio del sistema lineal invariante en el tiempo se puede investigar fácilmente mediante el segundo método de Liapunov.

Para el sistema definido por la ecuación (5-84), se escoge como posible función de Liapunov

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$$

donde **P** es una matriz hermítica definida positiva. (Si **x** es un vector real, entonces **P** se puede seleccionar como una matriz simétrica real definida positiva.) La derivada en el tiempo de $V(\mathbf{x})$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x})^*\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dado que $V(\mathbf{x})$ se escogió para ser definida positiva, se requiere, para la estabilidad asintótica, que $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea definida negativa. Por tanto, se requiere que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA}) = \text{definida positiva}$$

Por tanto, para la estabilidad asintótica del sistema de la ecuación (5-84), es suficiente que **Q** sea definida positiva.

Para probar que una matriz de $n \times n$ es definida positiva, se aplica el criterio de Sylvester, que dice que una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea definida positiva es que los determinantes de todos los menores principales de la matriz sean positivos. Considere, por ejemplo, la siguiente matriz hermítica **P** de $n \times n$ (si todos los elementos de **P** son reales, entonces la matriz hermítica se convierte en una matriz simétrica real):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{p}_{1n} & \overline{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

donde $\overline{p}_{ij}$, representa el complejo conjugado de p_{ij}. La matriz **P** es definidá positiva si todos los menores principales sucesivos son positivos, esto es, si

$$p_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \cdots, \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{p}_{1n} & \overline{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

En vez de especificar primero una matriz definida positiva **P** y examinar si **Q** es definida positiva, es conveniente especificar una matriz definida positiva **Q** primero y a continuación examinar si **P** calculada a partir de

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$$

es definida positiva o no. Observe que el que **P** sea definida positiva es una condición necesaria y suficiente. Se resumirá lo anterior en forma de teorema.

Teorema 5-4. Considere el sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

donde **x** es un vector de estado (un vector n) y **A** es una matriz no singular constante de $n \times n$. Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea asintóticamente estable global es que, dada cualquier matriz **Q** hermítica definida positiva (o cualquier matriz simétrica real definida positiva), existe una matriz **P** hermítica definida positiva (o una matriz simétrica real definida positiva) tal que

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q} \tag{5-85}$$

La función escalar $\mathbf{x}^*\mathbf{Px}$ es una función de Liapunov para este sistema. [Observe que en el sistema lineal considerado, si el estado de equilibrio (el origen) es asintóticamente estable, entonces es asintóticamente estable global.]

Comentarios. Al aplicar el teorema 5-4 al análisis de estabilidad de sistemas lineales de tiempo continuo e invariantes en el tiempo, se pueden hacer algunos comentarios importantes.

1. Si $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ no se desaparece a lo largo de cualquier trayectoria, entonces $\mathbf{Q}$ se puede seleccionar para ser semidefinida positiva.
2. Si $\mathbf{Q}$ se escoge como una matriz definida positiva arbitraria [o una matriz semidefinida positiva arbitraria si $\dot{V}(\mathbf{x})$ no se desaparece a lo largo de cualquier trayectoria] y la ecuación matricial

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

se resuelve para determinar $\mathbf{P}$, entonces la definición positiva de $\mathbf{P}$ es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. El resultado final no depende de la matriz $\mathbf{Q}$ determinada escogida, siempre y cuando $\mathbf{Q}$ sea definida positiva (o semidefinida positiva, según el caso).
4. Para determinar los elementos de la matriz $\mathbf{P}$, se igualan las matrices $\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P}$ y $-\mathbf{Q}$, elemento por elemento. Esto resulta en $n(n + 1)/2$ ecuaciones lineales para determinar los elementos $p_{ij} = \overline{p}_{ji}$ de $\mathbf{P}$. Si se identifican los valores propios de $\mathbf{A}$ como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cada uno es repetido varias veces en relación con su multiplicidad como una raíz de la ecuación característica, y si por cada suma de dos raíces

$$\lambda_j + \lambda_k \neq 0$$

entonces los elementos de $\mathbf{P}$ están determinados en forma única. (Observe que para una matriz estable $\mathbf{A}$ la suma $\lambda_j + \lambda_k$ es siempre diferente de cero.)
5. Al determinar si existe o no una matriz $\mathbf{P}$ simétrica real definida positiva o hermítica definida positiva, es conveniente escoger $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Entonces los elementos de $\mathbf{P}$ quedan determinados a partir de

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

y se prueba si la matriz $\mathbf{P}$ es definida positiva.

Ejemplo 5-8

Determine la estabilidad del estado de equilibrio del sistema siguiente:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2$$

El sistema sólo tiene un estado de equilibrio en el origen. Seleccionando $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ y sustituyendo $\mathbf{I}$ en la ecuación (5-85), se tiene

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

Si observamos que $\mathbf{A}$ es una matriz real, $\mathbf{P}$ deberá ser una matriz simétrica real. Esta última ecuación se puede escribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-86}$$

donde se observa que $p_{21} = p_{12}$ con lo que se hace la sustitución apropiada. Si la matriz $\mathbf{P}$ resulta ser definida positiva, entonces $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ es una función de Liapunov y el origen es asintóticamente estable.

La ecuación (5-86) produce las siguientes tres ecuaciones:

$$-2p_{11} + 2p_{12} = -1$$
$$-2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0$$
$$-4p_{12} - 8p_{22} = -1$$

Al resolver para las p, se tiene

$$p_{11} = \tfrac{23}{60}, \qquad p_{12} = -\tfrac{7}{60}, \qquad p_{22} = \tfrac{11}{60}$$

Por tanto,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el criterio de Sylvester, esta matriz es definida positiva. Por tanto, se concluye que el origen del sistema es asintóticamente estable global.

Debe hacerse notar que una función de Liapunov para este sistema es

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{60}(23x_1^2 - 14x_1x_2 + 11x_2^2)$$

y $\dot{V}(\mathbf{x})$ está dado por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$$

Análisis de estabilidad de Liapunov de sistemas en tiempo discreto. A continuación se extenderá el análisis de estabilidad de Liapunov a los sistemas en tiempo discreto. Como en el caso de los sistemas en tiempo continuo, la estabilidad asintótica es el concepto más importante en la estabilidad de los estados de equilibrio de los sistemas en tiempo discreto.

Ahora se presentará un teorema de estabilidad para sistemas lineales o no lineales de tiempo discreto e invariantes en el tiempo, basados en el segundo método de Liapunov. Hay que señalar que en los sistemas de tiempo discreto, en vez de $\dot{V}(\mathbf{x})$, se utilizará la diferencia directa $V(\mathbf{x}(k+1)T) - V(\mathbf{x}(kT))$, es decir

$$\Delta V(\mathbf{x}(kT)) = V(\mathbf{x}(k+1)T) - V(\mathbf{x}(kT)) \tag{5-87}$$

Teorema 5-5. Considere el siguiente sistema en tiempo discreto

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(kT)) \tag{5-88}$$

donde

$\mathbf{x}$ = vector-n

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ = vector-n con la propiedad de que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

T = período de muestreo

Suponga que existe una función escalar $V(\mathbf{x})$ continua en $\mathbf{x}$ tal que

1. $V(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
2. $\Delta V(\mathbf{x}) < 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, donde

$$\Delta V(\mathbf{x}(kT)) = V(\mathbf{x}(k+1)T) - V(\mathbf{x}(kT)) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}(kT))) - V(\mathbf{x}(kT))$$

3. $V(\mathbf{0}) = 0$
4. $V(\mathbf{x}) \to \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Entonces el estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable global, y $V(\mathbf{x})$ es una función de Liapunov.

Observe que en este teorema la condición 2 se puede reemplazar por la condición

2'. $\Delta V(\mathbf{x}) \leq 0$ para toda $\mathbf{x}$, y $\Delta V(\mathbf{x})$ no se desaparece para cualquier secuencia solución $\{\mathbf{x}(kT)\}$ que satisfaga la ecuación (5-88).

Lo que significa que no es necesario que $\Delta V(\mathbf{x})$ sea definida negativa si no se desaparece en cualquier secuencia solución de la ecuación de diferencias.

Análisis de estabilidad de Liapunov de los sistemas lineales en tiempo discreto e invariantes en el tiempo. Considere el sistema en tiempo discreto descrito por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{5-89}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado (vector-n) y $\mathbf{G}$ es una matriz no singular constante de $n \times n$. El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el estado de equilibrio. Se investigará la estabilidad de este estado mediante el segundo método de Liapunov.

Se escoge como posible función de Liapunov

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{P}$ es un matriz hermítica definida positiva (o una matriz simétrica real definida positiva). Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta V(\mathbf{x}(k)) &= V(\mathbf{x}(k + 1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\
&= \mathbf{x}^*(k + 1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k + 1) - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\
&= [\mathbf{G}\mathbf{x}(k)]^*\mathbf{P}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\
&= \mathbf{x}^*(k)\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\
&= \mathbf{x}^*(k)(\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P})\mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

Dado que $V(\mathbf{x}(k))$ se seleccionó para ser definida positiva, se requiere, para la estabilidad asintótica, que $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ sea definida negativa. Por tanto

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = -\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}) = \text{definida positiva}$$

De ese modo, para la estabilidad asintótica del sistema en tiempo discreto de la ecuación (5-89), es suficiente que $\mathbf{Q}$ sea definida positiva.

Como en el caso de sistemas lineales de tiempo continuo, es conveniente especificar primero una matriz $\mathbf{Q}$ hermítica definida positiva (o simétrica real definida positiva) y a continuación ver si la matriz $\mathbf{P}$ determinada por

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

es definida positiva o no. Observe que una **P** definida positiva es una condición necesaria y suficiente. Se resumirá en un teorema lo que se ha enunciado aquí.

Teorema 5-6. Considere el sistema en tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

donde **x** es el vector estado (vector-n) y **G** es una matriz no singular constante de $n \times n$. Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea asintóticamente estable global es que, dada cualquier matriz **Q** hermítica definida positiva (o simétrica real definida positiva) existe una matriz **P** hermítica definida positiva (o simétrica real definida positiva) tal que

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{5-90}$$

La función escalar $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ es una función de Liapunov para este sistema.

Si $\Delta V(\mathbf{x}(k)) = -\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$ no se desaparece a lo largo de ninguna serie de soluciones, entonces **Q** puede ser escogida como semidefinida positiva.

Estabilidad de un sistema en tiempo discreto obtenido al discretizar un sistema en tiempo continuo. Si el sistema se describe en términos de ecuaciones en el espacio de estado, la estabilidad asintótica de un estado de equilibrio de un sistema en tiempo discreto obtenido al discretizar un sistema en tiempo continuo, equivale a la del sistema en tiempo continuo original.

Considere un sistema en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

y el sistema correspondiente en tiempo discreto

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT)$$

donde

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T}$$

Si el sistema en tiempo continuo es asintóticamente estable, es decir, si todos los valores propios de la matriz **A** tienen partes reales negativas, entonces

$$\|\mathbf{G}^n\| \to 0, \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y el sistema discretizado también es asintóticamente estable. Esto se debe a que, si las λ_i son los valores característicos de **A**, entonces las $e^{\lambda_i T}$ son los valores propios de **G**. (Observe que $|e^{\lambda_i T}| < 1$ si $\lambda_i T$ es negativa.)

Se debe notar que si se discretiza un sistema en tiempo continuo con polos complejos, entonces en casos excepcionales puede ocurrir inestabilidad oculta, en función de la selección del período de muestreo T. Es decir, en algunos casos donde el sistema en tiempo continuo no es asintóticamente estable, el sistema discretizado equivalente pudiera parecer estable asintóticamente, si se observan únicamente los valores de salida en los instantes de muestreo. Este fenómeno ocurre sólo para algunos valores del período de muestreo T. Si se varía el valor de T, entonces esta inestabilidad oculta aparece en forma de inestabilidad explícita. Vea el problema A-5-15.

Contracción. Una norma de **x** denotada como $\|\mathbf{x}\|$ se puede pensar como una medida de la longitud del vector. Existen diferentes definiciones de norma. Cualquier norma, sin embargo, tiene las siguientes propiedades:

$$\|\mathbf{x}\| = 0, \qquad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\|\mathbf{x}\| > 0, \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \qquad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y}$$
$$\|k\mathbf{x}\| = |k|\,\|\mathbf{x}\|, \qquad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ y constante real } k$$

Una función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una contracción si $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| < \|\mathbf{x}\|$$

para algún conjunto de valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y alguna norma.

Para sistemas en tiempo discreto se puede utilizar una norma $\|\mathbf{x}\|$ como función de Liapunov. Considere el siguiente sistema en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)), \qquad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{5-91}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector-n y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es también un vector-n. Suponga que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una contracción para toda $\mathbf{x}$ y alguna norma. Entonces el origen del sistema de la ecuación (5-91) es asintóticamente estable global, y una de sus funciones de Liapunov es

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$$

Esto se puede ver como sigue. Dado que $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ es definida positiva y

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))) - V(\mathbf{x}(k)) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| - \|\mathbf{x}\|$$

es definida negativa, porque $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una contracción para toda $\mathbf{x}$, se encuentra que $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ es una función de Liapunov y, según el teorema 5-5, el origen del sistema es asintóticamente estable global. (Vea el problema A-5-20.)

Ejemplo 5-9

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Determine la estabilidad del origen del sistema.

Se escoje $\mathbf{Q}$ como $\mathbf{I}$. A continuación, con referencia a la ecuación (5-90), la ecuación de estabilidad de Liapunov se convierte en

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-92}$$

Si se encuentra que la matriz $\mathbf{P}$ es definida positiva, entonces el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable global.

De la ecuación (5-92) se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$0.25p_{22} - p_{11} = -1$$
$$0.5(-p_{12} + p_{22}) - p_{12} = 0$$
$$p_{11} - 2p_{12} = -1$$

de las cuales se obtiene

$$p_{11} = \tfrac{11}{5}, \qquad p_{12} = \tfrac{8}{5}, \qquad p_{22} = \tfrac{24}{5}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

Al aplicar el criterio de Sylvester para probar la definición positiva de la matriz **P**, se encuentra que **P** es definida positiva. Por tanto, el estado de equilibrio, el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es asintóticamente estable global.

Observe que en vez de escoger **Q** como **I** se podría haber escogido **Q** como una matriz semidefinida positiva, tal como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siempre y cuando $\Delta V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$ no se desaparezca a lo largo de cualquier serie de soluciones. Para la matriz **Q** semidefinida positiva recién definida, se tiene

$$\Delta V(\mathbf{x}) = -x_2^2(k)$$

Para el sistema actual, $x_2(k)$ idénticamente cero implica que $x_1(k)$ es idénticamente cero. Por tanto, $\Delta V(\mathbf{x})$ no se desaparece a lo largo de cualquier serie de soluciones, excepto en el origen. Por tanto, se puede escoger esta matriz **Q** semidefinida positiva para determinar la matriz **P** de la ecuación de estabilidad de Liapunov. La ecuación de estabilidad de Liapunov, en este caso se convierte en

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al resolver esta última ecuación, se obtiene

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Al aplicar el criterio de Sylvester, se encuentra que **P** es definida positiva, por tanto se obtiene la misma conclusión que antes: el origen es asintóticamente estable global.

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-5-1

(Método de programación directa) Considere el sistema en tiempo discreto definido por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Muestre que una representación en el espacio de estado de este sistema puede estar dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-93}$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-94}$$

Solución El sistema dado puede modificarse a la forma

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$= b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Esta última ecuación se puede escribir como sigue:

$$Y(z) = b_0 U(z) + \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} U(z) \tag{5-95}$$

Se define

$$\tilde{Y}(z) = \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} U(z) \tag{5-96}$$

Entonces la ecuación (5-95) se convierte en

$$Y(z) = b_0 U(z) + \tilde{Y}(z) \tag{5-97}$$

Al rescribir la ecuación (5-96) a la forma siguiente:

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)z^{-n}} = \frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} = Q(z)$$

De esta última se pueden obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$Q(z) = -a_1 z^{-1} Q(z) - a_2 z^{-2} Q(z) - \cdots - a_n z^{-n} Q(z) + U(z) \tag{5-98}$$

y

$$\tilde{Y}(z) = (b_1 - a_1 b_0)z^{-1} Q(z) + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2} Q(z) + \cdots + (b_n - a_n b_0)z^{-n} Q(z) \tag{5-99}$$

Ahora se definen las variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= z^{-n} Q(z) \\ X_2(z) &= z^{-n+1} Q(z) \\ &\vdots \\ X_{n-1}(z) &= z^{-2} Q(z) \\ X_n(z) &= z^{-1} Q(z) \end{aligned} \tag{5-100}$$

Entonces, claramente se tiene

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= X_2(z) \\ zX_2(z) &= X_3(z) \\ &\vdots \\ zX_{n-1}(z) &= X_n(z) \end{aligned}$$

En términos de ecuaciones en diferencias, las $n-1$ ecuaciones anteriores se convierten en

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \end{aligned} \tag{5-101}$$

Al sustituir la ecuación (5-100) en la ecuación (5-98) se obtiene

$$zX_n(z) = -a_1 X_n(z) - a_2 X_{n-1}(z) - \cdots - a_n X_1(z) + U(z)$$

que puede ser transformada a una ecuación de diferencias:

$$x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \cdots - a_1 x_n(k) + u(k) \tag{5-102}$$

Asimismo, la ecuación (5-99) se puede rescribir como sigue:

$$\tilde{Y}(z) = (b_1 - a_1 b_0)X_n(z) + (b_2 - a_2 b_0)X_{n-1}(z) + \cdots + (b_n - a_n b_0)X_1(z)$$

Al usar esta última ecuación, la ecuación (5-97) puede ser escrita de la manera

$$\begin{aligned} y(k) = (b_n - a_n b_0)x_1(k) &+ (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)x_2(k) \\ &+ \cdots + (b_1 - a_1 b_0)x_n(k) + b_0 u(k) \end{aligned} \tag{5-103}$$

Si se combinan las ecuaciones (5-101) y (5-102) obtenemos como resultado la ecuación de estado dada por la ecuación (5-93). La ecuación de salida, ecuación (5-103), se puede volver a escribir en la forma dada por la ecuación (5-94).

Problema A-5-2

(Método de programación anidada) Considere el sistema con función de transferencia pulso definido por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Muestre que la representación en el espacio de estado de este sistema puede estar dado como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-104}$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-105}$$

Solución Vuelva a escribir la función de transferencia pulso como sigue:

$$Y(z) - b_0 U(z) + z^{-1}[a_1 Y(z) - b_1 U(z)] + z^{-2}[a_2 Y(z) - b_2 U(z)] + \cdots + z^{-n}[a_n Y(z) - b_n U(z)] = 0$$

o bien

$$Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1}\big(b_1 U(z) - a_1 Y(z) + z^{-1}\{b_2 U(z) - a_2 Y(z) + z^{-1}[b_3 U(z) - a_3 Y(z) + \cdots]\}\big) \tag{5-106}$$

Ahora se definen las variables de estado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_n(z) &= z^{-1}[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z)] \\ X_{n-1}(z) &= z^{-1}[b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z)] \\ &\vdots \\ X_2(z) &= z^{-1}[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z)] \\ X_1(z) &= z^{-1}[b_n U(z) - a_n Y(z)] \end{aligned} \tag{5-107}$$

Entonces la ecuación (5-106) se puede escribir en la forma

$$Y(z) = b_0 U(z) + X_n(z) \tag{5-108}$$

Al sustituir la ecuación (5-108) en la ecuación (5-107) y multiplicar ambos lados de las ecuaciones por z, se obtiene

$$\begin{aligned} zX_n(z) &= X_{n-1}(z) - a_1 X_n(z) + (b_1 - a_1 b_0)U(z) \\ zX_{n-1}(z) &= X_{n-2}(z) - a_2 X_n(z) + (b_2 - a_2 b_0)U(z) \\ &\vdots \\ zX_2(z) &= X_1(z) - a_{n-1} X_n(z) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)U(z) \\ zX_1(z) &= -a_n X_n(z) + (b_n - a_n b_0)U(z) \end{aligned}$$

Al tomar las transformadas inversa z de las n ecuaciones anteriores y al escribir las ecuaciones resultantes en orden inverso, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -a_n x_n(k) + (b_n - a_n b_0)u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - a_{n-1} x_n(k) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)u(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_{n-2}(k) - a_2 x_n(k) + (b_2 - a_2 b_0)u(k) \\ x_n(k+1) &= x_{n-1}(k) - a_1 x_n(k) + (b_1 - a_1 b_0)u(k) \end{aligned}$$

También, la transformada inversa z de la ecuación (5-108) da

$$y(k) = x_n(k) + b_0 u(k)$$

Al volver a escribir la ecuación de estado y la ecuación de salida en la forma estándar matricial, obtenemos las ecuaciones (5-104) y (5-105), respectivamente.

Problema A-5-3

(Método de programación de expansión en fracciones parciales) Considere el sistema con función de transferencia pulso dado por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Demuestre que la ecuación de estado y la ecuación de salida se pueden dar en la forma canónica diagonal siguiente, si todos los polos son distintos.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{5-109}$$

y

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-110}$$

Solución La función de transferencia pulso del sistema se puede modificar como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{n-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{n-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)} \end{aligned} \tag{5-111}$$

En vista de que todos los polos de la función de transferencia pulso $Y(z)/U(z)$ son distintos, $Y(z)/U(z)$ se puede expandir a la forma siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} \tag{5-112}$$

donde

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left[\frac{Y(z)}{U(z)} (z - p_i) \right]$$

La ecuación (5-112) se puede escribir en la forma

$$Y(z) = b_0 U(z) + \frac{c_1}{z - p_1} U(z) + \frac{c_2}{z - p_2} U(z) + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} U(z) \tag{5-113}$$

Las variables de estado se definen como sigue:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{z - p_1} U(z) \\ X_2(z) &= \frac{1}{z - p_2} U(z) \\ &\vdots \\ X_n(z) &= \frac{1}{z - p_n} U(z) \end{aligned} \tag{5-114}$$

La ecuación (5-114) se puede volver a escribir como

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= p_1 X_1(z) + U(z) \\ zX_2(z) &= p_2 X_2(z) + U(z) \\ &\vdots \\ zX_n(z) &= p_n X_n(z) + U(z) \end{aligned} \tag{5-115}$$

Asimismo la ecuación (5-113) se puede escribir como

$$Y(z) = b_0 U(z) + c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) + \cdots + c_n X_n(z) \tag{5-116}$$

Las transformadas inversas z de las ecuaciones (5-115) y (5-116) se convierten en

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= p_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= p_2 x_2(k) + u(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= p_n x_n(k) + u(k) \end{aligned} \tag{5-117}$$

y

$$y(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \cdots + c_n x_n(k) + b_0 u(k) \tag{5-118}$$

Al volver a escribir la ecuación de estado y la ecuación de salida en forma de ecuaciones matriciales, se obtienen las ecuaciones (5-109) y (5-110).

Problema A-5-4

(Método de programación de expansión en fracciones parciales) Considere el sistema con función de transferencia pulso definido por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Suponga que el sistema incluye varios polos del orden m en $z = p_i$ y que todos los demás polos son distintos.

Demuestre que este sistema puede representarse por la siguiente ecuación de estado y por la siguiente ecuación de salida:

$$\left[\begin{array}{c} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ \hline x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:ccc} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ \hline x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] u(k) \tag{5-119}$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{5-120}$$

Solución Dado que la función de transferencia pulso del sistema se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{(z - p_1)^m (z - p_{m+1})(z - p_{m+2}) \cdots (z - p_n)} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{n-1} + (b_2 - a_2 b_0) z^{n-2} + \cdots + (b_n - a_n b_0)}{(z - p_1)^m (z - p_{m+1}) \cdots (z - p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(z - p_1)^m} + \frac{c_2}{(z - p_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_m}{z - p_1} \\ &\quad + \frac{c_{m+1}}{z - p_{m+1}} + \frac{c_{m+2}}{z - p_{m+2}} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} \end{aligned} \tag{5-121}$$

se obtiene

$$Y(z) = b_0 U(z) + \frac{c_1}{(z - p_1)^m} U(z) + \frac{c_2}{(z - p_1)^{m-1}} U(z) + \cdots + \frac{c_m}{z - p_1} U(z)$$
$$+ \frac{c_{m+1}}{z - p_{m+1}} U(z) + \frac{c_{m+2}}{z - p_{m+2}} U(z) + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} U(z) \tag{5-122}$$

Las primeras m variables de estado $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_m(z)$ se definen mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{(z - p_1)^m} U(z) \\ X_2(z) &= \frac{1}{(z - p_1)^{m-1}} U(z) \\ &\vdots \\ X_m(z) &= \frac{1}{z - p_1} U(z) \end{aligned} \tag{5-123}$$

y las $n - m$ variables de estado restantes $X_{m+1}(z), X_{m+2}(z), \ldots, X_n(z)$ se definen mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} X_{m+1}(z) &= \frac{1}{z - p_{m+1}} U(z) \\ X_{m+2}(z) &= \frac{1}{z - p_{m+2}} U(z) \\ &\vdots \\ X_n(z) &= \frac{1}{z - p_n} U(z) \end{aligned} \tag{5-124}$$

Observe que las m variables de estado definidas por la ecuación (5-123) están relacionadas una con la otra, mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(z)}{X_2(z)} &= \frac{1}{z - p_1} \\ \frac{X_2(z)}{X_3(z)} &= \frac{1}{z - p_1} \\ &\vdots \\ \frac{X_{m-1}(z)}{X_m(z)} &= \frac{1}{z - p_1} \end{aligned} \tag{5-125}$$

Al tomar las transformadas inversas z de toda la ecuación (5-125), la última ecuación de la ecuación (5-123) y toda la ecuación (5-124), se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(k + 1) &= p_1 x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k + 1) &= p_1 x_2(k) + x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{m-1}(k + 1) &= p_1 x_{m-1}(k) + x_m(k) \\ x_m(k + 1) &= p_1 x_m(k) + u(k) \end{aligned} \tag{5-126}$$

$$x_{m+1}(k+1) = p_{m+1}x_{m+1}(k) + u(k)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k+1) = p_n x_n(k) + u(k)$$

La ecuación de salida dada por la ecuación (5-122) se puede volver a escribir como sigue:

$$Y(z) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) + \cdots + c_m X_m(z) + c_{m+1} X_{m+1}(z) + c_{m+2} X_{m+2}(z) + \cdots + c_n X_n(z) + b_0 U(z)$$

Al tomar la transformada inversa z de esta última ecuación, se obtiene

$$y(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \cdots + c_m x_m(k) + c_{m+1} x_{m+1}(k) + c_{m+2} x_{m+2}(k) + \cdots + c_n x_n(k) + b_0 u(k) \quad (5\text{-}127)$$

Al volver a escribir las ecuaciones (5-126) y (5-127) en la forma estándar matricial, se obtienen las ecuaciones (5-119) y (5-120), respectivamente.

Problema A-5-5

Utilizando el método de programación anidada (refiérase al problema A-5-2), obtenga la ecuación de estado y la ecuación de salida para el sistema definido por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}$$

A continuación dibuje un diagrama de bloque para el sistema, que muestre todas las variables de estado.

Solución La función de transferencia pulso dada se puede escribir en la forma

$$Y(z) = z^{-1}\{U(z) - 4Y(z) + z^{-1}[5U(z) - 3Y(z)]\}$$

Defina

$$X_1(z) = z^{-1}[U(z) - 4Y(z) + X_2(z)]$$
$$X_2(z) = z^{-1}[5U(z) - 3Y(z)]$$
$$Y(z) = X_1(z)$$

Entonces se obtiene

$$zX_1(z) = -4X_1(z) + X_2(z) + U(z)$$
$$zX_2(z) = -3X_1(z) + 5U(z)$$

La ecuación de estado puede por tanto estar dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(k)$$

y la ecuación de salida se convierte en

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

La figura 5-3 muestra el diagrama de bloques para el sistema definido por las ecuaciones en el espacio de estado. La salida de cada elemento de retraso constituye una variable de estado.

Problema A-5-6

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema mostrado en la figura 5-4. El período de muestreo T es de 1 segundo.

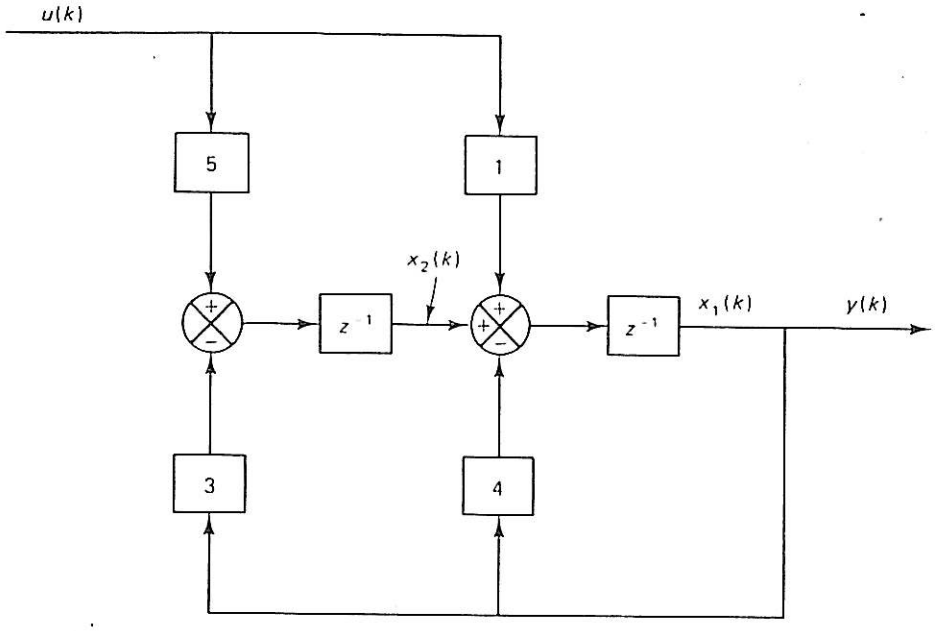


Figura 5-3 Diagrama de bloques para el sistema considerado en el problema A-5-5.

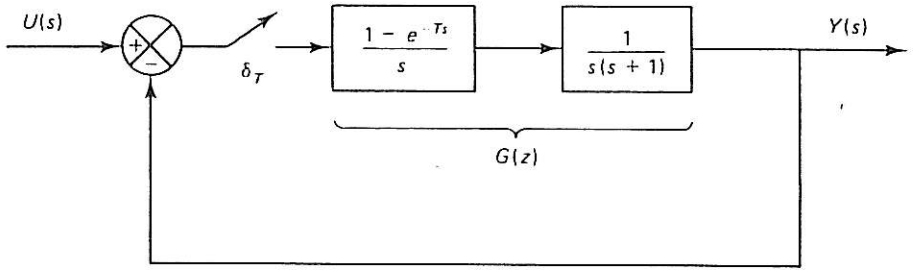


Figura 5-4 Diagrama de bloques del sistema de control del problema A-5-6.

Solución Primero se obtendrá la transformada z de la función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$
$$= \frac{0.3679(z + 0.7181)}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

Luego se puede obtener fácilmente la función de transferencia pulso en lazo cerrado. Existen muchas formas para obtener la representación en el espacio de estado para un sistema como éste, tal y como se analizó en la sección 5-2. En este problema se mostrará otro método, basado en la modificación del diagrama de bloques.

$G(z)$ se expande en fracciones parciales:

$$G(z) = \frac{1}{z - 1} - \frac{0.6321}{z - 0.3679} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{0.6321z^{-1}}{1 - 0.3679z^{-1}}$$

La figura 5-5 muestra el diagrama de bloques para el sistema. Se escoje la salida del elemento de retraso unitario como una variable de estado, como se muestra en la figura 5-5. Entonces se obtiene

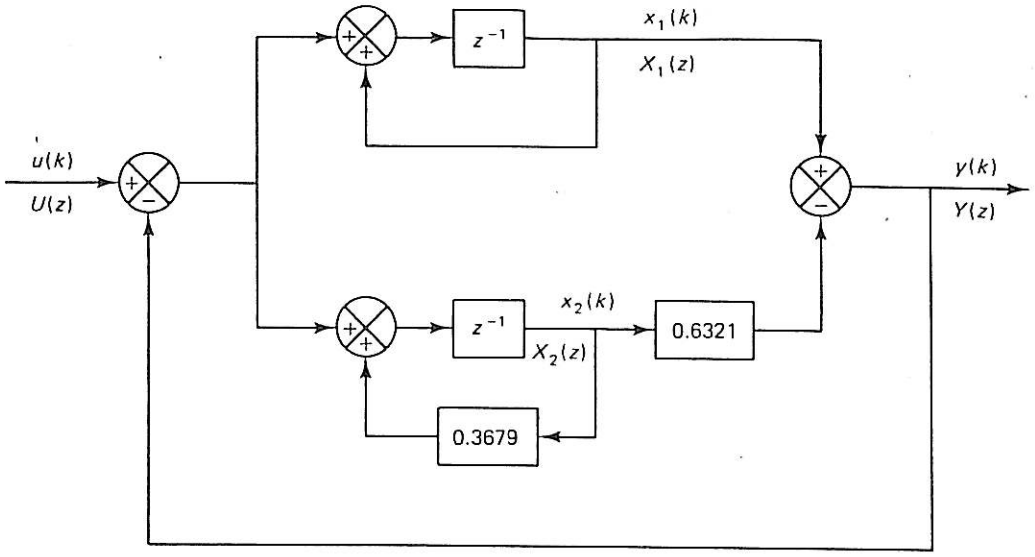


Figura 5-5 Diagrama de bloques modificado para el sistema mostrado en la figura 5-4.

$$zX_1(z) = X_1(z) - [X_1(z) - 0.6321X_2(z)] + U(z)$$
$$zX_2(z) = 0.3679X_2(z) - [X_1(z) - 0.6321X_2(z)] + U(z)$$
$$Y(z) = X_1(z) - 0.6321X_2(z)$$

de las cuales se obtiene

$$x_1(k+1) = 0.6321x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_1(k) - 0.6321x_2(k)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6321 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -0.6321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Problema A-5-7

Obtenga la representación en el espacio de estado del siguiente sistema con función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{5}{(z+1)^2(z+2)}$$

Use el método de programación de expansión en fracciones parciales. También obtenga los valores iniciales de las variables de estado en términos de $y(0)$, $y(1)$ y $y(2)$. A continuación dibuje un diagrama de bloques para el sistema.

Solución Ya que se necesitan los valores iniciales de las variables de estado en términos de $y(0)$, $y(1)$ y $y(2)$, se modificará ligeramente el método de programación de expansión en fracciones parciales presentado en la sección 5-2. Se expanden $Y(z)/U(z)$, $zY(z)/U(z)$ y $z^2Y(z)/U(z)$ en fracciones parciales como sigue:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{5}{(z+1)^2} - \frac{5}{z+1} + \frac{5}{z+2}$$

$$\frac{zY(z)}{U(z)} = -\frac{5}{(z+1)^2} + \frac{10}{z+1} - \frac{10}{z+2}$$

$$\frac{z^2Y(z)}{U(z)} = \frac{5}{(z+1)^2} - \frac{15}{z+1} + \frac{20}{z+2}$$

Entonces se tiene

$$\begin{bmatrix} \dfrac{Y(z)}{U(z)} \\ \dfrac{zY(z)}{U(z)} \\ \dfrac{z^2Y(z)}{U(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & 10 & -10 \\ 5 & -15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+1)^2} \\ \dfrac{1}{z+1} \\ \dfrac{1}{z+2} \end{bmatrix}$$

Ahora se definen las variables de estado mediante la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{X_1(z)}{U(z)} \\ \dfrac{X_2(z)}{U(z)} \\ \dfrac{X_3(z)}{U(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+1)^2} \\ \dfrac{1}{z+1} \\ \dfrac{1}{z+2} \end{bmatrix} \tag{5-128}$$

Así, las variables de estado $X_1(z)$, $X_2(z)$ y $X_3(z)$ están relacionadas con $Y(z)$, $zY(z)$ y $z^2Y(z)$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y(z) \\ zY(z) \\ z^2Y(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & 10 & -10 \\ 5 & -15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} \tag{5-129}$$

De la ecuación (5-128) se obtiene

$$(z+1)^2X_1(z) = U(z)$$

$$(z+1)X_2(z) = U(z)$$

$$(z+2)X_3(z) = U(z)$$

Si observamos que

$$(z+1)X_1(z) = X_2(z)$$

se obtiene

$$zX_1(z) = -X_1(z) + X_2(z)$$

$$zX_2(z) = -X_2(z) + U(z)$$

$$zX_3(z) = -2X_3(z) + U(z)$$

La salida $Y(z)$ está dada por la ecuación

$$Y(z) = 5X_1(z) - 5X_2(z) + 5X_3(z)$$

En consecuencia, se tienen las ecuaciones en el espacio de estado como sigue:

$$x_1(k+1) = -x_1(k) + x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -x_2(k) + u(k)$$
$$x_3(k+1) = -2x_3(k) + u(k)$$
$$y(k) = 5x_1(k) - 5x_2(k) + 5x_3(k)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Los datos iniciales se obtienen mediante el uso de la ecuación (5-129), como sigue

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & 10 & -10 \\ 5 & -15 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix}$$

El diagrama de bloques para este sistema se muestra en la figura 5-6.

Problema A-5-8

Obtenga una representación en el espacio de estado del siguiente sistema con función de transferencia pulso, tal que la matriz de estado sea diagonal:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^3 + 8z^2 + 17z + 8}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

Y a continuación obtenga el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ en términos de $y(0), y(1), y(2)$ y $u(0), u(1)\ u(2)$.

Solución Primero se dividen los numeradores de los lados derechos de $Y(z)/U(z)$, $zY(z)/U(z)$ y $z^2Y(z)/U(z)$ entre los denominadores respectivos y se expanden los términos restantes en fracciones parciales, como sigue:

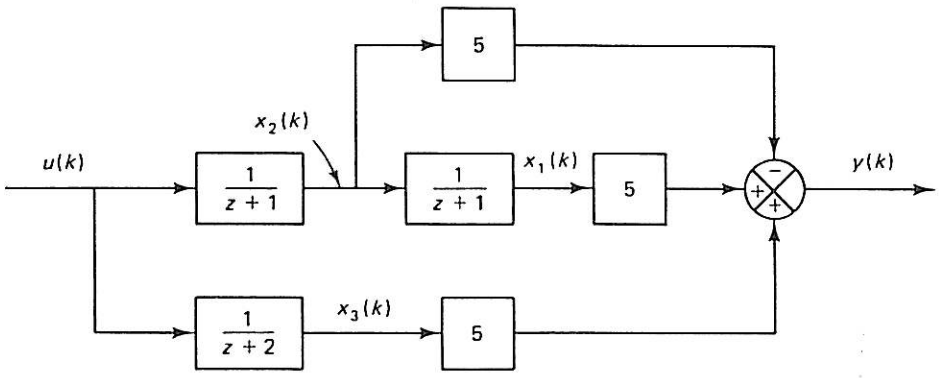


Figura 5-6 Diagrama de bloques para el sistema considerado en el problema A-5-7.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = 1 - \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} + \frac{1}{z+3}$$

$$\frac{zY(z)}{U(z)} = z + 2 + \frac{1}{z+1} - \frac{4}{z+2} - \frac{3}{z+3}$$

$$\frac{z^2Y(z)}{U(z)} = z^2 + 2z - 6 - \frac{1}{z+1} + \frac{8}{z+2} + \frac{9}{z+3}$$

Rescribiendo, se tiene

$$\frac{Y(z) - U(z)}{U(z)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} + \frac{1}{z+3}$$

$$\frac{zY(z) - zU(z) - 2U(z)}{U(z)} = \frac{1}{z+1} - \frac{4}{z+2} - \frac{3}{z+3}$$

$$\frac{z^2Y(z) - z^2U(z) - 2zU(z) + 6U(z)}{U(z)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{8}{z+2} + \frac{9}{z+3}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \dfrac{Y(z) - U(z)}{U(z)} \\ \dfrac{zY(z) - zU(z) - 2U(z)}{U(z)} \\ \dfrac{z^2Y(z) - z^2U(z) - 2zU(z) + 6U(z)}{U(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+1} \\ \dfrac{1}{z+2} \\ \dfrac{1}{z+3} \end{bmatrix}$$

Las variables de estado $X_1(z)$, $X_2(z)$ y $X_3(z)$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{X_1(z)}{U(z)} \\ \dfrac{X_2(z)}{u(z)} \\ \dfrac{X_3(z)}{U(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+1} \\ \dfrac{1}{z+2} \\ \dfrac{1}{z+3} \end{bmatrix} \tag{5-130}$$

Entonces se tiene

$$\begin{bmatrix} Y(z) - U(z) \\ zY(z) - zU(z) - 2U(z) \\ z^2Y(z) - z^2U(z) - 2zU(z) + 6U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} \tag{5-131}$$

Observe que la ecuación (5-130) se puede escribir en la forma

$$zX_1(z) = -X_1(z) + U(z)$$

$$zX_2(z) = -2X_2(z) + U(z)$$

$$zX_3(z) = -3X_3(z) + U(z)$$

de la que se obtiene

$$x_1(k+1) = -x_1(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = -2x_2(k) + u(k)$$

$$x_3(k+1) = -3x_3(k) + u(k)$$

La salida $Y(z)$ está dada por

$$Y(z) = -X_1(z) + 2X_2(z) + X_3(z) + U(z)$$

es decir

$$y(k) = -x_1(k) + 2x_2(k) + x_3(k) + u(k)$$

En notación matricial, las ecuaciones en el espacio de estado se convierten en

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + u(k)$$

Los datos iniciales se obtienen a partir de la ecuación (5-131) como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) - u(0) \\ y(1) - u(1) - 2u(0) \\ y(2) - u(2) - 2u(1) + 6u(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) - u(0) \\ y(1) - u(1) - 2u(0) \\ y(2) - u(2) - 2u(1) + 6u(0) \end{bmatrix}$$

La figura 5-7 muestra el diagrama de bloques para el sistema presente.

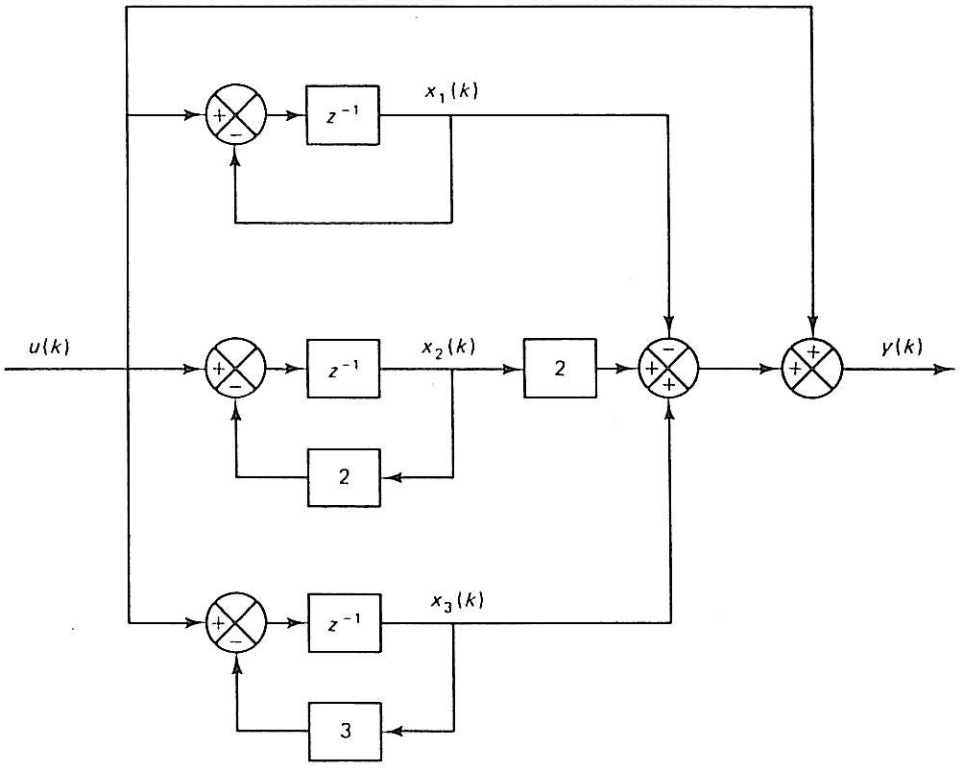


Figura 5-7 Diagrama de bloques para el sistema considerado en el problema A-5-8.

Problema A-5-9

Sea **A** una matriz de $n \times n$ y sea su ecuación característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Demuestre que la matriz **A** satisface su ecuación característica, o que

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

(Éste es el teorema Cayley—Hamilton.)

Solución Primero se observa que adj$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ es un polinomio en λ de grado $n - 1$. Esto es

$$\text{adj}\,(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}_1 \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n$$

donde

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$$

Observe también que

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\text{adj}\,(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = [\text{adj}\,(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})](\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \mathbf{I}\lambda^n + a_1 \mathbf{I}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{I}\lambda + a_n \mathbf{I} \\ &= (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{B}_1 \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n) \\ &= (\mathbf{B}_1 \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n)(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \end{aligned}$$

De esta ecuación se ve que **A** y $\mathbf{B}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ conmutan. Por tanto, el producto de $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ por adj$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ se convierte en cero si cualquiera de éstos es cero. Si **A** se escribe en lugar de λ en esta última ecuación, entonces claramente $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ se convierte en cero. Por tanto,

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Lo que prueba el teorema Cayley—Hamilton.

Problema A-5-10

En referencia al problema A-5-9, se ha demostrado que cada matriz **A** de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. No obstante, la ecuación característica no es la ecuación escalar de grado mínimo que **A** puede satisfacer. El polinomio de grado mínimo que tiene **A** como raíz se conoce como *polinomio mínimo*. Es decir, el polinomio mínimo de una matriz **A** de $n \times n$ se define como el polinomio $\phi(\lambda)$ de grado mínimo:

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m, \qquad m \leq n$$

tal que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, es decir

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1 \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

El polinomio mínimo juega un papel importante en el cálculo de los polinomios de una matriz de $n \times n$.

Supongamos que $d(\lambda)$, un polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de adj$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$. Demuestre que si el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$ se escoge como 1 entonces el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ está dado por

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)}$$

Solución Por la suposición, el máximo común de la matriz adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es $d(\lambda)$. Por tanto

$$\text{adj}\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = d(\lambda)\mathbf{B}(\lambda)$$

donde el máximo común divisor de los n^2 elementos (que son funciones de λ) de $\mathbf{B}(\lambda)$ es la unidad. En vista de que

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\text{adj}\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

se obtiene

$$d(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} \tag{5-132}$$

de lo cual se encuentra que $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es divisible entre $d(\lambda)$. Si

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda)\psi(\lambda) \tag{5-133}$$

Entonces el coeficiente del término de mayor grado en λ de $\psi(\lambda)$ es la unidad. De las ecuaciones (5-132) y (5-133) se tiene

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = \psi(\lambda)\mathbf{I}$$

Por tanto,

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Observe que $\psi(\lambda)$ se puede escribir como sigue

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

donde $\alpha(\lambda)$ es de menor grado que $\phi(\lambda)$. Dado que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ y $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, se debe tener que $\alpha(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Dado que $\phi(\lambda)$ es el polinomio mínimo, $\alpha(\lambda)$ debe ser idénticamente cero, es decir

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda)$$

Observe que, debido a que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, se puede escribir

$$\phi(\lambda)\mathbf{I} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

Por tanto,

$$\psi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)\phi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

y se obtiene

$$\mathbf{B}(\lambda) = g(\lambda)\mathbf{C}(\lambda)$$

Observe que el máximo común divisor de los n^2 elementos de $\mathbf{B}(\lambda)$ es la unidad. Por tanto

$$g(\lambda) = 1$$

De aquí que,

$$\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$$

Entonces, de esta última ecuación y de la ecuación (5-133), se obtiene

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)}$$

Hay que señalar que el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se puede determinar por el procedimiento siguiente:

1. Forme la adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y escriba los elementos de la adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ como polinomios factorizados en λ.

2. Determine $d(\lambda)$ como el máximo común divisor de todos los elementos de adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Seleccione el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$ como 1. Si no existe divisor común, $d(\lambda) = 1$.
3. El polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ entonces está dado como $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ dividido entre $d(\lambda)$.

Problema A-5-11

Si una matriz **A** de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces el polinomio mínimo de **A** es idéntico al polinomio característico. Asimismo, si los diversos valores propios de **A** están enlazados en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo y el polinomio característico son idénticos. Si, sin embargo, los diversos valores propios de **A** no están enlazados en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de grado menor que el polinomio característico.

Utilizando como ejemplo las matrices **A** y **B** que siguen, verifique los enunciados anteriores en relación con el polinomio mínimo, cuando se relacionan varios valores propios.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución Primero considere la matriz **A**. El polinomio característico está dado por

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Así, los valores propios de **A** son 2, 2 y 1. Se puede demostrar que la forma canónica Jordan de **A** es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y los valores propios múltiples están enlazados en la cadena Jordan como se muestra. (Para obtener la forma canónica Jordan de **A**, refiérase al apéndice A.)

Para determinar el polinomio mínimo, primero se obtiene adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Éste está dado por

$$\text{adj}\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & (\lambda + 11) & 4(\lambda - 2) \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

Observe que no existe un divisor común de todos los elementos de adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Por tanto, $d(\lambda) = 1$. Entonces, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es idéntico al polinomio característico, es decir

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo prueba que

$$\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$$

Por tanto, se ha demostrado que el polinomio mínimo y el polinomio característico de esta matriz **A** son los mismos.

A continuación, considere la matriz **B**. El polinomio característico está dado por

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Un cálculo simple revela que la matriz **B** tiene tres vectores propios, y que la forma canónica Jordan de **B** está dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los valores propios múltiples no están enlazados. Para obtener el polinomio mínimo, primero se calcula adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$:

$$\text{adj}\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

de lo cual es evidente que

$$d(\lambda) = \lambda - 2$$

Por tanto,

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}|}{d(\lambda)} = \frac{(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)}{\lambda - 2} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Para verificar, se calcula $\phi(\mathbf{B})$:

$$\phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la matriz dada **B**, el grado del polinomio mínimo es menor en 1 que el del polinomio característico. Como se muestra aquí, si los valores propios múltiples de una matriz de $n \times n$ no están enlazados en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de grado menor que el polinomio característico.

Problema A-5-12

Demuestre que mediante el uso del polinomio mínimo la inversa de una matriz no singular **A** se puede expresar como un polinomio **A** con coeficientes escalares, como sigue:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I}) \tag{5-134}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son los coeficientes del polinomio mínimo

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

Luego, obtenga la inversa de la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución El polinomio mínimo $\phi(\mathbf{A})$ de una matriz no singular **A**, se puede escribir como sigue:

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

donde $a_m \neq 0$. Por tanto,

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A}^2 + a_{m-1}\mathbf{A})$$

Premultiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I})$$

que es la ecuación (5-134).

Para una matriz dada $\mathbf{A}$, se puede dar $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ como sigue:

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 3 & 2\lambda + 6 & -4 \\ 3\lambda + 7 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & -2\lambda + 2 \\ \lambda + 1 & 2 & \lambda^2 - 7 \end{bmatrix}$$

Claramente, no existe un divisor común $d(\lambda)$ de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Por tanto $d(\lambda) = 1$. En consecuencia, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ está dado por la ecuación

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Así, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es el mismo que el polinomio característico.

Dado que la ecuación característica es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17 = 0$$

se obtiene

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

Al identificar los coeficientes a_i del polinomio mínimo (que en este caso es el mismo que el polinomio característico), se tiene

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = -7, \qquad a_3 = -17$$

La inversa de $\mathbf{A}$ se puede obtener entonces a partir de la ecuación (5-134) como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{a_3}(\mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{I}) = \frac{1}{17}(\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{17}\left\{\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problema A-5-13

Demuestre que la inversa de $z\mathbf{I} - \mathbf{G}$ puede estar dada por la ecuación

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} &= \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \\ &= \frac{\mathbf{I}z^{n-1} + \mathbf{H}_1 z^{n-2} + \mathbf{H}_2 z^{n-3} + \cdots + \mathbf{H}_{n-1}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|} \end{aligned} \tag{5-135}$$

donde

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{G} + a_1\mathbf{I}$$
$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{G}\mathbf{H}_1 + a_2\mathbf{I}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{H}_{n-1} = \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-2} + a_{n-1}\mathbf{I}$$
$$\mathbf{H}_n = \mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes que aparecen en el polinomio característico dado por

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

Demuestre también que

$$a_1 = -\operatorname{tr}\mathbf{G}$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_{n-1}$$

Para simplificar la deducción, suponga que $n = 3$. (Se puede fácilmente extender la deducción al caso de cualquier entero positivo n.)

Solución Observe que

$$\begin{aligned}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})(\mathbf{I}z^2 + \mathbf{H}_1 z + \mathbf{H}_2) &= z^3\mathbf{I} - z^2\mathbf{G} + z^2\mathbf{H}_1 - z\mathbf{G}\mathbf{H}_1 + z\mathbf{H}_2 - \mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ &= z^3\mathbf{I} - z^2\mathbf{G} + z^2(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) - z\mathbf{G}(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) \\ &\quad + z[\mathbf{G}(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) + a_2\mathbf{I}] - \mathbf{G}[\mathbf{G}(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) + a_2\mathbf{I}] \\ &= z^3\mathbf{I} + a_1 z^2\mathbf{I} + a_2 z\mathbf{I} + a_3\mathbf{I} - \mathbf{G}^3 \\ &\quad - a_1\mathbf{G}^2 - a_2\mathbf{G} - a_3\mathbf{I} \end{aligned} \tag{5-136}$$

El teorema Cayley—Hamilton (vea el problema A-5-9) indica que una matriz $\mathbf{G}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. Dado que $n = 3$ en el caso presente, la ecuación característica es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

y $\mathbf{G}$ satisface la ecuación siguiente:

$$\mathbf{G}^3 + a_1\mathbf{G}^2 + a_2\mathbf{G} + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Por tanto, la ecuación (5-136) se simplifica a

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})(\mathbf{I}z^2 + \mathbf{H}_1 z + \mathbf{H}_2) = (z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\mathbf{I} = |z\mathbf{I} - \mathbf{G}|\mathbf{I}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{I} = \frac{(z\mathbf{I} - \mathbf{G})(\mathbf{I}z^2 + \mathbf{H}_1 z + \mathbf{H}_2)}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}$$

es decir

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \frac{\mathbf{I}z^2 + \mathbf{H}_1 z + \mathbf{H}_2}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}$$

que es la ecuación (5-135) en el caso de $n = 3$.

A continuación se demostrará que

$$a_1 = -\operatorname{tr}\mathbf{G}$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{GH}_1$$
$$a_3 = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{GH}_2$$

Se transformará $\mathbf{G}$ en una matriz diagonal si $\mathbf{G}$ involucra n vectores propios linealmente independientes (donde $n = 3$ en el caso presente) o en una matriz en la forma canónica Jordan si $\mathbf{G}$ incluye menos de n vectores propios linealmente independiente. Es decir,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} = \mathbf{D} = \text{matriz en forma diagonal}$$

o bien

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{GS} = \mathbf{J} = \text{matriz en forma canónica diagonal}$$

donde las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{S}$ son matrices de transformación no singulares.

Como el cálculo que sigue se aplica independientemente de si la matriz $\mathbf{G}$ pueda ser transformada en una matriz diagonal o en una matriz en la forma canónica Jordan, se utilizará la notación

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT} = \hat{\mathbf{D}}$$

donde $\hat{\mathbf{D}}$ representa ya sea una matriz diagonal o una matriz en la forma canónica Jordan, según sea el caso.

En lo siguiente primero se demostrará que

$$\operatorname{tr}\mathbf{G} = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{GH}_1 = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{GH}_2 = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_2$$

donde

$$\hat{\mathbf{H}}_1 = \hat{\mathbf{D}} + a_1\mathbf{I}$$
$$\hat{\mathbf{H}}_2 = \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1 + a_2\mathbf{I}$$

Entonces se mostrará que

$$a_1 = -\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1$$
$$a_3 = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_2$$

Observe que desde

$$\operatorname{tr}\mathbf{AB} = \operatorname{tr}\mathbf{BA}$$

se tiene

$$\operatorname{tr}\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{T}^{-1} = \operatorname{tr}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}})(\mathbf{T}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}) = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}$$

Observe asimismo que

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B}$$

Y ahora se tiene

$$\operatorname{tr}\mathbf{G} = \operatorname{tr}\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{T}^{-1} = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{GH}_1 = \operatorname{tr}\mathbf{G}(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) = \operatorname{tr}\mathbf{G}^2 + \operatorname{tr}a_1\mathbf{G}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}^2\mathbf{T}^{-1} + \operatorname{tr}a_1\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{T}^{-1} \\
&= \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}^2 + \operatorname{tr}a_1\hat{\mathbf{D}} = \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{D}}^2 + a_1\hat{\mathbf{D}}) = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1 \\
\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_2 &= \operatorname{tr}\mathbf{G}(\mathbf{G}\mathbf{H}_1 + a_2\mathbf{I}) = \operatorname{tr}\mathbf{G}[\mathbf{G}(\mathbf{G} + a_1\mathbf{I}) + a_2\mathbf{I}] \\
&= \operatorname{tr}(\mathbf{G}^3 + a_1\mathbf{G}^2 + a_2\mathbf{G}) \\
&= \operatorname{tr}\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}^3\mathbf{T}^{-1} + \operatorname{tr}a_1\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}^2\mathbf{T}^{-1} + \operatorname{tr}a_2\mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{T}^{-1} \\
&= \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}^3 + \operatorname{tr}a_1\hat{\mathbf{D}}^2 + \operatorname{tr}a_2\hat{\mathbf{D}} \\
&= \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{D}}^3 + a_1\hat{\mathbf{D}}^2 + a_2\hat{\mathbf{D}}) = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_2
\end{aligned}
$$

Se escribe

$$
\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} p_1 & * & 0 \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}
$$

donde un asterisco significa "ya sea 0 o 1". Entonces

$$
\begin{aligned}
|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{D}}| &= z^3 - (p_1 + p_2 + p_3)z^2 + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)z - p_1p_2p_3 \\
&= z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -(p_1 + p_2 + p_3) \\
a_2 &= p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 \\
a_3 &= -p_1p_2p_3
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}} &= p_1 + p_2 + p_3 = -a_1 \\
\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1 &= \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{D}} + a_1\mathbf{I}) = \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}^2 + \operatorname{tr}a_1\hat{\mathbf{D}} \\
&= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - (p_1 + p_2 + p_3)(p_1 + p_2 + p_3) \\
&= -2(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) = -2a_2 \\
\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_2 &= \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1 + a_2\mathbf{I}) = \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{D}}^3 + a_1\hat{\mathbf{D}}^2 + a_2\hat{\mathbf{D}}) \\
&= \operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}^3 + \operatorname{tr}a_1\hat{\mathbf{D}}^2 + \operatorname{tr}a_2\hat{\mathbf{D}} \\
&= (p_1^3 + p_2^3 + p_3^3) - (p_1 + p_2 + p_3)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\
&\quad + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)(p_1 + p_2 + p_3) \\
&= 3p_1p_2p_3 = -3a_3
\end{aligned}
$$

Por tanto, se ha demostrado que

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}} = -\operatorname{tr}\mathbf{G} \\
a_2 &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_1 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_1 \\
a_3 &= -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{H}}_2 = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{G}\mathbf{H}_2
\end{aligned}
$$

Problema A-5-14

Considere el siguiente sistema oscilador:

$$
\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}
$$

Obtenga la representación en el espacio de estado en tiempo continuo del sistema. A continuación discretice el sistema y obtenga la representación en el espacio de estado en tiempo discreto. También obtenga la función de transferencia pulso del sistema discretizado.

Solución Para la función de transferencia dada tenemos

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u$$

Se define

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\dot{y}$$

Entonces, se obtiene la representación en el espacio de estado de tiempo continuo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La representación en el espacio de estado en tiempo discreto del sistema se obtiene como sigue. Al observar que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 + \omega^2} & \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \dfrac{-\omega}{s^2 + \omega^2} & \dfrac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \operatorname{sen} \omega T \\ -\operatorname{sen} \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{H} = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\, d\lambda\right)\mathbf{B} = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} \cos \omega\lambda & \operatorname{sen}\omega\lambda \\ -\operatorname{sen} \omega\lambda & \cos\omega\lambda \end{bmatrix} d\lambda\right)\begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \operatorname{sen} \omega T \end{bmatrix}$$

Por tanto, la representación en el espacio de estado en tiempo discreto del sistema oscilatorio se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \operatorname{sen} \omega T \\ -\operatorname{sen} \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \operatorname{sen} \omega T \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia pulso del sistema discretizado se puede obtener a partir de la ecuación (5-60):

$$F(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D$$

Si se observa que D es cero, se tiene

$$F(z) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z - \cos\omega T & -\text{sen}\omega T \\ \text{sen}\omega T & z - \cos\omega T \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 - \cos\omega T \\ \text{sen}\omega T \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} z - \cos\omega T & \text{sen}\omega T \\ -\text{sen}\omega T & z - \cos\omega T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - \cos\omega T \\ \text{sen}\omega T \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(1 - \cos\omega T)(z + 1)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

Por tanto,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = F(z) = \frac{(1 - \cos\omega T)(1 + z^{-1})z^{-1}}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

Observe que la función de transferencia pulso obtenida de esta forma es la misma que la obtenida al tomar la transformada z del sistema antecedido por un retenedor de orden cero. Esto es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2}\right]$$

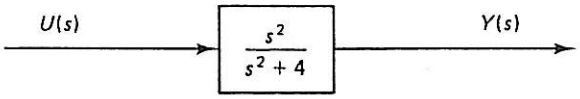
$$= (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}\right)$$

$$= \frac{(1 - \cos\omega T)(1 + z^{-1})z^{-1}}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

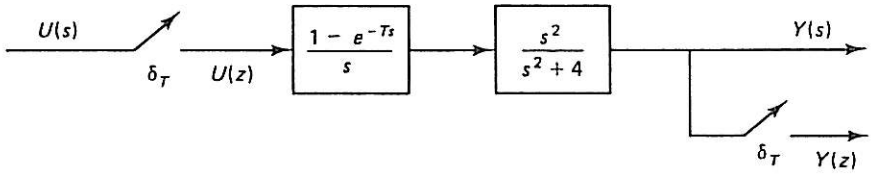
Por tanto, se obtiene la misma expresión para la función de transferencia pulso. La razón de lo anterior es que la discretización en el espacio de estado proporciona un equivalente del retenedor de orden cero del sistema en tiempo continuo.

Problema A-5-15

Considere el sistema mostrado en la figura 5-8*a*). Este sistema implica polos complejos. Es estable pero no es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov. La figura 5-8*b*) muestra una versión discretizada



(a)



(b)

Figura 5-8 *a*) Sistema en tiempo continuo del problema A-5-15; *b*) versión discretizada del sistema.

del sistema en tiempo continuo. El sistema discretizado también es estable pero no es asintóticamente estable.

Suponiendo una entrada escalón unitario, demuestre que el sistema discretizado puede mostrar oscilaciones ocultas cuando el período de muestreo T adopta cierto valor.

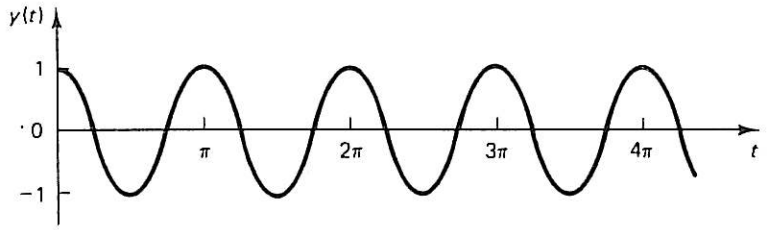
Solución La respuesta del sistema en tiempo continuo que se muestra en la figura 5-8*a*) es

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4}\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2 + 4}$$

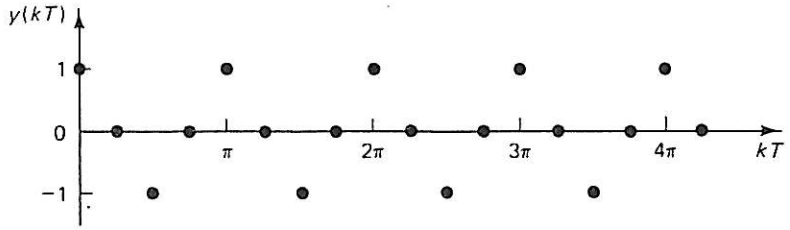
Por tanto,

$$y(t) = \cos 2t$$

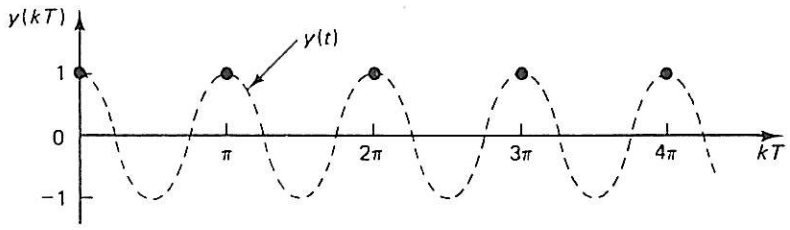
[Observe que el valor promedio de la salida $y(t)$ es cero y no la unidad.] La respuesta $y(t)$ en función de t aparece en la figura 5-9*a*).



(a)



(b)



(c)

Figura 5-9 *a*) Respuesta en escalón unitario $y(t)$ del sistema en tiempo continuo mostrado en la figura 5-8*a*); *b*) gráfica de $y(kT)$ en función de kT del sistema discretizado que se presenta en la figura 5-8*b*) cuando $T = \frac{1}{4}\pi$ segundos; *c*) gráfica de $y(kT)$ en función de kT del sistema discretizado cuando $T = \pi$ segundos. (En el diagrama se muestran las oscilaciones ocultas.)

La función de transferencia pulso del sistema discretizado mostrado en la figura 5-18*b*) es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{s^2}{s^2 + 4}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right]$$

$$= (1 - z^{-1})\frac{1 - z^{-1}\cos 2T}{1 - 2z^{-1}\cos 2T + z^{-2}}$$

Por tanto, la respuesta al escalón unitario se obtiene como sigue:

$$Y(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1}\cos 2T)}{1 - 2z^{-1}\cos 2T + z^{-2}}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - z^{-1}\cos 2T}{1 - 2z^{-1}\cos 2T + z^{-2}}$$

La respuesta $y(kT)$ se hace oscilatoria si $T = n\pi$ segundos ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Por ejemplo, la respuesta del sistema discretizado cuando $T = \frac{1}{4}\pi$ segundos se convierte en:

$$Y(z) = \frac{1}{1 + z^{-2}} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} + \cdots$$

Por tanto,

$$y(0) = 1$$
$$y(T) = 0$$
$$y(2T) = -1$$
$$y(3T) = 0$$
$$y(4T) = 1$$
$$\vdots$$

Una gráfica de $y(kT)$ en función de kT cuando $T = \frac{1}{4}\pi$ segundos aparece en la figura 5-9*b*). Claramente, la respuesta es oscilatoria. Si el período de muestreo T fuera de π segundos, es decir $T = \pi$, entonces

$$Y(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1})}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

La respuesta $y(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ es constante e igual a uno. La gráfica de $y(kT)$ en función de kT cuando $T = \pi$ se muestra en la figura 5-9*c*).

Observe que si $T = \pi$ segundos (de hecho, si $T = n\pi$ segundos, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$) la secuencia de respuesta al escalón unitario se conserva en la unidad. Dicha respuesta puede darnos la impresión de que $y(t)$ es constante. La respuesta real no es constante ya que oscila entre 1 y -1. Por tanto, la salida del sistema discretizado cuando $T = \pi$ segundos (o cuando $T = n\pi$ segundos, donde $n = 1, 2, 3, \ldots,$) muestra oscilaciones ocultas.

Observe que dichas oscilaciones ocultas (inestabilidad oculta) sólo ocurren para ciertos valores del período de muestreo T. Si se varía el valor de T, estas oscilaciones ocultas (inestabilidad oculta) aparecerán en la salida como oscilaciones explícitas.

Problema A-5-16

Aunque el sistema con doble integrador es dinámicamente simple, representa una clase de sistema importante. Un ejemplo de sistema con doble integrador es el sistema de control de altitud de un satélite, que se puede describir como

$$J\ddot{\theta} = u + v$$

donde J es el momento de inercia, θ es el ángulo de altitud, u es el par de control, y v es el par de perturbación.

Considere el sistema con doble integrador en ausencia de entrada de perturbación. Se define $J\theta = y$. Entonces la ecuación del sistema se convierte en

$$\ddot{y} = u$$

Obtenga una representación en el espacio de estado en tiempo continuo del sistema. A continuación obtenga un equivalente en tiempo discreto. También obtenga la función de transferencia pulso para el sistema en tiempo discreto.

Solución Defina

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

Entonces la ecuación de estado en tiempo continuo y la ecuación de salida se convierten en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El equivalente en tiempo discreto de estos sistemas puede estar dado por

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT)$$

$$y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT)$$

Las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ se obtienen de las ecuaciones (5-73) y (5-74). Al observar que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{H} = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \, d\lambda \right) \mathbf{B} = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\lambda \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación de estado en tiempo discreto y la ecuación de salida se convierten en

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia pulso del sistema en tiempo discreto se obtiene a partir de la ecuación (5-60) como sigue:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = F(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D$$

$$= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^2}$$

Problema A-5-17

Demuestre que la siguiente forma cuadrática es definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Solución La forma cuadrática $V(\mathbf{x})$ se puede escribir como sigue:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el criterio de Sylvester, se obtiene

$$10 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

En vista de que todos los menores principales sucesivos de la matriz $\mathbf{P}$ son positivos, $V(\mathbf{x})$ es definida positiva.

Problema A-5-18

Considere el sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Suponga que

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \qquad \text{para todos } t$$

Suponga que existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas. Si $V(\mathbf{x}, t)$ satisface las condiciones:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva. Esto es, $V(\mathbf{0}, t) = 0$ y $V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0$ para toda $\mathbf{x} \neq 0$ y para toda t, donde α es una función escalar no decreciente continua tal que $\alpha(0) = 0$.
2. La derivada total $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es negativa para toda $\mathbf{x} \neq 0$ y para toda t, es decir $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|) < 0$ para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y toda t, donde γ es una función escalar no decreciente continua tal que $\gamma(0) = 0$.
3. Existe una función escalar no decreciente continua β tal que $\beta(0) = 0$ y para toda t, $V(\mathbf{x}, t) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$.
4. $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$ se aproxima al infinito conforme $\|\mathbf{x}\|$ aumenta en forma indefinida, es decir

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \to \infty, \qquad \text{cuando } \|\mathbf{x}\| \to \infty.$$

Entonces el origen del sistema, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es uniforme y asintóticamente estable global. (Éste es el teorema de estabilidad principal de Liapunov.)

Pruebe este teorema.

Solución Para probar la estabilidad asintótica uniforme global, se necesita verificar lo siguiente:

1. El origen es uniformemente estable.
2. Cualquier solución está acotada en forma uniforme.
3. Todas las soluciones convergen al origen cuando $t \to \infty$ uniformemente en t_0 y $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$, donde δ fijo, pero arbitrariamente grande. Es decir, dados dos números reales $\delta > 0$ y $\mu > 0$, existe un número real $T(\mu, \delta)$ tal que

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$$

lo que implica que

$$\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \mu, \qquad \text{para toda } t \geq t_0 + T(\mu, \delta)$$

donde $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ es la solución de la ecuación diferencial dada.

En vista de que β es continuo y $\beta(0) = 0$, se puede escoger una $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. La figura 5-10 muestra las curvas $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$ $\beta(\|\mathbf{x}\|)$ y $V(\mathbf{x}, t)$. Al observar que

$$V(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t) - V(\mathbf{x}_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\boldsymbol{\phi}(\tau; \mathbf{x}_0, t_0), \tau)\, d\tau < 0, \qquad t > t_0$$

si $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$, siendo t_0 arbitrario, se tiene

$$\alpha(\epsilon) > \beta(\delta) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) \geq V(\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0), t) \geq \alpha(\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\|)$$

para todos $t \geq t_0$. Dado que α es no decreciente y positivo, esto implica que

$$\|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \epsilon, \qquad \text{for } t \geq t_0, \|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$$

Por tanto, se ha demostrado que para cada número real $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$ implica que $\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \epsilon$ para toda $t \geq t_0$. Así, se ha probado la estabilidad uniforme.

Ahora se probará que $\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$ en forma uniforme en t_0 y $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$. Se toma

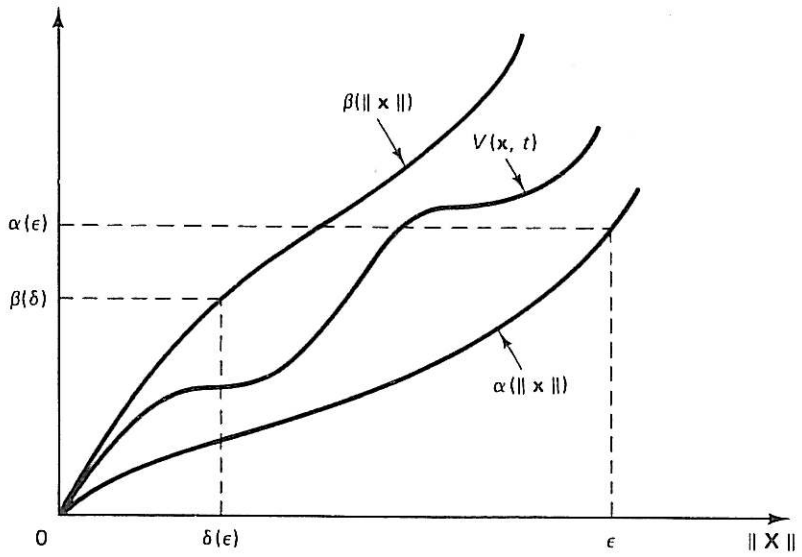


Figura 5-10 Curvas $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$, $\beta(\|\mathbf{x}\|)$ y $V(\mathbf{x}, t)$

cualquier $0 < \mu < \|\mathbf{x}_0\|$ y se encuentra una $\nu(\mu) > 0$ tal que $\beta(\nu) < \alpha(\mu)$. Se denota $\epsilon'(\mu, \delta) > 0$ el mínimo de la función continua no decreciente $\gamma(\|\mathbf{x}\|)$ en el conjunto compacto $\nu(\mu) \leq \|\mathbf{x}\| \leq \epsilon(\delta)$. Se define

$$T(\mu, \delta) = \frac{\beta(\delta)}{\epsilon'(\mu, \delta)} > 0$$

Suponga que $\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \nu$ sobre el intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + T$. Entónces se tiene

$$0 < \alpha(\nu) \leq V(\phi(t_1; \mathbf{x}_0, t_0), t_1) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) - (t_1 - t_0)\epsilon' \leq \beta(\delta) - T\epsilon' = 0$$

lo que resulta en una contradicción; por tanto, para un valor de t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, como es un valor arbitrario t_2, se tiene

$$\|\mathbf{x}_2\| = \|\phi(t_2; \mathbf{x}_0, t_0)\| = \nu$$

Por tanto,

$$\alpha(\|\phi(t; \mathbf{x}_2, t_2)\|) < V(\phi(t; \mathbf{x}_2, t_2), t) \leq V(\mathbf{x}_2, t_2) \leq \beta(\nu) < \alpha(\mu)$$

para toda $t \geq t_2$. Entonces,

$$\|\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \mu$$

para toda $t \geq t_0 + T(\mu, \delta) \geq t_2$, lo que prueba la estabilidad asintótica uniforme. Dado que $\alpha(\|\mathbf{x}\|) \to \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, existe para el caso de una δ arbitrariamente grande, una constante $\epsilon(\delta)$ tal que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$. Lo que es más, en vista de que $\epsilon(\delta)$ no depende de t_0, la solución $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ está limitada en forma uniforme. De esta manera se ha probado la estabilidad asintótica uniforme global.

Problema A-5-19

En el análisis del plano z, una matriz $\mathbf{G}$ de $n \times n$ cuyos n valores propios tienen magnitudes menores que la unidad se conoce como una matriz estable. Considere una matriz $\mathbf{P}$ hermítica (o simétrica real) de $n \times n$ que satisface la ecuación matricial siguiente:

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{5-137}$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz de $n \times n$ definida positiva hermítica (o simétrica real). Pruebe que si la matriz $\mathbf{G}$ es estable, entonces una matriz $\mathbf{P}$ que satisface la ecuación (5-137) es única y es definida positiva. Pruebe que la matriz $\mathbf{P}$ puede estar dada por

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q} \mathbf{G}^k$$

Pruebe también que a pesar de que el lado derecho de esta última ecuación es una serie infinita la matriz es finita. Por último, pruebe que si se satisface la ecuación (5-137) mediante matrices definidas positivas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, entonces la matriz $\mathbf{G}$ es una matriz estable. Suponga que todos los valores propios de $\mathbf{G}$ son distintos y todos los vectores propios de $\mathbf{G}$ son linealmente independientes.

Solución Suponga que existen dos matrices $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que satisfacen la ecuación (5-137). Entonces

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}_1\mathbf{G} - \mathbf{P}_1 = -\mathbf{Q} \tag{5-138}$$

y

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}_2\mathbf{G} - \mathbf{P}_2 = -\mathbf{Q} \tag{5-139}$$

Al sustraer la ecuación (5-139) de la ecuación (5-138), se obtiene

$$\mathbf{G}^*\hat{\mathbf{P}}\mathbf{G} - \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \tag{5-140}$$

donde

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$$

Observe que si $\hat{\mathbf{P}} \neq \mathbf{0}$, entonces existe un vector propio $\mathbf{x}_i$ de la matriz $\mathbf{G}$ tal que

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$$

Se define el valor propio asociado con la vector propio $\mathbf{x}_i$ como λ_i. Entonces

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

Por tanto, de la ecuación (5-140), se obtiene

$$\mathbf{G}^*\hat{\mathbf{P}}\mathbf{G}\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_i = \mathbf{G}^*\hat{\mathbf{P}}\lambda_i \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_i = (\lambda_i \mathbf{G}^* - \mathbf{I})\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \tag{5-141}$$

La ecuación (5-141) implica que λ_i^{-1} es un valor propio de $\mathbf{G}^*$. Dado que $|\lambda_i| < 1$, se tiene que $|\lambda_i^{-1}| > 1$. Esto contradice la suposición de que $\mathbf{G}$ es una matriz estable. Por tanto, $\hat{\mathbf{P}}$ debe ser una matriz cero, o es necesario que

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$$

Por tanto, se ha probado la unicidad de la matriz $\mathbf{P}$, que es la solución a la ecuación (5-137).

Para probar que una matriz $\mathbf{P}$, que satisface la ecuación (5-137), puede estar dada por

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k \tag{5-142}$$

se puede volver a escribir la ecuación (5-142) como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= (\mathbf{G}^*)^0 \mathbf{Q}\mathbf{G}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k\right]\mathbf{G} \\ &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\end{aligned}$$

Por tanto, se satisface la ecuación (5-137). Dado que la matriz $\mathbf{Q}$ es una matriz positiva definida, de la ecuación (5-142) la matriz $\mathbf{P}$ también es positiva definida.

Ahora se probará que, aunque la matriz $\mathbf{P}$ dada por la ecuación (5-142) es la suma de una serie infinita, se trata de una matriz finita. En razón de las suposiciones hechas en el enunciado del problema, los valores propios λ_i son distintos y los vectores propios de $\mathbf{G}$ son linealmente independientes. Para el valor propio λ_i asociado con el vector propio $\mathbf{x}_i$, se tiene

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

Al usar esta relación, se puede simplificar $\mathbf{x}_i^*\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k\right]\mathbf{x}_i$. Primero se nota que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i^*(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{Q}\mathbf{G}^2\mathbf{x}_i &= (\mathbf{x}_i^*\mathbf{G}^*)(\mathbf{G}^*\mathbf{Q}\mathbf{G})(\mathbf{G}\mathbf{x}_i) = \bar{\lambda}_i \mathbf{x}_i^*\mathbf{G}^*\mathbf{Q}\mathbf{G}\lambda_i \mathbf{x}_i \\ &= |\lambda_i|^2(\mathbf{x}_i^*\mathbf{G}^*)\mathbf{Q}(\mathbf{G}\mathbf{x}_i) = |\lambda_i|^2(\bar{\lambda}_i \mathbf{x}_i^*)\mathbf{Q}(\lambda_i \mathbf{x}_i) \\ &= |\lambda_i|^2|\lambda_i|^2 \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

Entonces, al usar ese tipo de simplificación, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i^*\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k\right]\mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^*\mathbf{G}^*\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^*(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{Q}\mathbf{G}^2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^*(\mathbf{G}^*)^3\mathbf{Q}\mathbf{G}^3\mathbf{x}_i + \cdots \\ &= \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i + \bar{\lambda}_i\lambda_i \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i + |\lambda_i|^2|\lambda_i|^2 \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i + |\lambda_i|^4|\lambda_i|^2 \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i \\ &\quad + \cdots \\ &= \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i(1 + |\lambda_i|^2 + |\lambda_i|^4 + |\lambda_i|^6 + \cdots) \\ &= \mathbf{x}_i^*\mathbf{Q}\mathbf{x}_i\frac{1}{1 - |\lambda_i|^2}\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{G}^*)^k \mathbf{Q}\mathbf{G}^k$$

es una matriz finita.

Finalmente, se probará que si la ecuación (5-137) es satisfecha por las matrices definidas positivas **P** y **Q**, entonces la matriz **G** es una matriz estable. Se define el vector propio asociado con un valor propio λ_i de **G** como $\mathbf{x}_i$. Entonces

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación (5-137) por $\mathbf{x}_i^*$ y postmultiplicando ambos lados por $\mathbf{x}_i$, se obtiene

$$\mathbf{x}_i^* \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^* \mathbf{P}\mathbf{x}_i = -\mathbf{x}_i^* \mathbf{Q}\mathbf{x}_i$$

Por tanto,

$$\bar{\lambda}_i \mathbf{x}_i^* \mathbf{P}\lambda_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^* \mathbf{P}\mathbf{x}_i = -\mathbf{x}_i^* \mathbf{Q}\mathbf{x}_i$$

o bien

$$(|\lambda_i|^2 - 1)\mathbf{x}_i^* \mathbf{P}\mathbf{x}_i = -\mathbf{x}_i^* \mathbf{Q}\mathbf{x}_i$$

En vista de que tanto $\mathbf{x}_i^* \mathbf{P}\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_i^* \mathbf{Q}\mathbf{x}_i$ son definidas positivas, se tiene

$$|\lambda_i|^2 - 1 < 0$$

o bien

$$|\lambda_i| < 1$$

Por tanto, se ha probado que la matriz **G** es una matriz estable.

Las pruebas y deducciones presentadas aquí se pueden extender al caso en el que la matriz **G** incluye valores propios múltiples y vectores propios múltiples.

Problema A-5-20

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{H}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k)$$

Suponga que existen constantes positivas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$(1) \qquad \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} |h_{ij}(\mathbf{x})| \right\} < 1, \quad \text{para toda } \mathbf{x}$$

o bien

$$(2) \qquad \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} |h_{ij}(\mathbf{x})| \right\} < 1, \quad \text{para toda } \mathbf{x}$$

Demuestre que en cualquiera de estos casos $\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ es una contracción para toda x y por tanto el estado de equilibrio del sistema es asintóticamente estable global.

Solución En el caso 1, la norma se define mediante

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i \{c_i |x_i|\}$$

Entonces

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}\| = \max_i \left\{ c_i \left| \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\mathbf{x}) x_j \right| \right\} \leq \max_i \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} |h_{ij}(\mathbf{x})| \cdot c_j |x_j| \right\}$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} |h_{ij}(\mathbf{x})| \right\} \max_j \{c_j|x_j|\} < \max_j \{c_j|x_j|\}$$
$$= \|\mathbf{x}\|$$

lo que verifica que $\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ es una contracción.

En el caso 2, la norma se define mediante

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} c_i|x_i|$$

Entonces

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} c_i \left| \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\mathbf{x})x_j \right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} \sum_{j=1}^{n} |h_{ij}(\mathbf{x})| \cdot c_j|x_j|$$
$$\leq \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{c_j} |h_{ij}(\mathbf{x})| \right\} \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j|x_j| < \sum_{j=1}^{n} c_j|x_j|$$
$$= \|\mathbf{x}\|$$

que muestra que $\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ es una contracción.

Ahora considere una función escalar $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Claramente, $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ es positiva definida y

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))$$
$$= \|\mathbf{H}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k)\| - \|\mathbf{x}(k)\| < 0$$

y

$$\Delta V(\mathbf{0}) = 0$$

Así, $\Delta V(\mathbf{x})$ es definida negativa. Por tanto, para el sistema considerado $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ es una función de Liapunov y, en razón del teorema 5-5, el origen del sistema es asintóticamente estable global.

Problema A-5-21

Pruebe que si todas las soluciones de

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{5-143}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector n y $\mathbf{G}$ es una matriz constante de $n \times n$, tiende a cero conforme k se acerca al infinito, entonces todas las soluciones del sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{5-144}$$

donde $\mathbf{H}$ es una matriz constante de $n \times r$, están acotados, considerando que el vector de entrada $\mathbf{u}(k)$, que es un vector r, también está acotado.

Solución Dado que $\mathbf{u}(k)$ está acotado, existirá una constante positiva c tal que

$$\|\mathbf{u}(k)\| < c, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

La solución de la ecuación (5-144) está dada por

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{G}^{k-j}\mathbf{H}\mathbf{u}(j-1)$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{x}(k)\| < \|\mathbf{G}\|^k\|\mathbf{x}(0)\| + c\sum_{j=1}^{k}\|\mathbf{G}\|^{k-j}\|\mathbf{H}\| \leq \|\mathbf{G}\|^k\|\mathbf{x}(0)\| + \lim_{k\to\infty} c\sum_{j=1}^{k}\|\mathbf{G}\|^{k-j}\|\mathbf{H}\|$$

En vista de que el origen del sistema homogéneo dado por la ecuación (5-143) es asintóticamente estable, existen constantes positivas a y b ($0 < b < 1$) tales que

$$0 < \|\mathbf{G}\|^k < ab^k$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\|\mathbf{G}\|^{k-j} < \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}ab^{k-j} = a\frac{1}{1-b}$$

Y por tanto,

$$\|\mathbf{x}(k)\| < a\|\mathbf{x}(0)\| + c\|\mathbf{H}\|a\frac{1}{1-b}$$

Así se ha probado que $\|\mathbf{x}(k)\|$ está acotado.

Problema A-5-22

Considere el sistema definido por las ecuaciones

$$x_1(k+1) = 2x_1(k) + 0.5x_2(k) - 5$$
$$x_2(k+1) = 0.8x_2(k) + 2$$

Determine la estabilidad del estado de equilibrio.

Solución Se define el estado de equilibrio en la forma

$$x_1(k) = x_{1e}, \qquad x_2(k) = x_{2e}$$

Entonces este estado de equilibrio puede ser determinado a partir de las dos ecuaciones simultáneas siguientes:

$$x_{1e} = 2x_{1e} + 0.5x_{2e} - 5$$
$$x_{2e} = 0.8x_{2e} + 2$$

es decir

$$x_{1e} = 0, \qquad x_{2e} = 10$$

El estado de equilibrio es, por lo tanto, (0, 10).

Consideremos ahora un nuevo sistema de coordenadas con el origen en el estado de equilibrio. Se definen

$$\hat{x}_1(k) = x_1(k)$$
$$\hat{x}_2(k) = x_2(k) - 10$$

Entonces las ecuaciones del sistema se convierten en

$$\hat{x}_1(k+1) = 2\hat{x}_1(k) + 0.5[\hat{x}_2(k) + 10] - 5$$
$$\hat{x}_2(k+1) + 10 = 0.8[\hat{x}_2(k) + 10] + 2$$

es decir

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_1(k+1)\\ \hat{x}_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0.5\\ 0 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1(k)\\ \hat{x}_2(k)\end{bmatrix}$$

Para determinar la estabilidad del origen del sistema en el nuevo sistema de coordenadas, se aplica la ecuación de estabilidad de Liapunov dada por la ecuación (5-90):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

donde se escoge **Q** como una matriz definida positiva con elementos que simplifiquen el cálculo involucrado. Al resolver esta última ecuación en función de la matriz **P**, se obtiene

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el criterio de Sylvester para la definición positiva, se encuentra que la matriz **P** no es definida positiva. Por tanto, el origen (estado de equilibrio) no es estable.

La inestabilidad del estado de equilibrio puede, naturalmente, determinarse mediante el método de la transformada z. Primero se elimina $\hat{x}_2$ de la ecuación de estado. Entonces, se tiene

$$\hat{x}_1(k + 2) - 2.8\hat{x}_1(k + 1) + 1.6\hat{x}_1(k) = 0$$

La ecuación característica para el sistema en el plano z es

$$z^2 - 2.8z + 1.6 = 0$$

es decir

$$(z - 2)(z - 0.8) = 0$$

Por tanto,

$$z = 2, \qquad z = 0.8$$

Dado que el polo $z = 2$ está localizado fuera del círculo unitario en el plano z, el origen (estado de equilibrio) es inestable.

PROBLEMAS

Problema B-5-1

Obtenga una representación en el espacio de estado en la forma canónica controlable del siguiente sistema con función de transferencia pulso.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}$$

Problema B-5-2

Obtenga una representación en el espacio de estado en la forma canónica observable del sistema con función de transferencia pulso siguiente.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2} + 4z^{-3}}{1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-3}}$$

Problema B-5-3

Obtenga una representación en el espacio de estado en la forma canónica diagonal del sistema con función de transferencia pulso siguiente.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}$$

Problema B-5-4

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema descrito por la ecuación

$$y(k + 2) + y(k + 1) + 0.16y(k) = u(k + 1) + 2u(k)$$

Problema B-5-5

Obtenga la ecuación de estado y la ecuación de salida correspondiente al sistema mostrado en la figura 5-11.

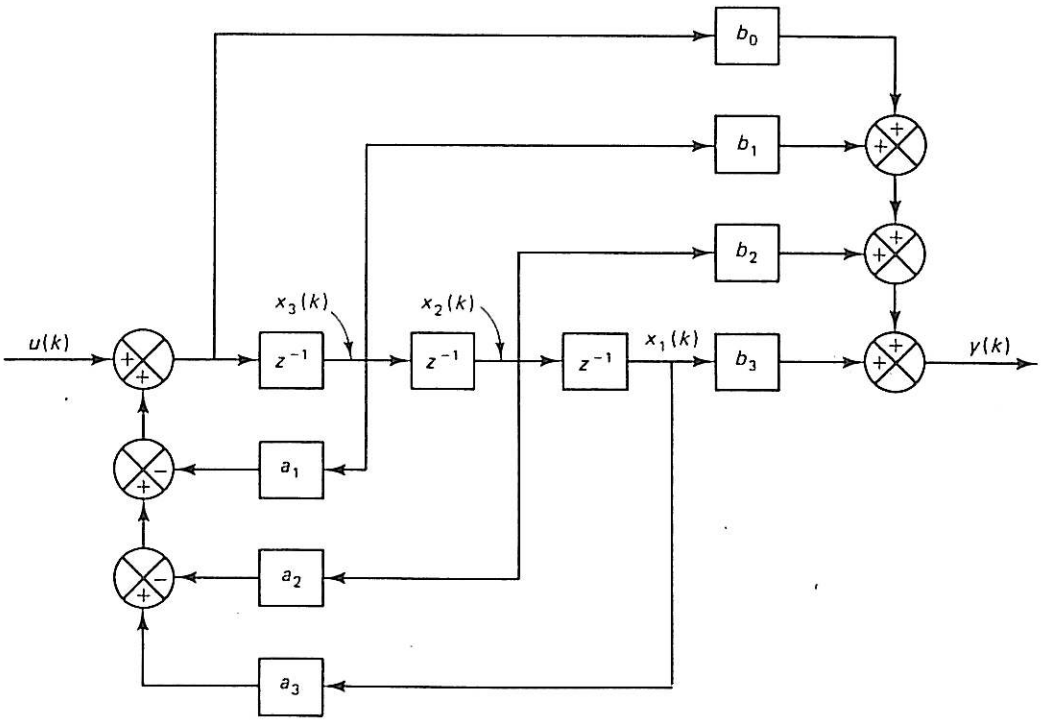


Figura 5-11 Diagrama de bloques de un sistema de control.

Problema B-5-6

Obtenga la ecuación de estado y la ecuación de salida del sistema mostrado en la figura 5-12.

Problema B-5-7

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema mostrado en la figura 5-13.

Problema B-5-8

La figura 5-14 muestra un diagrama de bloques de un sistema en tiempo discreto de varias entradas y varias salidas. Obtenga las ecuaciones en el espacio de estado del sistema considerando $x_1(k)$, $x_2(k)$ y $x_3(k)$ tal y como se muestran en el diagrama como variables de estado. A continuación defina las nuevas variables de estado tales que la matriz de estado se convierta en una matriz diagonal.

Problema B-5-9

Obtenga la ecuación de estado y la ecuación de salida para el sistema que se muestra en la figura 5-15.

Problema B-5-10

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema de control en tiempo discreto que se muestra en la figura 5-16.

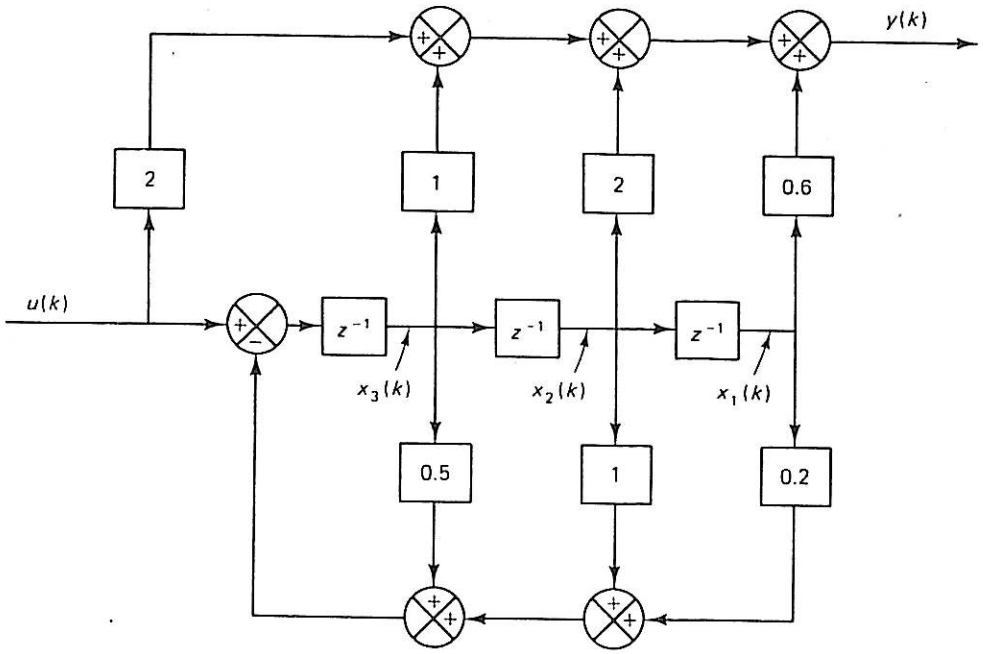


Figura 5-12 Diagrama de bloques de un sistema de control.

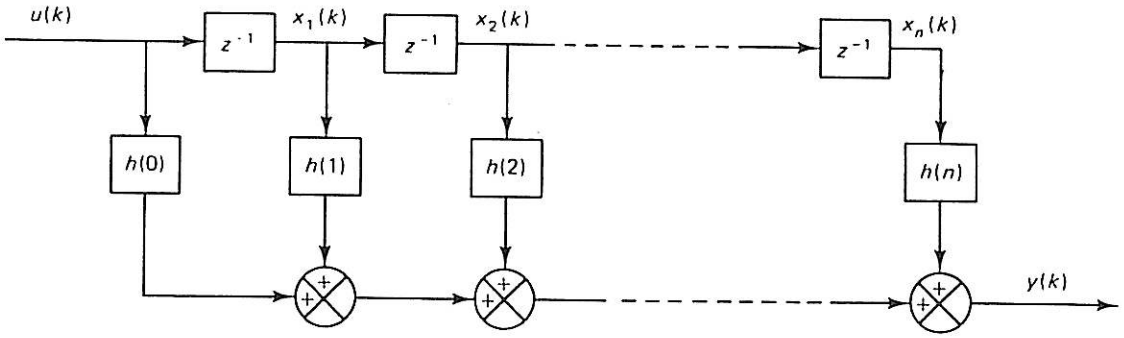


Figura 5-13 Diagrama de bloques para el sistema de control del problema B-5-7.

Problema B-5-11

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema siguiente en la forma canónica diagonal.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}}$$

Problema B-5-12

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema con función de transferencia pulso siguiente tal que la matriz de estado sea una matriz diagonal:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)}$$

Asimismo obtenga las variables de estado iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$ en términos de $y(0)$, $y(1)$ y $y(2)$.

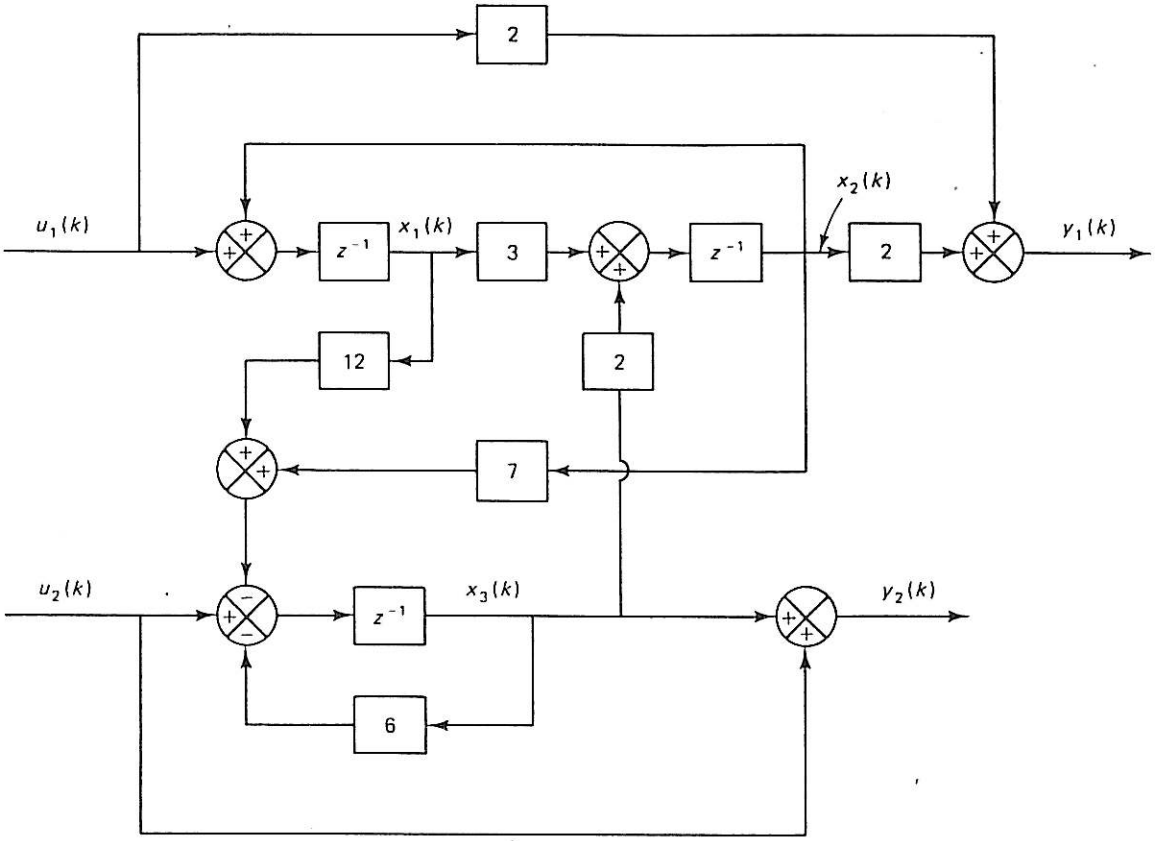


Figura 5-14 Diagrama de bloques del sistema en tiempo discreto de varias entradas y varias salidas del problema B-5-8.

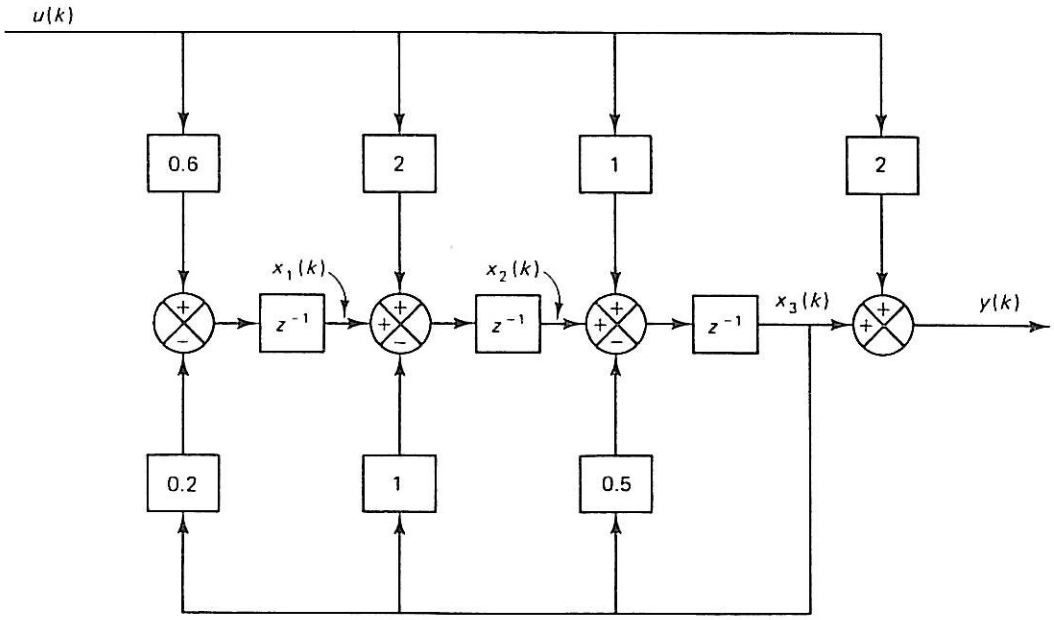


Figura 5-15 Diagrama de bloques de un sistema de control.

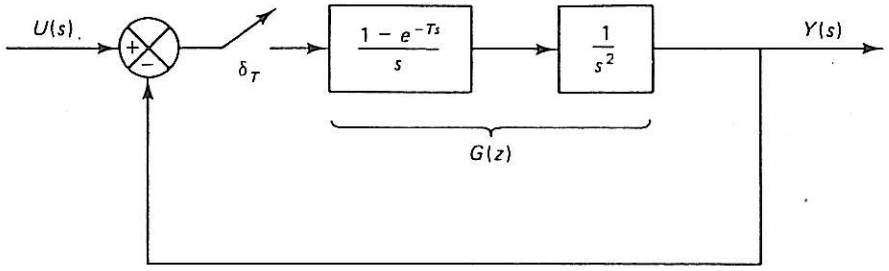


Figura 5-16 Sistema de control en tiempo discreto.

Problema B-5-13

Una representación en el espacio de estado del sistema escalar de ecuaciones en diferencias

$$y(k+n) + a_1(k)y(k+n-1) + \cdots + a_n(k)y(k)$$
$$= b_0(k)u(k+n) + b_1(k)u(k+n-1) + \cdots + b_n(k)u(k)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$, puede estar dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(k) & -a_{n-1}(k) & \cdots & -a_2(k) & -a_1(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \\ \vdots \\ h_{n-1}(k) \\ h_n(k) \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + b_0(k-n)u(k)$$

Determine $h_1(k), h_2(k), \ldots, h_n(k)$ en términos de $a_i(k)$ y de $b_j(k)$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 0, 1, \ldots, n$. También determine los valores iniciales de las variables de estado $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$ en términos de la secuencia de entrada $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$ y la secuencia de salida $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$.

Problema B-5-14

Si el polinomio mínimo de una matriz **G** de $n \times n$ involucra sólo raíces distintas, entonces la inversa de $z\mathbf{I} - \mathbf{G}$ puede estar dada por la siguiente expresión:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathbf{X}_k}{z - z_k} \tag{5-145}$$

donde m es el grado del polinomio mínimo de **G** y $\mathbf{X}_k$ son las matrices de $n \times n$ que se determinan mediante

$$g_j(\mathbf{G}) = g_j(z_1)\mathbf{X}_1 + g_j(z_2)\mathbf{X}_2 + \cdots + g_j(z_m)\mathbf{X}_m$$

donde

$$g_j(\mathbf{G}) = (\mathbf{G} - z_k\mathbf{I})^{j-1}, \qquad g_j(z) = (z - z_k)^{j-1}$$

donde $j = 1, 2, \ldots, m$ y z_k es cualquiera de las raíces del polinomio mínimo de **G**.

Utilizando la ecuación (5-145), se obtiene $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$ para la siguiente matriz **G** de 2×2:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema B-5-15

Obtenga la función de transferencia pulso del sistema definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [b_1 - a_1 b_0 \vdots b_2 - a_2 b_0 \vdots b_3 - a_3 b_0], \qquad D = b_0$$

Problema B-5-16

Encuentre la función de transferencia pulso del sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = b_0$$

Problema B-5-17

Obtenga la representación en el espacio de estado para el sistema definido en la siguiente matriz de transferencia pulso:

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 - z^{-1}} & \dfrac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ \dfrac{1}{1 + 0.6z^{-1}} & \dfrac{1 + z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix}$$

Problema B-5-18

Considere la ecuación de estado en tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz de transición de estado $\Psi(k)$.

Problema B-5-19

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

donde la matriz $\mathbf{G}$ es una matriz estable.

Obtenga los valores en régimen permanente de $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{y}(k)$ cuando $\mathbf{u}(k)$ es un vector constante.

Problema B-5-20

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

donde **G** es una matriz estable.

Demuestre que para una matriz **Q** definida positiva (o semidefinida positiva)

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$$

puede darse por

$$J = \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G}$.

Problema B-5-21

Determine una función de Liapunov $V(\mathbf{x})$ para el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1.2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Problema B-5-22

Determine la estabilidad del origen del sistema siguiente en tiempo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Problema B-5-23

Determine la estabilidad del origen del sistema siguiente en tiempo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \text{sen } T \\ -\text{sen } T & \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

Problema B-5-24

Considere el sistema definido por las ecuaciones

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 0.2x_2(k) + 0.4$$
$$x_2(k+1) = 0.5x_1(k) - 0.5$$

Determine la estabilidad del estado de equilibrio.

6

Ubicación de polos y diseño de observadores

6-1 INTRODUCCIÓN

En la primera parte de este capítulo se presentarán dos conceptos fundamentales de los sistemas de control: controlabilidad y observabilidad. La *controlabilidad* se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de periodos de muestreo. (Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.)

La *observabilidad* se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de períodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(0)$, se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de periodos de muestreo.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron introducidos por R. E. Kalman. Tienen un papel importante en el control óptimo de sistemas multivariables. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad pueden hacer posible la existencia de una solución completa a un problema de control óptimo.

En la segunda parte del capítulo analizaremos el método de diseño de ubicación de polos y los observadores de estados. Observe que el concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de ubicación de polos y el concepto de observabilidad juega un papel importante para el diseño de los observadores de estados. El método de diseño basado en la ubicación de polos junto con los observadores de estados, es uno de los métodos de diseño fundamentales para los ingenieros de control. Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar los

polos en lazo cerrado deseados en el plano z (o las raíces de la ecuación característica) y se podrá diseñar el sistema que proporcione estos polos en lazo cerrado. El método de diseño de ubicar los polos en lazo cerrado en localizaciones deseadas en el plano z, se conoce como *técnica de diseño de ubicación de polos*; es decir, en dicha técnica se realimentan todas las variables de estado, de tal forma que todos los polos del sistema en lazo cerrado quedan ubicados en las localizaciones deseadas. En los sistemas reales de control, sin embargo, quizá no se puedan medir todas las variables de estado, en cuyo caso, no todas las variables de estado estarán disponibles para su realimentación. Para poner en práctica un diseño basado en la realimentación del estado, será necesario estimar las variables de estado no medibles. Esta estimación puede ser efectuada mediante el uso de observadores de estados, mismos que se analizarán en detalle en este capítulo.

El proceso de diseño de ubicación de polos de sistemas de control puede dividirse en dos fases. En la primera, diseñaremos el sistema suponiendo que todas las variables de estado están disponibles para realimentarse. En la segunda, se diseñará el observador de estados, que estimará todas las variables de estado (o sólo las no medibles directamente), requeridas para realimentar, a fin de completar el diseño.

Observe que en el método de diseño anterior, los parámetros de diseño son las localizaciones de los polos en lazo cerrado deseados y el período de muestreo T. (Este período T determina efectivamente el tiempo de asentamiento para la respuesta.)

En el análisis de este capítulo supondremos que las perturbaciones son impulsos que se presentan en forma aleatoria. Su efecto es modificar el estado de sistema. Por lo tanto, una perturbación puede ser representada como un estado inicial. Se supone además que el espaciamiento entre perturbaciones adyacentes es lo suficientemente amplio, para que cualquier respuesta a dicha perturbación se haya amortiguado antes de que la siguiente se presente, por lo que el sistema siempre estará listo para la siguiente instancia.

Aunque la preocupación de este capítulo se centrará principalmente en el problema de regulación, también se analizarán problemas de control. El problema es reducir el vector de error hasta cero con suficiente velocidad. Tanto en el problema de regulación como en el de control, la formulación de la ubicación de polos del diseño se reduce a la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado deseada. El procedimiento para la determinación de dicha matriz del estado es primero elegir localizaciones adecuadas para todos los polos en lazo cerrado, y a continuación determinar aquella matriz de ganancia de realimentación del estado que dé como resultado estos polos en lazo cerrado especificados, de forma que los errores causados por perturbaciones o entradas de comando puedan ser reducidos a cero con suficiente velocidad. En el estado final del proceso de diseño la realimentación del estado se lleva a cabo mediante el uso de variables de estado estimadas, mas que con variables de estado reales, mismas que probablemente no están disponibles para su medición directa. Si algunas de las variables de estado son medibles, entonces se pueden utilizar esas variables de estado disponibles y utilizar variables de estado estimadas en vez de aquellas verdaderamente no medibles.

En la última parte de este capítulo se tratará un problema de diseño de seguimiento, que utiliza el control integral junto con la técnica de ubicación de polos y el observador de estados. Observe que en el problema de regulación, se desea transferir al origen el vector de error no cero (debido a perturbación). En el problema de seguimiento, se necesita que la salida siga a la entrada de comando. Note que el sistema de seguimiento debe seguir la entrada de comando y al mismo tiempo resolver cualquier problema de regulación. Como consecuencia, en el diseño del sistema de seguimiento se puede empezar con el diseño de un sistema de regulación y, a continuación, modificar dicho sistema y convertirlo en uno de seguimiento.

Resumen del capítulo. La sección 6-1 presentó una introducción al material que se va a estudiar en este capítulo. La sección 6-2 analiza la controlabilidad de los sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo. La sección 6-3 trata la observabilidad de dichos sistemas. La sección 6-4 revisa transformaciones útiles en el análisis y diseño en el espacio de estados, que se usarán en las secciones restantes de este capítulo. El método básico de diseño en el espacio de estados se presenta en las secciones 6-5 y 6-6. La sección 6-5 presenta el método de ubicación de polos, que es la primera fase del diseño. En este método se supone que todas las variables de estado pueden medirse y están disponibles para realimentarse. La sección 6-6 analiza la segunda fase del diseño, el diseño de los observadores de estados, que estiman las variables de estado que realmente no son medibles. La estimación se basa en las mediciones de las señales de salida y de control. Las variables de estado estimadas pueden ser utilizadas para la realimentación del estado, basado en el diseño de ubicación de polos. Por último, la sección 6-7 se ocupa de los sistemas de seguimiento y analiza el diseño de estos sistemas; la sección concluye con un ejemplo de diseño.

6-2 CONTROLABILIDAD

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado (también un estado arbitrario), en un período finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un período finito, mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable.

Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por lo tanto, es necesario saber la condición bajo la cual el sistema es controlable. Veremos más adelante, en la sección 6-5, que el concepto de controlabilidad juega un papel importante en la ubicación arbitraria de polos en los sistemas de control. Ahora se deducirá esta condición.

Controlabilidad completa del estado para un sistema de control en tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo. Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT) \tag{6-1}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = señal de control en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times 1$

T = periodo de muestreo

Suponemos que $\mathbf{u}(kT)$ es constante para $kT \leq t < (k+T)T$.

El sistema de control en tiempo discreto dado por la ecuación (6-1) se dice es de estado completamente controlable, o simplemente de estado controlable, si existe una señal de control constante

por intervalos $u(kT)$ definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo de forma que, al partir de cualquier estado inicial, el estado $\mathbf{x}(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado $\mathbf{x}_f$ en n períodos de muestreo como máximo. (Al analizar la controlabilidad, el estado deseado $\mathbf{x}_f$ puede especificarse como el origen, o $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$. Vea el problema A-6-1. Aquí, sin embargo, suponemos que $\mathbf{x}_f$ es un estado arbitrario en el espacio de n dimensiones, que incluye el origen.)

Utilizando la definición que se acaba de dar, a continuación se deducirá la condición para la controlabilidad completa del estado. En vista de que la solución a la ecuación (6-1) es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(nT) &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(jT)\\ &= \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H}u(T) + \cdots + \mathbf{H}u((n-1)T)\end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathbf{x}(nT) - \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) = [\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\begin{bmatrix}u((n-1))T)\\ u((n-2)T)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix} \tag{6-2}$$

Dado que $\mathbf{H}$ es una matriz de $n \times 1$, encontramos que cada una de las matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{GH}$, ... $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ es una matriz de $n \times 1$ o un vector columna. Si el rango de la matriz siguiente es n, es decir

$$\text{rango}\,[\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n \tag{6-3}$$

entonces los n vectores $\mathbf{H}$, $\mathbf{GH}$, ..., $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ pueden abarcar todo el espacio de n dimensiones. La matriz

$$[\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

comúnmente se conoce como *matriz de controlabilidad*. (Observe que todos los estados que pueden ser alcanzados desde el origen, están abarcados por las columnas de la matriz de controlabilidad.) Por lo tanto, si el rango de tal matriz es n, entonces, para un estado arbitrario $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{x}_f$, existirá una secuencia de señales de control no acotadas $u(0)$, $u(t)$, ..., $u[(n-1)T]$ que satisfaga la ecuación (6-2). Por lo tanto, la condición de que el rango de la matriz de controlabilidad sea n da una condición suficiente para la controlabilidad completa del estado.

Para probar que la ecuación (6-3) es también una condición necesaria para la controlabilidad completa del estado, se supone que

$$\text{rango}\,[\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] < n$$

Entonces, utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, puede demostrarse que, para una i arbitraria, $\mathbf{G}^i\mathbf{H}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{H}$, $\mathbf{GH}$, ..., $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$. En consecuencia, tenemos para cualquier i

$$\text{rango}[\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{i-1}\mathbf{H}] < n$$

y por lo tanto los vectores $\mathbf{H}$, $\mathbf{GH}$, ..., $\mathbf{G}^{i-1}\mathbf{H}$ no pueden abarcar completamente el espacio de n dimensiones; y por lo tanto, para algunas $\mathbf{x}_f$, no es posible tener $\mathbf{x}(iT) = \mathbf{x}_f$ para todas las i. Entonces, es necesaria la condición dada por la ecuación (6-3). De esta manera, se encuentra que la condición de rango dada por la ecuación (6-3) es necesaria y suficiente para la controlabilidad completa de estado.

Si el sistema definido por la ecuación (6-1) es completamente controlable de estado, entonces es posible transferir cualquier estado inicial a cualquier estado arbitrario, en a lo más n períodos de muestreo. Observe, sin embargo, que esto es cierto si y sólo si la magnitud de $u(kT)$ es no acotada. Si dicha magnitud es acotada, pudiera tomar más de n períodos de muestreo. (Vea el problema A-6-2.)

Controlabilidad completa del estado en el caso en que $\mathbf{u}(kT)$ ***es un vector.*** Si el sistema está definido por

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT)$$

donde $\mathbf{x}(kT)$ es un vector de dimensión n, $\mathbf{u}(kT)$ es un vector r, $\mathbf{G}$ es una matriz de $n \times n$, y $\mathbf{H}$ es una matriz de $n \times r$, entonces se puede probar que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de $n \times nr$

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

sea de rango n, es decir

$$\text{rango}\,[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n$$

Determinación de la secuencia de control para llevar el estado inicial a un estado deseado. Si la matriz

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

es del rango n y $u(kT)$ es un escalar, entonces es posible encontrar n ecuaciones escalares linealmente independientes, a partir de las cuales se puede determinar en forma única una secuencia de señales de control no acotadas $u(kT)(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$ tal que cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se transfiera al estado deseado en n períodos de muestreo. Vea la ecuación (6-2).

Observe también que si la señal de control no es un escalar sino un vector, entonces la secuencia de $u(kT)$ no es única. De esta manera existe más de una secuencia para el vector de control $u(kT)$ para llevar el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ a un estado deseado, en no más de n períodos de muestreo.

Forma alterna de la condición para la controlabilidad completa del estado. Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \tag{6-4}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = señal de control en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

T = período de muestreo

Si los vectores característicos de $\mathbf{G}$ son distintos, entonces se puede encontrar una matriz de transformación $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que si los valores característicos de **G** son distintos, entonces los vectores característicos de **G** también lo son. Sin embargo, lo opuesto no es cierto. (Por ejemplo, una matriz simétrica real de $n \times n$ con valores característicos múltiples tiene n vectores característicos distintos.) Observe también que la i-ésima columna de la matriz **P** es un vector característico de **G** asociado con el i-ésimo valor característico λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Se define

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(kT) \tag{6-5}$$

Al sustituir la ecuación (6-5) en la ecuación (6-4), se obtiene

$$\hat{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP}\hat{\mathbf{x}}(kT)) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Hu}(kT) \tag{6-6}$$

Definase

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1r} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nr} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-6) puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1((k+1)T) &= \lambda_1 \hat{x}_1(kT) + f_{11}u_1(kT) + f_{12}u_2(kT) + \cdots + f_{1r}u_r(kT) \\ \hat{x}_2((k+1)T) &= \lambda_2 \hat{x}_2(kT) + f_{21}u_1(kT) + f_{22}u_2(kT) + \cdots + f_{2r}u_r(kT) \\ &\vdots \\ \hat{x}_n((k+1)T) &= \lambda_n \hat{x}_n(kT) + f_{n1}u_1(kT) + f_{n2}u_2(kT) + \cdots + f_{nr}u_r(kT) \end{aligned}$$

Si los elementos de cualquiera de los renglones en la matriz de **F** $n \times r$ son todos cero, entonces la variable de estado correspondiente no puede controlarse mediante cualquiera de los $u_i(kT)$. Por lo tanto, la condición para la controlabilidad completa del estado es que si los vectores característicos de **G** son distintos, entonces el sistema es de estado completamente controlable, si y sólo si ninguno de los renglones de $\mathbf{P}^{-1}$ **H** tienen elementos cero. Es importante señalar que para aplicar esta condición de la controlabilidad completa del estado, se debe poner la matriz $\mathbf{P}^{-1}$ **GP** de la ecuación (6-6) en la forma diagonal.

Si la matriz **G** en la ecuación (6-4) no tiene vectores característicos distintos, entonces es imposible su diagonalización. En tal caso, podemos transformar **G** a una forma canónica de Jordan. Si, por ejemplo, **G** tiene valores característicos $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ y posee $n - 3$ vectores característicos distintos, entonces la forma canónica de Jordan de **G** es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_4 & 1 & \\ & & & 0 & \lambda_4 & \\ & & & & & \lambda_6 \quad 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Las submatrices de 3×3 y de 2×2 sobre la diagonal principal se conocen como *bloques de Jordan.*

Suponga que es posible encontrar una matriz de transformación $\mathbf{S}$ de modo que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{GS} = \mathbf{J}$$

Si definimos un nuevo vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ mediante

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(kT) \tag{6-7}$$

así, al sustituir la ecuación (6-7) en la ecuación (6-4) resulta

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}((k+1)T) &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{GS}\hat{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}u(kT) \\ &= \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}u(kT) \end{aligned} \tag{6-8}$$

Las condiciones para la controlabilidad completa del estado del sistema de la ecuación (6-8) pueden entonces enunciarse como sigue: el sistema es de estado completamente controlable, si y sólo si: 1) dos bloques de Jordan en la matriz $\mathbf{J}$ de la ecuación (6-8) no estén asociados con valores característicos iguales; 2) los elementos de cualquier renglón de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}$, que corresponden al último renglón de cada uno de los bloques de Jordan no sean todos cero, y 3) los elementos de cada renglón de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}$, que correspondan a valores característicos distintos, no sean todos cero.

Comentarios. En las condiciones precedentes de la controlabilidad del estado, se ha dicho que en la ecuación (6-8) no deberían estar asociados dos bloques de Jordan de la matriz $\mathbf{J}$ con valores característicos iguales. Este punto se desarrolla como sigue.

Considere el sistema siguiente, donde los dos bloques de Jordan están asociados con los mismos valores característicos λ_1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Aunque todas las variables de estado están afectadas por $u(k)$, este sistema es no controlable, ya que el rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 + 1 & \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \end{bmatrix}$$

es 2. Por lo tanto, al aplicar el criterio anterior correspondiente a la controlabilidad de estado, ninguno de los dos bloques de Jordan de $\mathbf{J}$ deberá estar asociado con los mismos valores característicos.

Ejemplo 6-1

Los sistemas siguientes son de estado completamente controlables:

$$\textbf{1.}\quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$\textbf{2.}\quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Los siguientes sistemas no son de estado completamente controlables:

$$\textbf{1.}\quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$\textbf{2.}\quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Condiciones para la controlabilidad completa del estado en el plano z. La condición para la controlabilidad completa del estado puede enunciarse en términos de funciones de transferencia pulso.

Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que no se presente cancelación en la función de transferencia pulso. Si esto ocurre, el sistema no puede ser controlado en la dirección del modo cancelado. (Vea el problema A-6-4.)

Ejemplo 6-2

Considere la siguiente función de transferencia pulso:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0.2}{(z + 0.8)(z + 0.2)}$$

Es claro que ocurren cancelaciones en los factores $(z + 0.2)$ tanto en el numerador como en el denominador. Por lo tanto, se pierde un grado de libertad. En razón de esta cancelación, este sistema no es de estado completamente controlable.

Por supuesto, se puede obtener la misma conclusión escribiendo esta función de transferencia pulso en la forma de ecuaciones de estado. Una posible representación de espacio de estados para este sistema es

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Dado que

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix}$$

el rango de $[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}]$ es 1. Llegamos por lo tanto a la misma conclusión: el sistema no es de estado completamente controlable.

Controlabilidad completa de la salida. En el diseño práctico de un sistema de control, se puede preferir controlar la salida en vez del estado del sistema. La controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida de un sistema. Por esta razón es necesario definir por separado la controlabilidad completa de la salida.

Considere el sistema definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT) \tag{6–9}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \tag{6–10}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = señal de control (escalar) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times 1$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

El sistema definido por las ecuaciones (6-9) y (6-10) se dice que es de salida completamente controlable, o simplemente de salida controlable, si es posible tener una señal de control no restringida $u(kT)$, definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo $0 \le kT < nT$ tales que, empezando a partir de una salida inicial $\mathbf{y}(0)$, la salida $\mathbf{y}(kT)$ pueda ser transferida al punto deseado (un punto arbitrario) $\mathbf{y}_f$ en el espacio de salidas, en n períodos de muestreo como máximo.

A continuación se deduce la condición para la controlabilidad completa de la salida. Observe que si un sistema es de salida completamente controlable, entonces existe una señal de control constante unitaria, que transferirá cualquier salida inicial a cualquier punto deseado $\mathbf{y}_f$ en el espacio de salidas, en n períodos de muestreo como máximo. En vista de que la solución de la ecuación (6-9) es

$$\mathbf{x}(nT) = \mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(jT)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(nT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(nT) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(jT)\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(nT) - \mathbf{C}\mathbf{G}^n\mathbf{x}(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-j-1}\mathbf{H}u(jT) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H}u(T) + \cdots + \mathbf{C}\mathbf{H}u((n-1)T) \\ &= [\mathbf{C}\mathbf{H} \vdots \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \cdots \vdots \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{y}(nT) - \mathbf{CG}^n\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_f - \mathbf{CG}^n\,\mathbf{x}(0)$ representa un punto arbitrario en el espacio de salidas de m dimensiones. Por lo tanto, igual que en el caso de la controlabilidad completa del estado, una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de salida completamente controlable, es que los vectores $\mathbf{GH}, \mathbf{CGH}, \ldots, \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}$ abarquen el espacio de salidas de dimensión m, es decir que

$$\text{rango } [\mathbf{CH} \vdots \mathbf{CGH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}] = m \tag{6-11}$$

De este análisis se puede ver que en el sistema definido por las ecuaciones (6-9) y (6-10), la controlabilidad completa del estado implica controlabilidad completa de la salida, si y sólo si los m renglones de $\mathbf{C}$ son linealmente independientes.

Ahora considere el sistema definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{Gx}(kT) + \mathbf{Hu}(kT) \tag{6-12}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT) + \mathbf{Du}(kT) \tag{6-13}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo
$\mathbf{u}(kT)$ = vector de control (de dimensión r) en el k-ésimo instante de muestreo
$\mathbf{y}(kT)$ = Vector de salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo
$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$
$\mathbf{D}$ = matriz de $m \times r$

La condición para la controlabilidad completa de la salida correspondiente a este sistema puede deducirse como sigue. Dado que la salida $\mathbf{y}(nT)$ puede ser dada por la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(nT) &= \mathbf{Cx}(nT) + \mathbf{Du}(nT)\\ &= \mathbf{CG}^n\,\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{CG}^{n-j-1}\mathbf{Hu}(jT) + \mathbf{Du}(nT)\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(nT) - \mathbf{CG}^n\,\mathbf{x}(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{CG}^{n-j-1}\mathbf{Hu}(jT) + \mathbf{Du}(nT)\\ &= \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{Hu}(0) + \mathbf{CG}^{n-2}\mathbf{Hu}(T) + \cdots + \mathbf{CHu}((n-1)T)\\ &\quad + \mathbf{Du}(nT)\\ &= [\mathbf{D} \vdots \mathbf{CH} \vdots \mathbf{CGH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}]\begin{bmatrix}\mathbf{u}(nT)\\ \mathbf{u}((n-1)T)\\ \vdots\\ \mathbf{u}(0)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por las ecuaciones (6-12) y (6-13) sea de salida completamente controlable, es que la matriz de $m \times (n+1)r$

$$[\mathbf{D} \vdots \mathbf{CH} \vdots \mathbf{CGH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}]$$

sea de rango m:

$$\text{rango } [\mathbf{D} \vdots \mathbf{CH} \vdots \mathbf{CGH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{CG}^{n-1}\mathbf{H}] = m \tag{6-14}$$

Hay que señalar que la presencia de la matriz **D** en la ecuación de salida del sistema siempre ayuda a establecer la controlabilidad completa de la salida.

Controlabilidad de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. A continuación se enunciará brevemente las condiciones para la controlabilidad completa del estado y la controlabilidad de la salida de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo. Considere el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

donde

$\mathbf{x}$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{u}$ = vector de control (de dimensión r)

$\mathbf{y}$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{B}$ = matriz de $n \times r$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

$\mathbf{D}$ = matriz de $m \times r$

Controlabilidad completa del estado. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado para este sistema, puede deducirse en forma similar a como se hizo en el caso de un sistema en tiempo discreto. Aquí presentaremos sólo el resultado.

La condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea de rango n, o que contenga n vectores columna linealmente independientes. (Esta matriz por lo regular se conoce como matriz de controlabilidad para el sistema en tiempo continuo.)

La condición para controlabilidad completa del estado también se puede enunciar en términos de las funciones de transferencia o de las matrices de transferencia. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que no ocurra cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre cancelación, el sistema no puede ser controlado en la dirección del modo cancelado.

Controlabilidad de la salida. Como en el caso del sistema de control en tiempo discreto, la controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida de un sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. Se puede demostrar que la condición para la controlabilidad completa de la salida es que el rango de la matriz de $m \times (n + 1)r$

$$[\mathbf{D} \vdots \mathbf{CB} \vdots \mathbf{CAB} \vdots \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea m.

6-3 OBSERVABILIDAD

En esta sección, analizaremos la observabilidad de los sistemas de control en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo. Considere el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \tag{6-15}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \tag{6-16}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

El sistema se dice ser completamente observable si cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida.

El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de la reconstrucción de variables de estado no medibles. Se verá más adelante que los sistemas de control con realimentación del estado, diseñados mediante el método de ubicación de polos, necesitan realimentación de variables de estado ponderadas. En la práctica, sin embargo, en los sistemas de control con realimentación de estado se encuentra la dificultad de que algunas de las variables de estado no son accesibles para su medición directa. Entonces requiere estimar las variables de estado no medibles, a fin de construir señales de control de realimentación. En la sección 6-6 veremos que el concepto de observabilidad tiene un papel dominante en el diseño de los observadores de estados.

La razón por la que se considera el sistema sin excitación es la siguiente. Si el sistema que está descrito por las ecuaciones

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

entonces

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(jT)$$

y $\mathbf{y}(kT)$ es

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(jT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

Dado que las matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son conocidas, y $\mathbf{u}(kT)$ también lo es, el segundo y tercer términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por lo tanto, pueden restarse del valor observado de $\mathbf{y}(kT)$. Entonces, para la investigación de una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito por las ecuaciones (6-15) y (6-16).

Una vez que a partir de la observación de la salida se pueda determinar $\mathbf{x}(0)$, también podrá determinarse $\mathbf{x}(kT)$, ya que $u(0), u(T), \ldots, u((k-1)T)$ son conocidas.

Observabilidad completa de los sistemas en tiempo discreto. Considere el sistema definido por las ecuaciones (6-15) y (6-16). El sistema es completamente observable si, dada la salida $\mathbf{y}(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo, es posible determinar el vector estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Ahora, deduciremos la condición para la observabilidad completa del sistema en tiempo discreto descrito por las ecuaciones (6-15) y (6-16). En vista de que la solución $\mathbf{x}(kT)$ de la ecuación (6-15) es

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0)$$

se obtiene

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0)$$

La observabilidad completa significa que, dado $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(T)$, $\mathbf{y}(2T)$, . . . , es posible determinar $x_1(0)$, $x_2(0)$, . . . , $x_n(0)$. Para determinar n incógnitas, necesitamos únicamente n valores de $\mathbf{y}(kT)$. Por lo tanto, podemos utilizar los primeros n valores de $\mathbf{y}(kT)$, o $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(T)$, . . . , $\mathbf{y}((n-1)T)$ que permiten determinar $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$.

En el caso de un sistema completamente observable, dados

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0)\\ \mathbf{y}(T) &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(0)\\ &\vdots\\ \mathbf{y}((n-1)T) &= \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}(0)\end{aligned}$$

se debe ser capaz de determinar $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. Al observar que $\mathbf{y}(kT)$ es un vector de dimensión m, las n ecuaciones simultáneas anteriores dan como resultado nm ecuaciones, todas ellas incluyendo $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$. A fin de obtener un solo conjunto de soluciones $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$ a partir de estas nm ecuaciones, se debe escribir exactamente de entre ellas n ecuaciones lineales independientes. Esto requiere que la matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \hline \mathbf{C}\mathbf{G}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\end{bmatrix}$$

sea de rango n.

Notando que el rango de una matriz y de su transpuesta conjugada es el mismo, es posible enunciar la condición correspondiente a la observabilidad completa como sigue. Una condición necesaria y suficiente para que el sistema definido por las ecuaciones (6-15) y (6-16) sea completamente observable es que el rango de la matriz de $n \times nm$

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \tag{6-17}$$

sea n. La matriz dada por la ecuación (6-17) se conoce comúnmente como *matriz de observabilidad.* [Note que en la ecuación (6-17) los asteriscos indican transpuestas conjugadas. Si las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{G}$

son reales, entonces la notación de transposición conjugada como $\mathbf{G}^*\mathbf{C}^*$ puede ser cambiada a notación de transposición, como $\mathbf{G}^T\mathbf{C}^T$.]

Forma alterna de la condición para la observabilidad completa. Considere el sistema definido por las ecuaciones (6-15) y (6-16) que aquí se repite:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \tag{6-18}$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \tag{6-19}$$

Suponga que los valores característicos de $\mathbf{G}$ son distintos, y que una matriz de transformación $\mathbf{P}$ transforma a $\mathbf{G}$ a una matriz diagonal, de tal forma que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}$ es una matriz diagonal. Se define

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

Entonces las ecuaciones (6-18) y (6-19) se pueden escribir como sigue:

$$\hat{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{y}(nT) = \mathbf{C}\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P})^n\hat{\mathbf{x}}(0)$$

es decir,

$$\mathbf{y}(nT) = \mathbf{C}\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{C}\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^n\hat{x}_1(0) \\ \lambda_2^n\hat{x}_2(0) \\ \vdots \\ \lambda_n^n\hat{x}_n(0)\end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son n valores característicos distintos de $\mathbf{G}$. El sistema es completamente observable, si y sólo si ninguna de las columnas en la matriz $\mathbf{CP}$ de $m \times n$ está formada de elementos cero. Esto es debido a que si la i-ésima columna de $\mathbf{CP}$ está formada de elementos cero, entonces la variable de estado $\hat{x}_i(0)$ no aparecerá en la ecuación de salida y, por lo tanto, no podrá ser determinada a partir de la observación de $\mathbf{y}(kT)$. Por lo tanto, $\mathbf{x}(0)$, que está relacionada con $\hat{\mathbf{x}}(0)$ mediante la matriz no singular $\mathbf{P}$, no podrá ser determinada.

Si la matriz $\mathbf{G}$ implica valores característicos múltiples y no puede ser transformada a una matriz diagonal, entonces si se utiliza una matriz de transformación adecuada $\mathbf{S}$ podemos transformar $\mathbf{G}$ a la forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{S} = \mathbf{J}$$

donde $\mathbf{J}$ está en la forma canónica de Jordan. Definamos

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

Entonces las ecuaciones (6-18) y (6-19) se pueden escribir como sigue:

$$\hat{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(kT) = \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(kT)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(nT) = \mathbf{C}\mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{S})^n\hat{\mathbf{x}}(0)$$

El sistema es completamente observable, si y sólo si 1) dos bloques de Jordan en **J** no están asociados con el mismo valor característico; 2) ninguna de las columnas de **CS** que corresponda al primer renglón del bloque de Jordan está formada de elementos cero, y 3) ninguna columna de **CS** que corresponda a valores característicos distintos está formada de elementos cero.

Para aclarar la condición 2, en el ejemplo 6-3 que se muestra a continuación, se han señalado con líneas punteadas las columnas de **CS** que corresponden al primer renglón de cada bloque Jordan.

Ejemplo 6-3

Los sistemas siguientes son completamente observables:

$$\textbf{1.}\quad \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}, \qquad y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$\textbf{2.}\quad \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \\ x_3((k+1)T) \\ x_4((k+1)T) \\ x_5((k+1)T) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hdashline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} \boxed{1} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

Los sistemas siguientes no son completamente observables:

$$\textbf{1.}\quad \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}, \qquad y(kT) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$\textbf{2.}\quad \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \\ x_3((k+1)T) \\ x_4((k+1)T) \\ x_5((k+1)T) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hdashline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} \boxed{1} & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

Condición para la observabilidad completa en el plano z. La condición para la observabilidad completa también puede enunciarse en términos de funciones de transferencia pulso. Una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa es que no ocurra ninguna cancelación de polos ceros en la función de transferencia pulso. Si ocurre cancelación, el modo cancelado no podrá observarse en la salida.

Ejemplo 6-4

Demuestre que el sistema siguiente es no completamente observable:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT)$$
$$y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [4 \quad 5 \quad 1]$$

Es claro que la señal de control $u(kT)$ no afecta la observabilidad completa del sistema. Para examinar la observabilidad completa, podemos simplemente definir $u(kT) = 0$. Para este sistema, tenemos

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, el rango de la matriz $[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^*]$ es menor de 3. El sistema no es completamente observable.

De hecho, en este sistema ocurre cancelación de polos ceros en la función de transferencia pulso del sistema. La función de transferencia pulso entre $X_1(z)$ y $U(z)$ es

$$\frac{X_1(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

y la función de transferencia pulso entre $Y(z)$ y $X_1(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{X_1(z)} = (z+1)(z+4)$$

Por lo tanto, la función de transferencia pulso entre la salida $Y(z)$ y la entrada $U(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z+1)(z+4)}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

Es claro que se cancelan los factores $(z+1)$ en el numerador y en el denominador. Esto significa que existen estados iniciales diferentes de cero $\mathbf{x}(0)$ que no pueden ser determinados a partir de la medición de $y(kT)$.

Comentarios. La función de transferencia pulso no tiene cancelación, si y sólo si, el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable. (Vea el problema A-6-4.) Esto significa que una función de transferencia cancelada no lleva consigo toda la información que caracteriza al sistema dinámico.

Principio de dualidad. A continuación se examinará la relación entre controlabilidad y observabilidad. Considere el sistema S_1 definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \tag{6-20}$$
$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \tag{6-21}$$

donde

$\mathbf{x}(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{u}(kT)$ = vector de control (de dimensión r) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{y}(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

y su contraparte dual, que llamaremos sistema S_2, definida por las ecuaciones

$$\hat{\mathbf{x}}((k+1)T) = \mathbf{G}^*\hat{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{C}^*\hat{\mathbf{u}}(kT) \tag{6-22}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(kT) = \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{x}}(kT) \tag{6-23}$$

donde

$\hat{\mathbf{x}}(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

$\hat{\mathbf{u}}(kT)$ = vector de control (de dimensión r) en el k-ésimo instante de muestreo

$\hat{\mathbf{y}}(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{G}$

$\mathbf{H}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{H}$

$\mathbf{C}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{C}$

Ahora se examinará una analogía entre controlabilidad y observabilidad. Esta analogía se conoce como *principio de dualidad*, y es debida a Kalman.

El principio de dualidad dice que el sistema S_1 definido por las ecuaciones (6-20) y (6-21) es de estado completamente controlable (observable), si y sólo si el sistema S_2 definido por las ecuaciones (6-22) y (6-23) es de estado completamente observable (controlable). Para verificar este principio, escribamos las condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad completa y la observabilidad completa del estado, correspondientes a los sistemas S_1 y S_2, respectivamente.

PARA EL SISTEMA S_1:

1. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que

$$\text{rango } [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n$$

2. Una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa es que

$$\text{rango } [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = n$$

PARA EL SISTEMA S_2:

1. Una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado es que

$$\text{rango } [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = n$$

2. Una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa es que

$$\text{rango } [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n$$

Si se comparan estas condiciones, es evidente la verdad del principio de dualidad.

Vemos que el sistema S_1, siendo de estado completamente controlable, equivale al sistema S_2 completamente observable. Y el sistema S_1, siendo completamente observable, es equivalente al sistema S_2 de estado completamente controlable. Mediante la utilización de este principio, la observabilidad de un sistema dado puede verificarse al probar la controlabilidad del estado de su dual.

Observabilidad completa de los sistemas de control en tiempo continuo lineales e invariantes con el tiempo. Por último, enunciaremos brevemente la condición de observabilidad completa correspondiente al sistema de control en tiempo continuo lineal e invariante en el tiempo. El sistema se dice completamente observable, si todos los estados iniciales $\mathbf{x}(0)$ pueden determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito. Similar al caso del sistema de control en tiempo discreto, necesitamos considerar sólo un sistema sin excitación. Considere el sistema definido por las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

donde

$\mathbf{x}$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{y}$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

Igual que en el caso de sistema de control en tiempo discreto, se puede decir que la condición para la observabilidad completa es que el rango de la matriz de $n \times nm$

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n. (Esta matriz de $n \times nm$ se conoce comúnmente como matriz de observabilidad del sistema en tiempo continuo.)

Efecto de la discretización de un sistema de control de tiempo continuo sobre la controlabilidad y la observabilidad. Cuando se discretiza un sistema de control en tiempo continuo con polos complejos, la introducción del muestreo puede dificultar la controlabilidad y la observabilidad del sistema discretizado resultante. Es decir, puede ocurrir cancelación de polos ceros al pasar del caso en tiempo continuo al caso en tiempo discreto. Por lo tanto, el sistema discretizado puede perder controlabilidad y observabilidad.

Puede demostrarse que un sistema que sea de estado completamente controlable y completamente observable, en ausencia de muestreo, permanece en tales condiciones después de la introducción del muestreo, si sólo si para cada valor característico de la ecuación característica para el sistema de control en tiempo continuo, la relación

$$\text{Re } \lambda_i = \text{Re } \lambda_j \qquad (6\text{-}24)$$

implica que

$$\text{Im}\,(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2n\pi}{T} \tag{6–25}$$

donde T es el período de muestreo y $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Se hace notar que, a menos que el sistema contenga polos complejos, no ocurrirá cancelación de polos ceros al pasar de tiempo continuo al caso de tiempo discreto.

Ejemplo 6-5

Considere el siguiente sistema de control en tiempo continuo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{6–26}$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{6–27}$$

Este sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, ya que el rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

is 2 and the rank of the observability matrix

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

también es 2. Observe que los valores característicos de la matriz de estado son

$$\lambda_1 = j, \qquad \lambda_2 = -j$$

El sistema de control en tiempo discreto obtenido al discretizar el sistema de control en tiempo continuo definido por las ecuaciones (6-26) y (6-27) puede darse como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \text{sen}\, T \\ -\text{sen}\, T & \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \text{sen}\, T \end{bmatrix} u(kT) \tag{6–28}$$

$$y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} \tag{6–29}$$

donde T es el período de muestreo.

Demostraremos que el sistema discretizado dado por las ecuaciones (6-28) y (6-29) es de estado completamente controlable y completamente observable, si y sólo si

$$\text{Im}\,(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 + 1 \neq \frac{2n\pi}{T}$$

es decir,

$$T \neq n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para el sistema de control en tiempo discreto obtenido al discretizar el sistema de control en tiempo continuo, tenemos la siguiente matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \cos T + 1 - 2\cos^2 T \\ \text{sen}\, T & -\text{sen}\, T + 2 \cos T\, \text{sen}\, T \end{bmatrix}$$

Observe que el rango de $[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}]$ es 2 si y sólo si $T \geq n\pi$ (donde $n = 1, 2, 3, \ldots$). También el rango de la matriz de observabilidad

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & \cos T \\ 0 & \operatorname{sen} T \end{bmatrix}$$

es 2 si y sólo si $T \geq n\pi$ (donde $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Del análisis anterior, podemos concluir que el sistema discretizado es de estado completamente controlable y completamente observable si y sólo si $T \geq n\pi$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Observe que siempre es posible evitar la pérdida de controlabilidad y de observabilidad escogiendo un período de muestreo T distinto a $n\pi$.

6-4 TRANSFORMACIONES ÚTILES EN EL ANÁLISIS Y DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

En esta sección primero se verán técnicas para transformar ecuaciones en el espacio de estados en formas canónicas. A continuación se revisará la propiedad de invariancia de las condiciones de rango para la matriz de controlabilidad y la de observabilidad.

Cómo transformar en formas canónicas las ecuaciones en el espacio de estados. Considere la ecuación de estado en tiempo discreto y la ecuación de salida

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6–30}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \tag{6–31}$$

Ahora se estudiarán técnicas para transformar las ecuaciones en el espacio de estados definidas por las ecuaciones (6-30) y (6-31) en las tres formas canónicas siguientes:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal o de Jordan

(Observe que la forma canónica diagonal es un caso especial de la forma canónica de Jordan.) Se supone que el sistema definido por las ecuaciones (6-30) y (6-31) es de estado completamente controlable y completamente observable.

Forma canónica controlable. El sistema definido por las ecuaciones (6-30) y (6-31) se puede transformar a una forma canónica controlable, mediante la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \tag{6-32}$$

donde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] \tag{6-33}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-34}$$

Los elementos a_i mostrados en la matriz w son coeficientes de la ecuación característica

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Puede demostrarse que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = (\mathbf{M}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{M}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{W}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6-35}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6-36}$$

(Para los detalles de la deducción de las dos ecuaciones anteriores, vea los problemas A-6-5 y A-6-6.)

Ahora definamos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

donde la matriz de transformación $\mathbf{T}$ está dada por la ecuación (6-32). Entonces las ecuaciones (6-30) y (6-31) se convierten en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + Du(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{D}u(k)$$

donde $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$, y $\hat{D} = D$, es decir

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6–37}$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \hat{D}u(k) \tag{6–38}$$

Aquí las b_k son los coeficientes que aparecen en el numerador de la función de transferencia pulso siguiente:

$$\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D = \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{D}$$
$$= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \tag{6-39}$$

Observe que $D = \hat{D} = b_0$. El sistema dado por las ecuaciones (6-37) y (6-38) está en una forma canónica controlable.

Forma canónica observable. El sistema definido por las ecuaciones (6-30) y (6-31) puede ser transformado a una forma canónica observable, mediante la matriz de transformación

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$$

donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \tag{6–40}$$

y $\mathbf{W}$ está dado por la ecuación (6-34). Puede demostrarse que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{GQ} = \hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{CQ} = \hat{\mathbf{C}} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

donde las b_k son los coeficientes que aparecen en el numerador de la función de transferencia de pulso, dada por la ecuación (6-39). (Para detalles de la deducción de las ecuaciones anteriores, vea los problemas A-6-8 y A-6-9.) Entonces, al definir

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Las ecuaciones (6-30) y (6-31) se convierten en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$
$$y(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{D}u(k)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \tag{6-41}$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + Du(k) \tag{6-42}$$

El sistema definido por las ecuaciones (6-41) y (6-42) está en una forma canónica observable.

Forma canónica diagonal o de Jordan. Si los valores característicos p_i de la matriz **G** son distintos, entonces los vectores característicos correspondientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ también son distintos. Defina la matriz de transformación **P** como sigue:

$$\mathbf{P} = [\xi_1 \vdots \xi_2 \vdots \cdots \vdots \xi_n]$$

En Then

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

P(Thus, if we define

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

se tieene que las ecuaciones (6-30) y (6-31) pueden estar dadas por las ecuaciones

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) \tag{6-43}$$

$$y(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{D}u(k) \tag{6-44}$$

donde $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$ y $\hat{D} = D$. Por lo tanto, las ecuaciones (6-43) y (6-44) pueden ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u(k) \tag{6-45}$$

$$y(k) = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + Du(k) \tag{6-46}$$

donde las α_i y las β_i son constantes, tales que $\alpha_i\beta_i$ es el residuo en el polo $z = p_i$; es decir, tal que $\alpha_i\alpha_i$ aparecerán en el numerador del término $1/(z - p_i)$ cuando se expande la función de transferencia de pulso en fracciones parciales como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D &= \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}} + \hat{D} \\ &= \frac{\alpha_1\beta_1}{z - p_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n\beta_n}{z - p_n} + D \end{aligned} \tag{6-47}$$

En muchos casos escogemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$. [Observe que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de estado completamente controlable es que $\alpha_i \geq 0$ ($i = m, m+1, \ldots, n$), y que la condición correspondiente para que sea completamente observable, es que $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, m+1, m+2, \ldots, n$).]

Si existen varios valores característicos p_i de la matriz **G**, entonces escogemos la matriz de transformación **S** definida como sigue:

$$\mathbf{S} = [\boldsymbol{\eta}_1 \vdots \boldsymbol{\eta}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{\eta}_n]$$

donde las $\boldsymbol{\eta}_i$ son vectores característicos (que corresponden a valores característicos distintos) o vectores característicos generalizados (que corresponden a valores característicos múltiples). (Para mayor detalle sobre vectores característicos generalizados, vea el apéndice A.) Entonces

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{GS} = \text{matriz en la forma canónica de Jordan}$$

Ahora si definimos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

entonces se pueden dar las ecuaciones (6-30) y (6-31) como sigue:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$
$$y(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{D}\hat{u}(k)$$

donde $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{GS}$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CS}$ y $\hat{D} = D$. Si, por ejemplo, la matriz **G** incluye un valor característico p_1 múltiple de orden m y otros valores característicos $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ siendo todos ellos distintos y diferentes de p_1 y, además, si el rango de $p_1\mathbf{I} - \mathbf{G}$ es $n-1$ (lo que implica que el polinomio mínimo es idéntico al polinomio característico), entonces las ecuaciones en el espacio de estados en la forma canónica de Jordan serán:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_m(k+1) \\ \hline \hat{x}_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} p_1 & 1 & & 0 & & & 0 \\ & p_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & & & p_1 & & & \\ \hdashline & & & & p_{m+1} & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & & p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_m(k) \\ \hline \hat{x}_{m+1}(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_m \\ \hline a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} u(k) \tag{6-48}$$

$$y(k) = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + Du(k) \tag{6-49}$$

donde las α_i y las β_i son constantes, que aparecen en la función de transferencia de pulso de este sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}+D &= \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I}-\hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}}+\hat{D}\\ &= \frac{\alpha_m\beta_1}{(z-p_1)^m}+\frac{\alpha_m\beta_2}{(z-p_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{\alpha_m\beta_m}{z-p_1}\\ &\quad+\frac{\alpha_{m+1}\beta_{m+1}}{z-p_{m+1}}+\cdots+\frac{\alpha_n\beta_n}{z-p_n}+D\end{aligned}$$

En muchos casos escogemos $\alpha_m = \alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 1$. [Observe que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de estado completamente controlable, es que $\alpha_i \geq 0$ ($i = m, m+1, \ldots, n$), y para que sea completamente observable, es que $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, m+1, m+2, \ldots, n$).]

Observe que si el rango de $p_1\,\mathbf{I}-\mathbf{G}$ es $n-s$ (siendo $2 \leq s \leq n$), es decir, si el polinomio mínimo es de un grado $s-1$ menor que el del polinomio característico, entonces $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{GS}$ tendrá una forma canónica de Jordan distinta. (Para detalles, véase el apéndice A.)

Propiedad de invariancia de las condiciones de rango para la matriz de controlabilidad y para la matriz de observabilidad. Considere sistemas relacionados por transformaciones de similitud. Definamos la matriz de controlabilidad como $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

Sea $\mathbf{P}$ (una matriz arbitraria $n \times n$ no singular) una matriz de transformación de similitud y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} = \bar{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^2\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GPP}^{-1}\mathbf{GP} = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{G}}^2\\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^3\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GPP}^{-1}\mathbf{GPP}^{-1}\mathbf{GP} = \bar{\mathbf{G}}^3\\ &\vdots\\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{P} &= \bar{\mathbf{G}}^{n-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} &= \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\\ &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} \vdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\\ &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} \vdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GPP}^{-1}\mathbf{H} \vdots \cdots \vdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{PP}^{-1}\mathbf{H}]\\ &= [\bar{\mathbf{H}} \vdots \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{H}} \vdots \cdots \vdots \bar{\mathbf{G}}^{n-1}\bar{\mathbf{H}}] = \bar{\mathbf{M}}\end{aligned}$$

Dado que la matriz $\mathbf{P}$ es no singular,

$$\operatorname{rank}\mathbf{M} = \operatorname{rank}\bar{\mathbf{M}}$$

Similarmente, en el caso de la matriz de observabilidad se define

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

Si $\mathbf{P}$ es una matriz de $n \times n$ no singular arbitraria y escribimos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} = \bar{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{CP} = \bar{\mathbf{C}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^*\mathbf{N} &= \mathbf{P}^*[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \\ &= [\mathbf{P}^*\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{P}^*\mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots \mathbf{P}^*(\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \\ &= [\bar{\mathbf{C}}^* \vdots (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P})^*\bar{\mathbf{C}}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{P})^*\bar{\mathbf{C}}^*] \\ &= [\bar{\mathbf{C}}^* \vdots \bar{\mathbf{G}}^*\bar{\mathbf{C}}^* \vdots \cdots \vdots (\bar{\mathbf{G}}^*)^{n-1}\bar{\mathbf{C}}^*] = \bar{\mathbf{N}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{rango } \mathbf{N} = \text{rango } \bar{\mathbf{N}}$$

6-5 DISEÑO VÍA UBICACIÓN DE POLOS

En esta sección se presentará un método de diseño comúnmente conocido como *técnica de ubicación de polos* o de *asignación de polos*. Supondremos que todas las variables de estado son medibles y disponibles para la realimentación. Se podrá demostrar que si el sistema considerado es de estado completamente controlable, entonces los polos del sistema en lazo cerrado pueden ubicarse en cualquier localización deseada, mediante una realimentación del estado a través de una matriz de ganancia de realimentación del estado apropiada.

La presente técnica de diseño empieza con una determinación de los polos en lazo cerrado deseados, basados en los requisitos de respuesta transitoria y/o respuesta en frecuencia como velocidad, factor de amortiguamiento relativo o ancho de banda. Una vez hechas estas consideraciones, suponga que decidimos que los polos en lazo cerrado deseados deben estar en $z = \mu_1, z = \mu_2, \ldots, z = \mu_n$. (En la selección del período de muestreo, debe tenerse cuidado de que el sistema deseado no requiera señales de control excesivamente grandes. De lo contrario, ocurrirán fenómenos de saturación en el sistema. Si éste entra en saturación, se volverá no lineal, por lo que tal método de diseño ya no será aplicable, en vista de que solamente lo es para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.) Entonces, al seleccionar una matriz de ganancia apropiada para la realimentación del estado, es posible obligar al sistema a tener los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable.

A continuación, se tratará el caso en que la señal de control es un escalar y se probará que una condición necesaria y suficiente para que los polos puedan ser ubicados en localizaciones cualesquiera arbitrarias en el plano z, es que el sistema sea de estado completamente controlable. Después analizaremos algunos métodos para determinar la matriz de ganancia de realimentación de estado requerida.

Condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos. Considere el sistema de control en lazo abierto que se muestra en la figura 6-1*a*). La ecuación de estado es

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6-50}$$

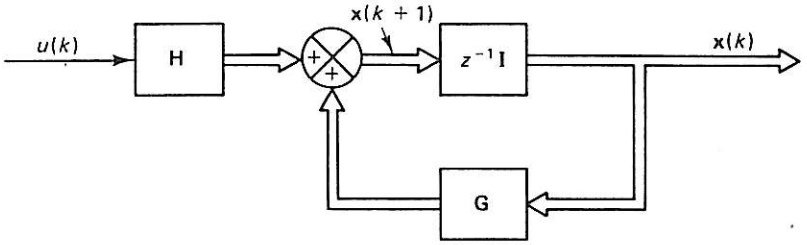
donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-ésimo instante de muestreo

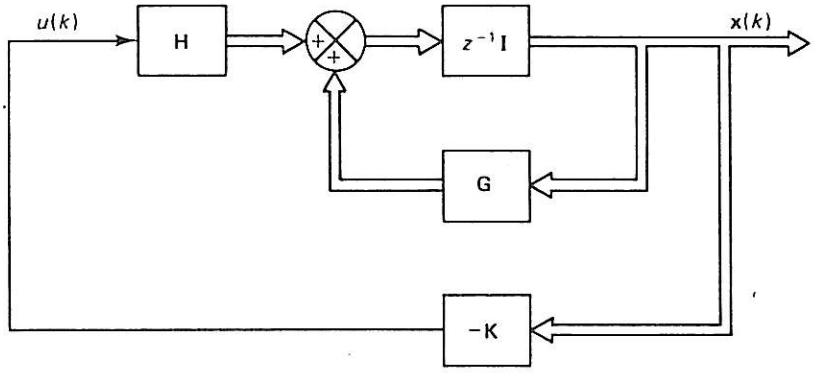
$u(k)$ = señal de control (escalar) en el k-ésimo instante de muestreo

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times 1$



(a)



(b)

Figura 6-1 (a) Sistema de control en lazo abierto; (b) sistema de control en lazo cerrado con $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$.

Suponemos que la magnitud de la señal de control $u(k)$ no está acotada. Si la señal de control $u(k)$ fuera

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de ganancia de realimentación del estado (una matriz de $1 \times n$), entonces el sistema se convierte en un sistema de control en lazo cerrado, como el que se muestra en la figura 6-1*b*), y su ecuación de estado

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) \tag{6-51}$$

Observe que la matriz $\mathbf{K}$ se escoge de tal forma que los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ sean los polos en lazo cerrado deseados: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Probaremos ahora que una condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos, es que el sistema sea de estado completamente controlable. Primero se deducirá la condición necesaria. Empezaremos por demostrar que si el sistema no es de estado completamente controlable, entonces existen valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ que no pueden ser controlados por realimentación del estado.

Suponga que el sistema de la ecuación (6-50) no es de estado completamente controlable. Entonces el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n, es decir,

$$\text{rango } [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = q < n \tag{6-52}$$

Esto significa que en la matriz de controlabilidad hay q vectores columna linealmente independientes. Definamos estos q vectores columna linealmente independientes como $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$. Asimismo, escojamos $n - q$ vectores n adicionales $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$, tales que

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \mathbf{v}_{q+2} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n]$$

tiene rango n. Utilizando la matriz $\mathbf{P}$ como la matriz de transformación, definamos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

Entonces

$$\mathbf{GP} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{G}}$$

es decir,

$$[\mathbf{Gf}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gf}_q \vdots \mathbf{Gv}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gv}_n] = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{G}} \tag{6-53}$$

Y también,

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{H}} \tag{6-54}$$

En vista de que tenemos q vectores columna linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$, podemos utilizar el teorema Cayley-Hamilton para expresar las matrices $\mathbf{Gf}_1, \mathbf{Gf}_2, \ldots, \mathbf{Gf}_q$ en términos de estos q vectores. Es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Gf}_1 &= g_{11}\mathbf{f}_1 + g_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{q1}\mathbf{f}_q \\
\mathbf{Gf}_2 &= g_{12}\mathbf{f}_1 + g_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{q2}\mathbf{f}_q \\
&\vdots \\
\mathbf{Gf}_q &= g_{1q}\mathbf{f}_1 + g_{2q}\mathbf{f}_2 + \cdots + g_{qq}\mathbf{f}_q
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-53) puede escribirse como sigue:

$$[\mathbf{Gf}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gf}_q \vdots \mathbf{Gv}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gv}_n]$$

$$= [\mathbf{f}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{cccc|ccc} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1q} & g_{1q+1} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2q} & g_{2q+1} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1} & g_{q2} & \cdots & g_{qq} & g_{qq+1} & \cdots & g_{qn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{q+1q+1} & \cdots & g_{q+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{nq+1} & \cdots & g_{nn} \end{array}\right]$$

Para simplificar la notación, definamos

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1q} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1} & g_{q2} & \cdots & g_{qq} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{11}$$

$$\begin{bmatrix} g_{1q+1} & g_{1q+2} & \cdots & g_{1n} \\ g_{2q+1} & g_{2q+2} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{qq+1} & g_{qq+2} & \cdots & g_{qn} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{21} = (n-q) \times q \text{ matriz cero}$$

$$\begin{bmatrix} g_{q+1q+1} & g_{q+1q+2} & \cdots & g_{q+1n} \\ g_{q+2q+1} & g_{q+2q+2} & \cdots & g_{q+2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{nq+1} & g_{nq+2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{22}$$

Entonces, la ecuación (6-53) puede escribirse como sigue:

$$[\mathbf{Gf}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gf}_q \vdots \mathbf{Gv}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{Gv}_n] = [\mathbf{f}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{array}\right]$$

Por lo tanto,

$$\hat{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{array}\right] \tag{6-55}$$

A continuación, refiriéndonos a la ecuación (6-54),

$$\mathbf{H} = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{H}} \tag{6-56}$$

Volviendo a la ecuación (6-52), observe que el vector $\mathbf{H}$ puede escribirse en términos de q vectores columna linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_q$. Por lo tanto,

$$\mathbf{H} = h_{11}\mathbf{f}_1 + h_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_{q1}\mathbf{f}_q$$

En consecuencia, la ecuación (6-56) se puede escribir como sigue:

$$h_{11}\mathbf{f}_1 + h_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_{q1}\mathbf{f}_q = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_q \vdots \mathbf{v}_{q+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{c} h_{11} \\ h_{21} \\ \vdots \\ h_{q1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto,

$$\hat{\mathbf{H}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{6-57}$$

donde,

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \vdots \\ h_{q1} \end{bmatrix}$$

Ahora considere la ecuación del sistema en lazo cerrado dada en la ecuación (6-51). La ecuación característica es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = 0$$

Defínase

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{KP}$$

y divídase la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ para obtener

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}_{11} \vdots \mathbf{K}_{12}] \tag{6-58}$$

Si multiplicamos las ecuaciones anteriores, en orden por $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ (donde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, y se suman los resultados, se suman

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{K}_{11} \vdots \mathbf{K}_{12}]\mathbf{P}^{-1}$$

Entonces, la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado será:

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| &= |\mathbf{P}^{-1}||z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}||\mathbf{P}| \\ &= |z\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{GP} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{HKP}| \\ &= |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{K}}| \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6-55), (6-57) y (6-58) en esta última, obtenemos

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{K}}| &= \left| z\begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}[\mathbf{K}_{11} \vdots \mathbf{K}_{12}] \right| \\ &= \left| \begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_q - \mathbf{G}_{11} + \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11} & -\mathbf{G}_{12} + \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & z\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{G}_{22} \end{array} \right| \\ &= |z\mathbf{I}_q - \mathbf{G}_{11} + \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11}||z\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{G}_{22}| \end{aligned} \tag{6-59}$$

La ecuación (6-59) muestra que la matriz $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^{-1}$ tiene control sobre los q valores característicos de $\mathbf{G}_{11} - \mathbf{H}_{11}\mathbf{K}_{11}$, pero no sobre los $n - q$ valores característicos de $\mathbf{G}_{22}$. Es decir, existen $n - q$ valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ que no dependen de la matriz $\mathbf{K}$. Por lo tanto, hemos demostrado que la controlabilidad completa del estado es una condición necesaria para el control de todos los valores característicos (localizaciones de polos en lazo cerrado) de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$.

Ahora se deducirá una condición suficiente. Probaremos que si el sistema es de estado completamente controlable, existe una matriz $\mathbf{K}$ que hará los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ como se desean, o ubicará los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas.

Los valores característicos deseados de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ son $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; cualesquiera valores característicos complejos deben presentarse como pares conjugados. Si observamos que la ecuación característica del sistema original dado por la ecuación (6-50) es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

puede definirse una matriz de transformación $\mathbf{T}$ como sigue:

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

donde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] \tag{6-60}$$

que es de rango n, y donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-61}$$

Luego, de las ecuaciones (6-35) y (6-36), se tiene

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación se define

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \tag{6-62}$$

Entonces

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica $|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}|$ se convierte en

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| &= |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}| \\ &= \left| z\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & z + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\ &= z^n + (a_1 + \delta_1)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z + a_n + \delta_n = 0 \end{aligned} \tag{6-63}$$

La ecuación característica, con los valores característicos deseados, está dada por

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n)$$
$$= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \tag{6-64}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de z correspondientes a las ecuaciones (6-63) y (6-64), obtenemos

$$\alpha_1 = a_1 + \delta_1$$
$$\alpha_2 = a_2 + \delta_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = a_n + \delta_n$$

Por lo tanto, de la ecuación (6-62),

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1]\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \tag{6-65}$$

donde las a_i y las α_i son coeficientes conocidos, y $\mathbf{T}$ es una matriz conocida. De modo que hemos determinado la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}$ requerida, en función de coeficientes conocidos y de una matriz conocida del sistema. Esto prueba la condición de suficiencia; es decir, si el sistema definido por la ecuación (6-50) es de estado completamente controlable, entonces siempre será posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$, requerida para la ubicación arbitraria de los polos. Por lo tanto, hemos demostrado que una condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable.

Fórmula de Ackermann. La expresión dada en la ecuación (6-65) no es la única utilizada en la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$. Existen otras expresiones disponibles. A continuación presentaremos una de ellas, comúnmente conocida como *fórmula de Ackermann.*

Considere el sistema definido por la ecuación (6-50). Se supone que el sistema es de estado completamente controlable. Mediante el uso de la realimentación del estado $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, se desea ubicar los polos en lazo cerrado en $z = \mu_1, z = \mu_2, \ldots, z = \mu_n$. Es decir, deseamos que la ecuación característica sea

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = (z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n)$$
$$= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

Sea

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$$

En vista de que el teorema de Cayley-Hamilton indica que $\tilde{\mathbf{G}}$ satisface su propia ecuación característica, tenemos que

$$\tilde{\mathbf{G}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{G}}^{n-1} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{G}}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{G}} + \alpha_n \mathbf{I} = \phi(\tilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{0}$$

Utilizaremos esta última ecuación para deducir la fórmula de Ackermann.

Considere ahora las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{I} \\
\tilde{\mathbf{G}} &= \mathbf{G} - \mathbf{HK} \\
\tilde{\mathbf{G}}^2 &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^2 = \mathbf{G}^2 - \mathbf{GHK} - \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}} \\
\tilde{\mathbf{G}}^3 &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^3 = \mathbf{G}^3 - \mathbf{G}^2\mathbf{HK} - \mathbf{GHK}\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}}^2 \\
&\vdots \\
\tilde{\mathbf{G}}^n &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^n = \mathbf{G}^n - \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{HK} - \cdots - \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Si multiplicamos las ecuaciones anteriores, en orden por $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ (donde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, y se suma los resultados, la misma

$$\begin{aligned}
\alpha_n\mathbf{I} + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{G}} + \alpha_{n-2}\tilde{\mathbf{G}}^2 + \cdots + \tilde{\mathbf{G}}^n &= \alpha_n\mathbf{I} + \alpha_{n-1}\mathbf{G} + \alpha_{n-2}\mathbf{G}^2 \\
&+ \cdots + \mathbf{G}^n - \alpha_{n-1}\mathbf{HK} - \alpha_{n-2}\mathbf{GHK} - \alpha_{n-2}\mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}} - \cdots - \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{HK} - \cdots \\
&- \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1}
\end{aligned}$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\phi(\tilde{\mathbf{G}}) &= \phi(\mathbf{G}) - \alpha_{n-1}\mathbf{HK} - \alpha_{n-2}\mathbf{GHK} - \alpha_{n-2}\mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}} - \cdots - \mathbf{HK}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1} - \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{HK} \\
&= \phi(\mathbf{G}) - [\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}\mathbf{K} + \alpha_{n-3}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6-66}$$

Observe que

$$\phi(\tilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-66) puede modificarse a la forma

$$\phi(\mathbf{G}) = [\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}\mathbf{K} + \alpha_{n-3}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{6-67}$$

Como el sistema es de estado completamente controlable, la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

tiene rango n, y su inversa existe. Por tanto, la ecuación (6-67) puede modificarse a la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}\mathbf{K} + \alpha_{n-3}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = [\mathbf{H}\vdots\mathbf{GH}\vdots\cdots\vdots\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $[0 \quad 0 \cdots 0 \quad 1]$, obtenemos

$$[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}\mathbf{K} + \alpha_{n-3}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \cdots + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

que se puede simplificar a

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G}) \tag{6–68}$$

La ecuación (6-68) proporciona la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** requerida. Es esta expresión en particular para la matriz **K**, la que comúnmente se conoce como fórmula de Ackermann. [Vea el problema A-6-12 para la deducción de la ecuación (6-68), cuando $n = 3$.]

Comentarios. La matriz de ganancia de realimentación del estado **K** es determinada de manera que el error (causado por perturbaciones) se reducirá a cero con suficiente velocidad. Observe que para un sistema dado, la matriz **K** no es única, sino que depende de las localizaciones en lazo cerrado deseadas (que determinan la velocidad de respuesta) que se haya seleccionado. La selección de los polos en lazo cerrado deseados o de la ecuación característica deseada es un punto medio entre la velocidad de la respuesta del vector de error y la sensibilidad a perturbaciones y a ruido en la medición. Es decir, si aumentamos la velocidad de la respuesta de error, entonces, por lo general, aumentan los efectos adversos de las perturbaciones y de ruido en la medición. En la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** para un sistema dado, es conveniente examinar varias matrices **K** basadas en varias ecuaciones características deseadas, y seleccionar aquella que ofrezca un mejor desempeño general del sistema.

Una vez seleccionada la ecuación característica deseada, existen varias formas de determinar la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**, correspondiente al sistema definido por la ecuación (6-50), que se supone de estado completamente controlable. A continuación se listan cuatro de ellas.

1. Como se mostró en el análisis anterior, la matriz **K** se puede obtener de la ecuación (6-65):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1](\mathbf{MW})^{-1} \end{aligned} \tag{6–69}$$

donde las a_i son los coeficientes de la ecuación característica del sistema original

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

y las α_i son los coeficientes de la ecuación característica deseada, correspondiente al sistema de control con realimentación del estado; es decir,

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$$

La matriz **T** está dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \tag{6–70}$$

donde **M** y **W** corresponden a las ecuaciones (6-60) y (6-61), respectivamente.

Si la ecuación de estado del sistema ya está en la forma canónica controlable, la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** se puede simplificar, dado que la matriz de transformación **T** se convierte en la matriz identidad. En este caso, la matriz deseada **K** se obtiene sustituyendo $\mathbf{T} = \mathbf{MW} = \mathbf{I}$ en la ecuación (6-69).

2. La matriz de ganancia de realimentación del estado **K** deseada puede obtenerse mediante la fórmula de Ackermann:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G}) \tag{6–71}$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1\mathbf{G}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{G} + \alpha_n\mathbf{I}$$

3. Si los valores característicos que se desean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son distintos, entonces la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** requerida puede ser:

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1][\xi_1 \vdots \xi_2 \vdots \cdots \vdots \xi_n]^{-1} \tag{6–72}$$

donde los vectores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ satisfacen la ecuación

$$\xi_i = (\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Observe que las ξ_i son vectores característicos de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, es decir, ξ_i satisface la ecuación

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_i = \mu_i\xi_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Para una respuesta sin oscilación, $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$. La ecuación (6-72), en este caso, puede simplificarse como sigue:

$$\mathbf{K} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0][\xi_1 \vdots \xi_2 \vdots \cdots \vdots \xi_n]^{-1} \tag{6-73}$$

donde

$$\xi_1 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}, \qquad \xi_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = \mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}$$

[Para conocer los detalles de la deducción de las ecuaciones (6-72) y (6-73), vea los problemas A-6-12 y A-6-13.]

4. Si es bajo el orden n del sistema, sustituya $\mathbf{K} = [k_1 \vdots k_2 \vdots \cdots \vdots k_n]$ en la ecuación característica

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = 0$$

y a continuación haga coincidir los coeficientes de las potencias de z de esta ecuación característica, con potencias iguales de z de la ecuación característica deseada

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$$

Un cálculo directo de la matriz **K** como éste puede resultar más simple en sistemas de bajo orden.

Ejemplo 6-6

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z + 1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0.16$$

Por lo tanto,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0.16$$

Determine una matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ adecuada, tal que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en

$$z = 0.5 + j0.5, \qquad z = 0.5 - j0.5$$

Primero examinemos el rango de la matriz de controlabilidad. El rango de

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable, y es posible la ubicación arbitraria de polos. La ecuación característica para el sistema deseado es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = (z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$$

de modo que,

$$\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_2 = 0.5$$

Demostraremos cuatro formas para determinar la matriz $\mathbf{K}$.

Método 1. De la ecuación (6-69), la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ está dada como sigue:

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

Observe que el sistema original ya está en la forma canónica controlable, por lo que la matriz de transformación $\mathbf{T}$ se convierte en $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}]\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1] = [0.5 - 0.16 \vdots -1 - 1] \\ &= [0.34 \quad -2] \end{aligned}$$

Método 2. Refiriéndonos a la fórmula de Ackermann dada por la ecuación (6-71), tenemos

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 - \mathbf{G} + 0.5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.34 & -2 \\ 0.32 & 2.34 \end{bmatrix}$$

En concecuencia,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.34 & -2 \\ 0.32 & 2.34 \end{bmatrix}$$
$$= [0.34 \quad -2]$$

Método 3. De la ecuación (6-72), la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** deseada, se determina como sigue:

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1][\xi_1 \quad \xi_2]^{-1}$$

donde

$$\xi_i = (\mathbf{G} - \mu_i \mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}, \qquad i = 1, 2$$

Dado que $\mu_1 = 0.5 + j0.5$,

$$\xi_1 = [\mathbf{G} - (0.5 + j0.5)\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{H}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.5 - j0.5 & 1 \\ -0.16 & -1.5 - j0.5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{0.66 + j} \\ \dfrac{-0.5 - j0.5}{0.66 + j} \end{bmatrix}$$

En forma similar, para $\mu_2 = 0.5 - j0.5$,

$$\xi_2 = [\mathbf{G} - (0.5 - j0.5)\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{H}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.5 + j0.5 & 1 \\ -0.16 & -1.5 + j0.5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{0.66 - j} \\ \dfrac{-0.5 + j0.5}{0.66 - j} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, tenemos que

$$[\xi_1 \quad \xi_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{0.66 + j} & \dfrac{-1}{0.66 - j} \\ \dfrac{-0.5 - j0.5}{0.66 + j} & \dfrac{-0.5 + j0.5}{0.66 - j} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{0.7178(1 - j)}{1 + j0.66} & \dfrac{-1.4356}{1 + j0.66} \\ \dfrac{-0.7178(1 + j)}{-1 + j0.66} & \dfrac{1.4356}{-1 + j0.66} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se determina que la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** deseada es

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1][\xi_1 \quad \xi_2]^{-1}$$
$$= [1 \quad 1]\begin{bmatrix} \dfrac{0.7178(1 - j)}{1 + j0.66} & \dfrac{-1.4356}{1 + j0.66} \\ \dfrac{-0.7178(1 + j)}{-1 + j0.66} & \dfrac{1.4356}{-1 + j0.66} \end{bmatrix}$$
$$= [0.34 \quad -2]$$

Método 4. Es de observarse que, para sistemas de bajo orden como éste, puede resultar más sencillo sustituir

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

en la ecuación característica, y escribir la ecuación en función de las k aún sin determinar. De este modo, esta ecuación será igual a la ecuación característica deseada. El procedimiento es el que sigue:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = \left|\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right|$$

$$= \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 + k_1 & z + 1 + k_2 \end{vmatrix}$$

$$= z^2 + (1 + k_2)z + 0.16 + k_1 = 0$$

Ahora igualamos esta ecuación característica a la ecuación deseada

$$(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = 0$$

de modo que

$$z^2 + (1 + k_2)z + 0.16 + k_1 = z^2 - z + 0.5$$

Comparando los coeficientes con potencias iguales de z, obtenemos

$$1 + k_2 = -1, \qquad 0.16 + k_1 = 0.5$$

de donde

$$k_1 = 0.34, \qquad k_2 = -2$$

Por lo tanto, la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ deseada es

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] = [0.34 \quad -2]$$

Observe que para sistemas de orden superior, los cálculos involucrados en este método pueden ser muy laboriosos. En tal caso será preferible usar otros métodos.

Respuesta con oscilaciones muertas. Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

Con realimentación de estado $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, la ecuación de estado se convierte en

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k)$$

Observe que la solución de esta última ecuación está dada por

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^k \mathbf{x}(0) \tag{6–74}$$

Si los valores característicos μ_g de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ se presentan dentro del círculo unitario, entonces el sistema es asintóticamente estable.

A continuación demostraremos que si seleccionamos todos los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ como cero, es posible obtener la respuesta con oscilaciones muertas, es decir,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \qquad \text{para } k \geq q,\ q \leq n$$

En el análisis de la respuesta con oscilaciones muertas, la matriz de potencia nula

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

juega un papel de importancia. Considere, por ejemplo, la matriz de 4 × 4 de potencia nula:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En forma similar, para una matriz **N** de potencia nula de $n \times n$,

$$\mathbf{N}^n = \mathbf{0}$$

Ahora considere el sistema de estado completamente controlable dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6-75}$$

Hagamos que las localizaciones deseadas de los polos sean el origen, o bien, que los valores característicos deseados sean cero: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$. Entonces podemos demostrar que la respuesta a cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ es con oscilaciones muertas. En vista de que la ecuación característica que tiene los valores característicos deseados puede darse por

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = z^n$$

obtenemos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

y la matriz **K** dada por la ecuación (6-65) puede simplificarse a:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \\ &= [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1]\mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \tag{6-76}$$

Utilizando la matriz de transformación **T** dada por la ecuación (6-32), definimos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Definimos también

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

Entonces, la ecuación (6-75) se puede escribir como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$

Si utilizamos la realimentación del estado $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -k\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$, entonces esta última ecuación se convierte en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Por la ecuación (6-76),

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}[-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Así que $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}$ es una matriz de potencia nula, por lo que

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})^n = \mathbf{0}$$

En términos del estado original $\mathbf{x}(k)$, tenemos

$$\mathbf{x}(n) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^n \mathbf{x}(0) = (\mathbf{T}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{K})^n \mathbf{x}(0) = [\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}]^n \mathbf{x}(0)$$

$$= \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})^n \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

De este modo hemos demostrado que si los valores característicos deseados son todos cero, entonces cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede llevar al origen en por lo menos n períodos de muestreo, y la respuesta es con oscilaciones muertas, siempre y cuando la señal de control $u(k)$ sea no acotada.

Comentarios acerca del control con oscilaciones muertas. El concepto de la respuesta con oscilaciones muertas es único para los sistemas de control en tiempo discreto. En los sistemas de control en tiempo continuo no existe la respuesta con oscilaciones muertas. En el control con oscilaciones muertas, cualquier vector de error distinto de cero será llevado a cero en no más de n períodos de muestreo, si la magnitud del control escalar $u(k)$ no está acotada. El tiempo de asentamiento depende del período de muestreo, ya que la respuesta se asienta en, a lo más, n períodos de muestreo. Si el período de muestreo T se escoge muy pequeño, el tiempo de asentamiento también será muy pequeño, y esto implicará que la señal de control tenga una magnitud extremadamente grande. De no ser así, no sería posible llevar la respuesta de error a cero en un período corto.

En el control con oscilaciones muertas, el período de muestreo es el único parámetro de diseño. Por lo tanto, si se desea una respuesta con oscilaciones muertas, el diseñador deberá escoger con cuidado el período de muestreo, de forma que en la operación normal del sistema no se requiera de una magnitud de control extremadamente grande. Aprecie que no es físicamente posible aumentar

sin límite la magnitud de la señal de control. Si la magnitud es incrementada en forma suficiente, siempre tendrá lugar el fenómeno de saturación. Si la saturación ocurre en la magnitud de la señal de control, entonces la respuesta ya no podrá tener oscilaciones muertas. El tiempo de asentamiento será mayor que n períodos de muestreo. En el diseño real de los sistemas de control con oscilaciones muertas, el diseñador debe estar consciente del intercambio a efectuar entre la magnitud de la señal de control y la velocidad de respuesta.

Ejemplo 6-7

Considere el sistema dado por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6-77}$$

Determine la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$, tal que cuando la señal de control esté dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

el sistema en lazo cerrado (sistema de regulación) exhiba la respuesta con oscilaciones muertas a un estado inicial $\mathbf{x}(0)$. Suponga que la señal de control $u(k)$ no está acotada.

Refiriéndonos a la ecuación (6-76), para la respuesta con oscilaciones muertas, tenemos que

$$\mathbf{K} = [-a_2 \quad -a_1]\mathbf{T}^{-1} \tag{6-78}$$

El sistema dado por la ecuación (6-77) ya tiene la forma canónica controlable. Por lo tanto, en la ecuación (6-78), $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. La ecuación característica del sistema dado por la ecuación (6-77) es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0.16 = z^2 + a_1 z + a_2$$

Y por lo tanto,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0.16$$

En consecuencia, la ecuación (6-78) se convierte en

$$\mathbf{K} = [-a_2 \quad -a_1] = [-0.16 \quad -1]$$

Esto proporciona la matriz de ganancia de realimentación del estado deseada.

Verifiquemos que la respuesta del sistema a un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ es en realidad la respuesta con oscilaciones muertas. En vista de que la ecuación de estado en lazo cerrado se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0.16 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

si el estado inicial está dado por

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

donde a y b son constantes arbitrarias,

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el estado $\mathbf{x}(k)$ para $k = 2, 3, 4, \ldots$ se convierte en cero y la respuesta-tiene en verdad oscilaciones muertas.

Ubicación de polos cuando la señal de control es un vector. Hasta este momento hemos considerado el problema de la ubicación de polos cuando la señal de control es un escalar. Si la señal de control es una cantidad vectorial (vector de dimensión r), se puede acelerar la respuesta, pues existe más libertad para escoger las señales de control $u_1(k)$, $u_2(k)$, . . . , $u_r(k)$ a fin de acelerar la respuesta. Por ejemplo, en el caso de un sistema de orden n con un control escalar, la respuesta con oscilaciones muertas se puede conseguir en a lo más n períodos de muestreo. En el caso del control de vector $\mathbf{u}(k)$, la respuesta con oscilaciones muertas puede conseguirse en menos de n períodos de muestreo.

En el caso del control con un vector, sin embargo, se hace más compleja la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$. En el apéndice C presentaremos un caso de este tipo.

Sistema de control con entrada de referencia. Hasta ahora hemos considerado sistemas de regulación. En el sistema regulador, la entrada de referencia queda fija durante un largo período, y las perturbaciones externas crean estados distintos de cero. La ecuación característica para el sistema determina la velocidad mediante la cual los estados no nulos se acercan al origen. A continuación, consideraremos el caso en el que el sistema tiene una entrada de referencia.

Considere el sistema mostrado en la figura 6-2. La planta queda descrita por las siguientes ecuaciones de estado y de salida:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

La señal de control $u(k)$ está dada por

$$u(k) = K_0 r(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Si eliminamos $u(k)$ de la ecuación de estado, tenemos que

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_0 r(k)$$

La ecuación característica para el sistema es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = 0$$

Como se enunció antes, si el sistema es de estado completamente controlable, entonces puede determinarse la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}$, a fin de que proporcione los polos en lazo cerrado deseados.

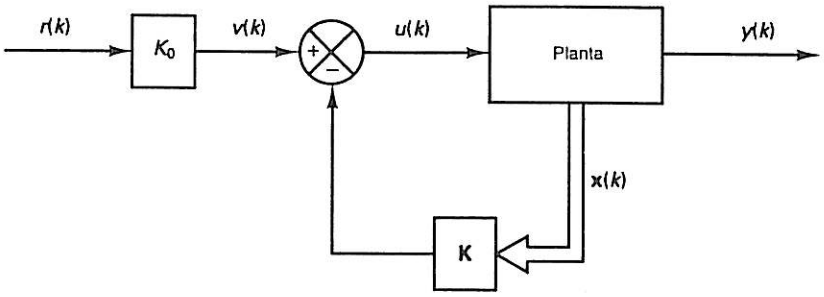


Figura 6-2 Sistema de control con realimentación del estado.

Es importante señalar que la realimentación del estado puede modificar la ecuación característica correspondiente al sistema, pero que, al hacerlo, se modifica la ganancia en estado permanente del sistema completo. Por lo tanto, es necesario tener una ganancia ajustable K_0 en el sistema. Esta ganancia K_0 debe ajustarse de tal forma que la respuesta escalón unitario del sistema en estado permanente sea la unidad, o que $y(\infty) = 1$. A fin de aclarar los detalles, veamos el siguiente problema de ejemplo.

Ejemplo 6-8

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$
$$u(k) = K_0 r(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Diseñe un sistema de control tal que los polos en lazo cerrado deseados de la ecuación característica estén en

$$z_1 = 0.5 + j0.5, \qquad z_2 = 0.5 - j0.5$$

Entonces el polinomio característico deseado está dado por

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = (z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5)$$
$$= z^2 - z + 0.5$$

La matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ puede ser determinada como

$$\mathbf{K} = [0.34 \quad -2]$$

(Vea el ejemplo 6-6 para la determinación de la matriz $\mathbf{K}$.)

Utilizando esta matriz $\mathbf{K}$, la ecuación de estado se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_0 r(k)$$
$$= \hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{H}}r(k)$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}, \qquad \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}K_0$$

La constante de ganancia K_0 puede determinarse en el espacio de estados o en el plano z, mediante la función de transferencia de pulso. En este ejemplo, utilizaremos este último método.

La función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ para este sistema, es

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}}$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0.34 \quad -2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$G(z) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

Así que

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z) = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

Para determinar la constante de ganancia K_0, utilizamos la condición de que sea la unidad la salida en estado permanente $y(\infty)$ para la entrada escalón unitario, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}\frac{z}{z-1}$$
$$= 2K_0 = 1$$

En comsecuencia, hemos determinado K_0 como

$$K_0 = 0.5$$

La figura 6-3 muestra los diagramas de bloques del sistema diseñado. La respuesta escalón unitario de este sistema puede obtenerse con facilidad mediante el uso de MATLAB. El programa 6-1 de MATLAB es uno de muestra para obtener la respuesta escalón unitario. La figura 6-4 muestra la curva de respuesta resultante.

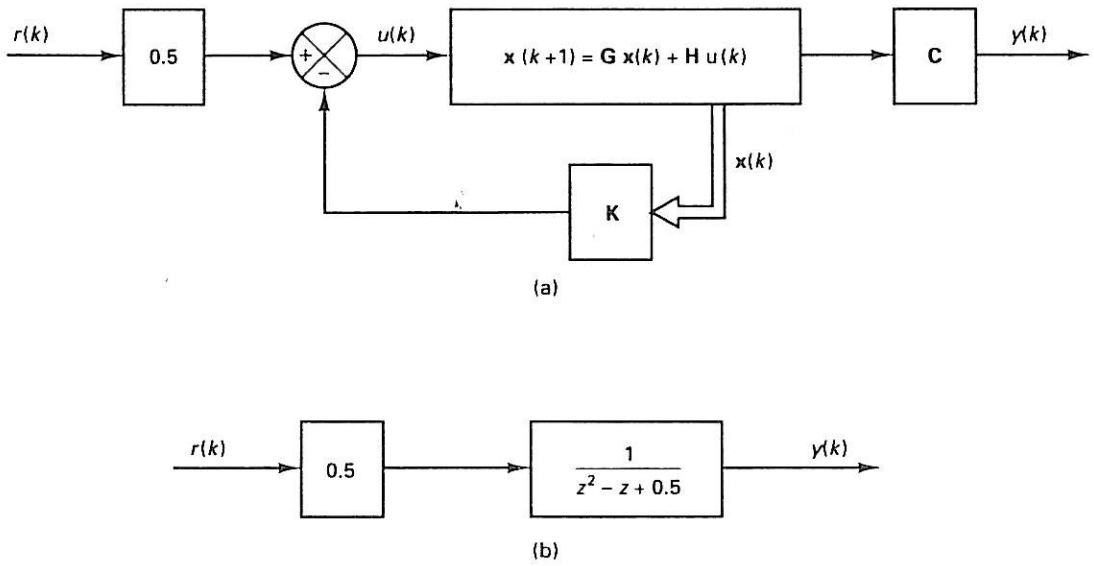


Figura 6-3 (a) Diagrama de bloques del sistema de control diseñado en el ejemplo 6-8; (b) diagrama de bloques simplificado.

6-1 MATLAB PROGRAMA

```
num = [0   0   0.5];
den = [1   -1   0.5];
r = ones(1,41);
v = [0   40   0   1.6];
axis(v);
k = 0:40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,`o´)
grid
title(`Respuesta escalón unitario´)
xlebel(`k´)
ylebel(`y(k)´)
```

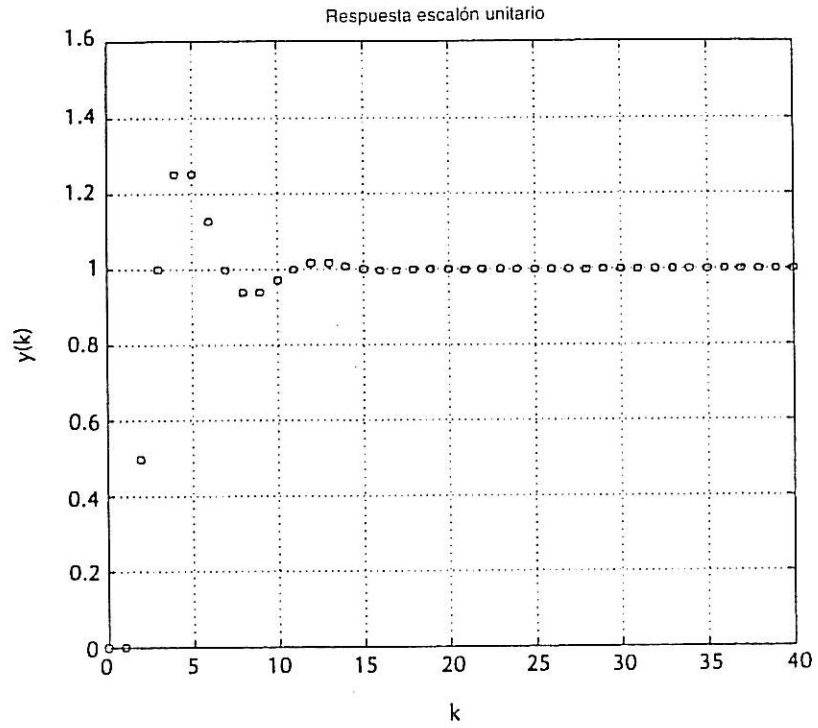


Figura 6-4 Respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la figura 6-3*b*).

6-6 OBSERVADORES DE ESTADO

En la sección 6-5 analizamos un método para el diseño de la ubicación de polos, que utiliza la realimentación de todas las variables de estado, con el fin de formar el vector de control deseado. En la práctica, sin embargo, no todas las variables de estado están disponibles para la medición directa. En muchos casos prácticos, sólo son medibles unas cuantas variables de estado de un sistema dado, mientras que las demás no lo son. Puede ser, por ejemplo, que sólo las variables de salida son

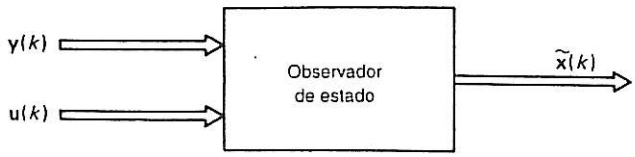


Figura 6-5 Diagrama esquemático del observador de estados.

medibles. En este caso, será necesario estimar aquellas variables de estado que no puedan medirse directamente. Esa estimación suele llamarse *observación*. En un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y las de control.

Un *observador de estados*, también conocido como *estimador de estados*, es un subsistema del sistema de control que lleva a cabo una estimación de las variables de estado, a partir de las mediciones de las variables de salida y control. Aquí, el concepto de observabilidad analizado en la sección 6-3 juega un papel importante. Como veremos más adelante, se pueden diseñar observadores de estados si, y sólo si, se satisface la condición de observabilidad.

En los análisis siguientes de los observadores de estado, utilizaremos la notación $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ para designar el vector estado observado. En muchos casos, este vector $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se utiliza en la realimentación del estado para generar el vector de control óptimo. En la figura 6-5 se muestra un esquema de un observador de estados. El observador de estado tendrá $y(k)$ y $\mathbf{u}(k)$ como entradas, y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como salida.

A continuación analizaremos, primero, la condición necesaria y suficiente para la observación del estado, y después estudiaremos el observador de *estados de orden completo*. La observación del estado de orden completo significa que observamos (estimamos) las n variables de estado, sin importar si algunas variables de estado están disponibles para la medición directa. A veces, cuando sólo necesitamos la observación de las variables de estado no medibles, pero no de aquellas directamente medibles, esto resulta innecesario. La observación de sólo las variables de estado no medibles se conoce como observación de estado de *orden reducido*, y se analizará más adelante en esta sección. La observación de las variables de estado no medibles, además de algunas (no todas) las variables de estado medibles, se conoce como *observación de estado de orden reducido*.

Condición necesaria y suficiente para la observación del estado. La figura 6-6 muestra un sistema de regulación con un observador de estados. Analizaremos una condición necesaria y suficiente, según la cual puede observarse (estimarse) el vector estado. De la figura 6-6 obtenemos las ecuaciones de estado y de salida como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6-79}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6-80}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)

$\mathbf{y}(k)$ = vector de salida (de dimensión m)

$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

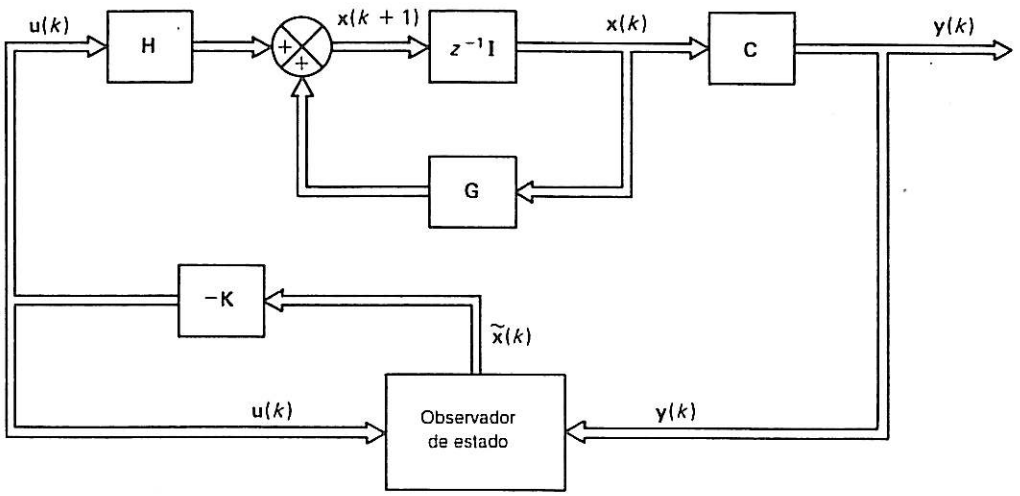


Figura 6-6 Sistema de regulación, con un observador de estados.

A fin de poder observar (estimar) las variables de estado, debemos ser capaces de obtener $\mathbf{x}(k+1)$ en términos de $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{y}(k-1), \ldots, \mathbf{y}(k-n+1)$, y $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}(k-1), \ldots, \mathbf{u}(k-n+1)$. De la ecuación (6-79),

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

es decir,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6-81}$$

Desplazando k en 1, obtenemos

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \tag{6-82}$$

Sustituyendo la ecuación (6-81) en la ecuación (6-82) resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k-1) &= \mathbf{G}^{-1}[\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)] - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)\end{aligned}$$

En forma similar,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k-2) &= \mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &= \mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k-n+1) &= \mathbf{G}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad - \cdots - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-n+1)\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (6-81) en la ecuación (6-80), obtenemos

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

Asimismo,

$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{y}(k-2) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-2) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}(k-n+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-n+1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \cdots - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-n+1)$$

Si combinamos las n ecuaciones anteriores en una ecuación matricial, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) - \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-n+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix} \tag{6-83}$$

Observe que el segundo miembro de la ecuación (6-83) es totalmente conocido. Por lo tanto, $\mathbf{x}(k+1)$ puede determinarse si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix} = n \tag{6-84}$$

Dado que la matriz $\mathbf{G}$ es no singular, multiplicar por $\mathbf{G}^n$ cada uno de los renglones del primer miembro de la ecuación (6-84) no cambia la condición de rango. Por lo tanto, la ecuación (6-84) es equivalente a

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n$$

que también equivalen a

$$\text{rango } [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \quad \cdots \quad (\mathbf{G}^*)^{n-1}\,\mathbf{C}^*] = n \tag{6-85}$$

Es claro que ésta es la condición de observabilidad completa del sistema definido por las ecuaciones (6-79) y (6-80). [Refiérase a la ecuación (6-17).] Esto significa que si se satisface la ecuación (6-85) (es decir, si el sistema es completamente observable), entonces se puede determinar $\mathbf{x}(k+1)$ a partir de $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{y}(k-1), \ldots, \mathbf{y}(k-n+1)$ y $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}(k-1), \ldots, \mathbf{u}(k-n+1)$. Por lo tanto, hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para la observación del estado es que el sistema sea completamente observable.

Como caso especial, si $y(k)$ es un escalar y la matriz $\mathbf{C}$ es una de $1 \times n$, entonces se puede obtener $\mathbf{x}(k+1)$ premultiplicando ambos miembros de la ecuación (6-83) por el inverso de la matriz dada en la ecuación (6-84), como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) = {} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n}\mathbf{H} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-n+1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-n+1) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6-86}$$

La ecuación (6-86) proporciona el valor $\mathbf{x}(k+1)$ cuando $y(k)$ es un escalar.

Como quedó demostrado en el análisis anterior, el estado $\mathbf{x}(k+1)$ puede determinarse a partir de la ecuación (6-83), siempre que el sistema sea completamente observable. Por lo tanto, para un sistema de esta clase, el vector de estado puede determinarse en n períodos de muestreo como máximo. En presencia de perturbaciones externas y ruido en la medición, sin embargo, este método puede no ofrecer una determinación precisa del vector de estado. Por ello, para determinar el vector de estado, en presencia de perturbaciones y ruido en la medición, es necesario un enfoque distinto. Asimismo, si la matriz $\mathbf{C}$ no es una de $1 \times n$ sino una de $m \times n$ (con $m > 1$), no puede definirse la inversa de la matriz de la ecuación (6-84), y la ecuación (6-86) no es aplicable. Con el fin de resolver estos casos, un método muy poderoso para la estimación del vector de estado es utilizar un modelo dinámico del sistema original, como sigue:

Considere el sistema de control definido por las ecuaciones (6-79) y (6-80). Supongamos que el estado $\mathbf{x}(k)$ debe aproximarse al estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ del modelo dinámico:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6-87}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{6-88}$$

donde las matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{C}$ son las mismas que las del sistema original. Asimismo, supongamos que el modelo dinámico está sujeto a la misma señal de control $\mathbf{u}(k)$ que el modelo original. Si las condiciones iniciales para el sistema real definido por las ecuaciones (6-79) y (6-80), y para el modelo dinámico definido por las ecuaciones (6-87) y (6-88), son las mismas, entonces el estado

$\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y el estado $\mathbf{x}(k)$ serán iguales. Si las condiciones iniciales son distintas, entonces el estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y el estado $\mathbf{x}(k)$ serán distintos.

No obstante, si la matriz $\mathbf{G}$ es una matriz estable, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se acercará a $\mathbf{x}(k)$, aun en el caso, que veremos, en que las condiciones iniciales sean diferentes. Si identificamos la diferencia entre $\mathbf{x}(k)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como $\mathbf{e}(k)$, o definimos

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

entonces al sustraer la ecuación (6-87) de la ecuación (6-79), obtenemos

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

es decir,

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{e}(k)$$

Si la matriz $\mathbf{G}$ es estable, entonces $\mathbf{e}(k)$ se acercará a cero y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ a $\mathbf{x}(k)$. Sin embargo, el comportamiento del vector de error, que sólo depende de la matriz $\mathbf{G}$, puede no ser aceptable. Asimismo, si la matriz $\mathbf{G}$ no es una matriz estable, entonces el error $\mathbf{e}(k)$ no se acercará a cero. Es, por lo tanto, deseable modificar el modelo dinámico definido por las ecuaciones (6-87) y (6-88).

Debe mencionarse que a pesar de que el estado $\mathbf{x}(k)$ puede no ser medible, la salida $\mathbf{y}(k)$ si lo es El modelo dinámico definido por las ecuaciones (6-87) y (6-88) no utiliza la salida medida $\mathbf{y}(k)$. El desempeño del modelo dinámico puede mejorar si se utiliza la diferencia entre la salida medida $\mathbf{y}(k)$ y la salida estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ para vigilar o monitorear el estado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$; es decir, si el modelo dinámico de la ecuación (6-87) se modifica de la forma siguiente:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

donde la matriz $\boldsymbol{K}_e$ sirve como matriz de ponderación. (Esto significa que la dinámica del observador de estados que se mostró en la figura 6-6 debe estar dada por esta última ecuación.) En presencia de discrepancias entre las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ utilizadas en el modelo y las del sistema real, la adición de la diferencia entre la salida medida y la salida estimada ayudará a reducir las diferencias entre el modelo dinámico y el modelo real.

A continuación analizaremos detalles del observador cuya dinámica está caracterizada por matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$, y por el término adicional de corrección, formado por la diferencia entre la salida medida y la salida estimada.

Observador de estados de orden completo. El orden del observador de estados que se analizará aquí es el mismo que el correspondiente al sistema. Como ya se indicó, un observador de estados como éste se conoce como observador de estados de orden completo.

En el análisis siguiente supondremos que el estado real $\mathbf{x}(k)$ no puede medirse en forma directa. Si el estado $\mathbf{x}(k)$ debe estimarse, es conveniente que el estado observado o el estado estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ sean tan cercanos al estado real $\mathbf{x}(k)$ como sea posible. Aunque no es necesario, resulta conveniente que el observador de estados tenga las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ iguales a las del sistema original.

Es importante observar que en el análisis presente, el estado $\mathbf{x}(k)$ no está disponible para la medición directa y, en consecuencia, el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ no puede compararse con el estado

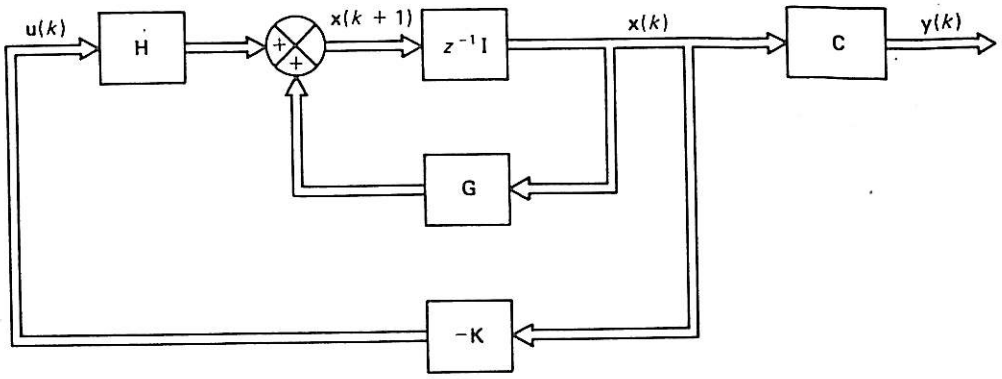


Figura 6-7 Sistema de control con realimentación del estado.

real $\mathbf{x}(k)$. Sin embargo, dado que la salida $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ sí puede medirse, es posible comparar $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ con $\mathbf{y}(k)$.

Considere el sistema de control con realimentación del estado que se muestra en la figura 6-7. Las ecuaciones del sistema son

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6–89}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–90}$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)
$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)
$\mathbf{y}(k)$ = vector de salida (de dimensión m)
$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$
$\mathbf{K}$ = matriz de ganancia de realimentación de estado (matriz de $m \times r$)

Suponemos que el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, pero que $\mathbf{x}(k)$ no está disponible para medición directa. La figura 6-8 muestra un observador de estados incorporado el sistema de la figura 6-7. El estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se utiliza para formar el vector de control $\mathbf{u}(k)$, es decir

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{6-91}$$

De la figura 6-8, tenemos que

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k)] \tag{6-92}$$

donde $\mathbf{K}_e$ es la matriz de ganancia de realimentación del observador (una matriz de $n \times m$). Esta última ecuación puede modificarse y resultar

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \tag{6-93}$$

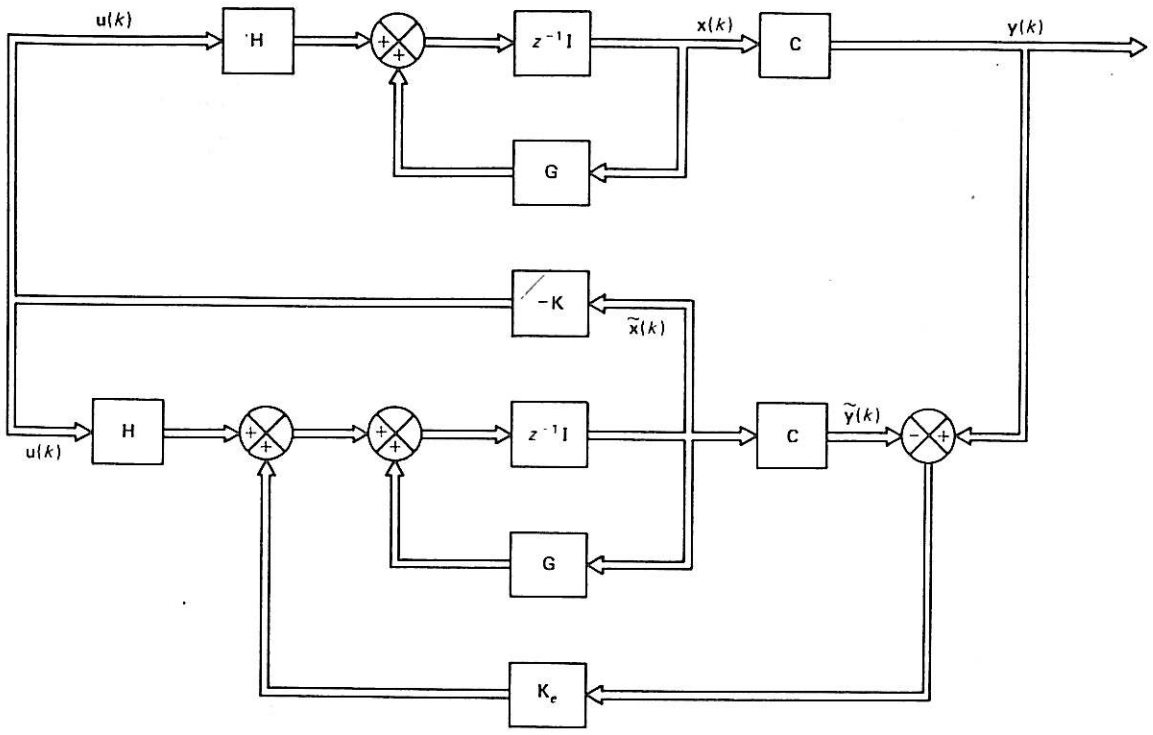


Figura 6-8 Sistema de control con realimentación del estado observado.

El observador de estados dado por la ecuación (6-93) se llama *observador de predicción*, pues el estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ está un período de muestreo adelante de la medición $\mathbf{y}(k)$. Los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}$ suelen conocerse como *polos del observador*.

Dinámica del error de observador de estados de orden completo. Observe que si $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$, entonces la ecuación (6-93) se convierte en

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

que es idéntica a la ecuación de estado del sistema. Por lo tanto, si $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$, la respuesta del sistema de observador de estados es idéntica a la del sistema original.

Para obtener la ecuación de error del observador, restemos la ecuación (6-93) de la ecuación (6-89):

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \qquad (6\text{–}94)$$

Ahora definamos la diferencia entre $\mathbf{x}(k)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ como el error $\mathbf{e}(k)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

La ecuación (6-94) se convierte, entonces, en

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(k) \qquad (6\text{–}95)$$

De la ecuación (6-95) vemos que el comportamiento dinámico de la señal de error queda determinado por los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Si la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es una matriz estable, el vector de error convergirá a cero para cualquier error inicial $\mathbf{e}(0)$. Es decir, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ convergirá a $\mathbf{x}(k)$ indepen-

dientemente de los valores de $\mathbf{x}(0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(0)$. Si los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ están localizados de forma tal que el comportamiento dinámico del vector de error es adecuadamente rápido, entonces cualquier error tenderá a cero con una velocidad adecuada. Una forma de obtener una respuesta rápida es utilizar una respuesta con oscilaciones muertas. Esto puede obtenerse si a todos los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ se les da un valor igual a cero

Comentarios. Dado que el sistema definido por las ecuaciones (6-89) y (6-90) se supone completamente observable, es posible una ubicación arbitraria de los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Para explicar esto más ampliamente, observe que son iguales los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ y los de $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*$. Mediante el principio de dualidad presentado en la sección (6-3), la condición para la observabilidad completa del sistema definido por las ecuaciones (6-89) y (6-90) es la misma que la condición para la controlabilidad completa del estado para el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}^*\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^*\mathbf{u}(k) \tag{6-96}$$

En la sección 6-5 vimos que la ubicación arbitraria de los polos es posible para el sistema de la ecuación (6-96), siempre y cuando sea de estado completamente controlable, o el rango de la matriz

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n. [Ésta es la condición para la observabilidad completa del sistema definido por las ecuaciones (6-89) y (6-90).] Para el sistema definido por la ecuación (6-96), mediante la selección de un conjunto de n valores característicos deseados de $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$, puede determinarse la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$. La matriz deseada, $\mathbf{K}_e$, tal que los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ son los mismos que los de $\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$, está relacionada con la matriz $\mathbf{K}$ mediante la ecuación $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$.

Ejemplo 6-9

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo, suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la mostrada en la figura 6-8. Los valores característicos deseados para la matriz de observador son

$$z = 0.5 + j0.5, \qquad z = 0.5 - j0.5$$

y por lo tanto la ecuación característica que se requiere es

$$(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$$

Dado que la configuración del observador de estados está especificada como se muestra en la figura 6-8, el diseño del observador de estados se reduce a la determinación de una matriz de ganancia de realimentación de observador $\mathbf{K}_e$ apropiada. Antes de continuar, examinemos la matriz de observabilidad. El rango de

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2. Por ello, el sistema es completamente observable y es posible determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador deseada.

Refiriéndonos a la ecuación (6-95),

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(k)$$

donde

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Identifiquemos la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación característica se convierte en

$$\left| z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}[0 \quad 1] \right| = \begin{vmatrix} z & 0.16 + k_1 \\ -1 & z + 1 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduce a

$$z^2 + (1 + k_2)z + k_1 + 0.16 = 0 \tag{6–97}$$

Dado que la ecuación característica deseada es

$$z^2 - z + 0.5 = 0$$

al comparar la ecuación (6-97) con esta última, obtenemos

$$k_1 = 0.34, \qquad k_2 = -2$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Observe que existe una relación dual entre la ecuación de estado del sistema considerado en el ejemplo 6-6 y la del sistema presente. La matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ obtenida en el ejemplo 6-6 es $\mathbf{K} = [0.34 \quad 2]$. La matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ obtenida aquí se relaciona con la matriz $\mathbf{K}$ mediante la relación $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$.

Diseño de los observadores de predicción. Hasta ahora hemos discutido los observadores de predicción de orden completo. Se trata de observadores de predicción porque el estimado $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ está un período de muestreo delante de la medición $\mathbf{y}(k)$. Resolvimos un problema de ejemplo sencillo, suponiendo una matriz $\mathbf{K}_e$ que determinaba que la ecuación característica $|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$ tuviera valores característicos prescritos. A continuación analizaremos un método más general para determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$.

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6–98}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–99}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)
$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)
$y(k)$ = señal de salida (escalar)
$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz de $1 \times n$

El sistema se supone de estado completamente controlable y completamente observable. Por lo tanto, la inversa de

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

existe. Asimismo, suponemos que la ley de control a utilizar es

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ es el estado observado y $\mathbf{K}$ es una matriz de $n \times r$. Supongamos, además, que la configuración del sistema es la misma que la mostrada en la figura 6-8.

La dinámica del observador de estados está dada por la ecuación

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e[y(k) - \tilde{y}(k)] \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{6-100}$$

Primero definimos

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \tag{6-101}$$

donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] \tag{6-102}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-103}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ son los coeficientes de la ecuación característica de la ecuación de estado original dada por la ecuación (6-98),

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

A continuación, definamos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\xi(k) \tag{6–104}$$

donde $\xi(k)$ es un vector de dimensión n. Utilizando la ecuación (6-104), las ecuaciones (6-98) y (6-99) podrán modificarse a la forma

$$\xi(k+1) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q}\xi(k) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}u(k) \tag{6-105}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{Q}\xi(k) \tag{6-106}$$

donde

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6–107}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{6–108}$$

[Refiérase al problema A-6-9 para la deducción de las ecuaciones (6-107) y (6-108).]

Ahora, se define

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{Q}\tilde{\xi}(k) \tag{6-109}$$

Sustituyendo la ecuación (6-109) en la ecuación (6-100), tenemos que

$$\tilde{\xi}(k+1) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}\tilde{\xi}(k) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}u(k) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q}\xi(k) \tag{6–110}$$

Sustrayendo la ecuación (6-110) de la ecuación (6-105), obtenemos

$$\xi(k+1) - \tilde{\xi}(k+1) = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q})[\xi(k) - \tilde{\xi}(k)] \tag{6–111}$$

Definamos

$$\mathbf{e}(k) = \xi(k) - \tilde{\xi}(k)$$

Entonces, la ecuación (6-111) se convierte en

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}\mathbf{e}(k) \tag{6–112}$$

Es necesario que la dinámica de error sea estable y que $\mathbf{e}(k)$ llegue a cero con velocidad suficiente. El procedimiento para la determinación de la matriz $\mathbf{K}_e$ será, primero, seleccionar los polos de observador deseados (los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$) y, a continuación, determinar la matriz $\mathbf{K}_e$ de manera que se dé los polos deseados. Si requerimos que $\mathbf{e}(k)$ llegue a cero tan pronto como sea posible, entonces se necesita que la respuesta del error tenga oscilaciones muertas, por lo que debemos seleccionar todos los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ como cero.

Observe que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-2} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Dado que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e$ es un vector de dimensión n, podemos escribir

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} \tag{6-113}$$

A continuación, refiriéndonos a la ecuación (6-108), tenemos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n - \delta_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} - \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 - \delta_1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{Q}| = 0$$

se convierte en

$$\begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n + \delta_n \\ -1 & z & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} + \delta_{n-1} \\ 0 & -1 & z & \cdots & 0 & a_{n-2} + \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & z + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$z^n + (a_1 + \delta_1)z^{n-1} + (a_2 + \delta_2)z^{n-2} + \cdots + (a_n + \delta_n) = 0 \tag{6-114}$$

Es fácil apreciar que cada uno de los $\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots, \delta_1$ está asociado sólo a uno de los coeficientes de la ecuación característica.

Suponga que la ecuación característica deseada para la dinámica de error es

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0 \tag{6-115}$$

Observe que los valores característicos deseados μ_i (es decir, las localizaciones de los polos en lazo cerrado deseados) determinan la velocidad con la que el estado observado converge al estado real de la planta. Comparando los coeficientes de las potencias iguales de z en las ecuaciones (6-114) y (6-115), obtenemos

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

de la cual obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \alpha_1 - a_1\\ \delta_2 &= \alpha_2 - a_2\\ &\vdots\\ \delta_n &= \alpha_n - a_n\end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación (6-113),

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}\delta_n\\ \delta_{n-1}\\ \vdots\\ \delta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_n - a_n\\ \alpha_{n-1} - a_{n-1}\\ \vdots\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} \tag{6-116}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\alpha_n - a_n\\ \alpha_{n-1} - a_{n-1}\\ \vdots\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_n - a_n\\ \alpha_{n-1} - a_{n-1}\\ \vdots\\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} \tag{6-117}$$

La ecuación (6-117) especifica la matriz de ganancia de realimentación necesaria $\mathbf{K}_e$. La figura 6-9 muestra una representación alterna del sistema de control con realimentación del estado observado.

Una vez seleccionados los valores característicos deseados (o la ecuación característica que se desea), es posible designar el observador mediante un método similar al utilizado en el caso del

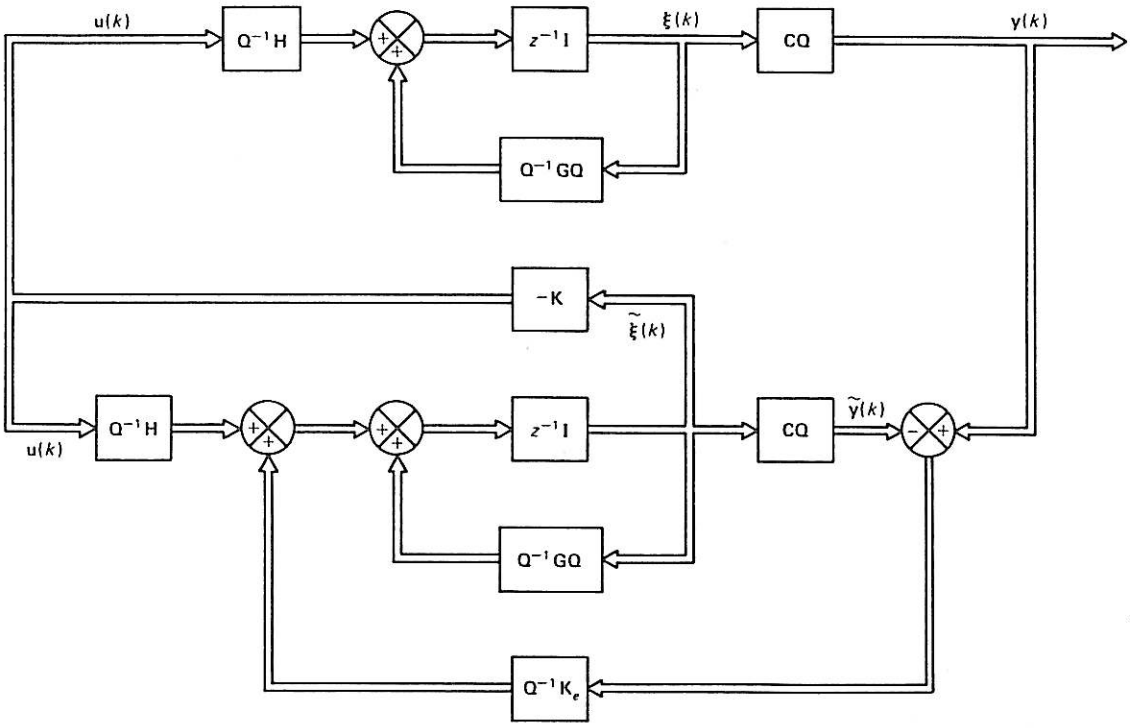


Figura 6-9 Representación alterna del sistema de control con realimentación del estado observado.

problema de ubicación de polos. La ecuación característica deseada puede seleccionarse de tal forma que el observador responda por lo menos cuatro o cinco veces más aprisa que en el sistema en lazo cerrado; en algunas aplicaciones puede desearse una respuesta con oscilaciones muertas.

Si queremos tener una respuesta con oscilaciones muertas, la ecuación característica deseada se convierte en

$$z^n = 0 \tag{6–118}$$

Comparando la ecuación (6-114) con la ecuación (6-118), requerimos que

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= 0 \\ a_2 + \delta_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para la respuesta

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} -a_n \\ -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \end{bmatrix} \tag{6–119}$$

Fórmula de Ackermann. La expresión dada por la ecuación (6-117) no es la única disponible para determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$. A continuación, deduciremos la fórmula de Ackermann para la determinación de $\mathbf{K}_e$.

Considere el sistema completamente observable definido por las ecuaciones (6-98) y (6-99). Observe que en este sistema la salida $y(k)$ es un escalar. Refiriéndonos a la ecuación (6-115), la ecuación característica para la dinámica de error es

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{Q}| = 0 \tag{6–120}$$

donde $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $n \times 1$. Definamos

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{K}}_e, \qquad \mathbf{C}\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{C}}$$

Entonces la ecuación (6-120) se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{K}}_e\hat{\mathbf{C}}| = 0$$

En el diseño del observador, determinamos la matriz $\hat{\mathbf{K}}_e$ de tal forma que su última ecuación característica sea idéntica a la ecuación característica deseada para el vector de error; ésta es

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \tag{6–121}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{K}}_e\hat{\mathbf{C}}| &= (z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son los valores característicos de la matriz $(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{K}}_e \hat{\mathbf{C}})$. Para sistemas físicos, los valores característicos complejos siempre aparecen en pares complejos conjugados. En el análisis presente, supondremos que todos los valores característicos complejos se presentan en pares complejos conjugados, de tal forma que son reales los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la ecuación característica. De este modo, la ecuación característica para la matriz $(\hat{\mathbf{G}}^* - \hat{\mathbf{C}}^* \hat{\mathbf{K}}_e^*)$ puede estar dada por

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}^* + \hat{\mathbf{C}}^*\hat{\mathbf{K}}_e^*| = (z - \overline{\mu}_1)(z - \overline{\mu}_2)\cdots(z - \overline{\mu}_n)$$
$$= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

donde $\overline{\mu}_i$ es la conjugada compleja de μ_i.

En la sección 6-5 deducimos la fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$, para el problema de diseño de la ubicación de polos. Ahí determinamos la matriz $\mathbf{K}$, de tal forma que la ecuación característica

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = 0$$

sería la misma que la ecuación característica deseada, ecuación (6-121). Aquí, en el problema de diseño del observador, deseamos determinar la matriz $\mathbf{K}_e^*$, de tal forma que la ecuación característica

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}^* + \hat{\mathbf{C}}^*\hat{\mathbf{K}}_e^*| = 0$$

sea la misma que la ecuación característica requerida dada por la ecuación (6-121). Es claro que estos dos problemas son uno dual (es decir, matemáticamente la determinación de la matriz $\hat{\mathbf{K}}_e$ es igual a la determinación de la matriz de ganancia de realimentación $\hat{\mathbf{K}}$ del problema de la ubicación de polos). Por lo tanto, es posible utilizar los resultados obtenidos en la sección 6-5 con respecto a la determinación de la matriz $\mathbf{K}_e$ para el problema actual, como se demostrará.

En el problema del diseño de la ubicación de polos analizado en la sección 6-5, para la ecuación del sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

con realimentación del estado

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

la matriz deseada $\mathbf{K}$ se obtuvo según la ecuación (6-68), que se repite aquí:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]^{-1} \phi(\mathbf{G}) \qquad (6\text{–}122)$$

En este caso, en el problema del diseño del observador, para la ecuación de estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}^*\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{C}}^*u(k)$$

con realimentación del estado

$$u(k) = -\hat{\mathbf{K}}_e^*\,\mathbf{x}(k)$$

la matriz deseada $\mathbf{K}_e^*$ puede, por lo tanto, obtenerse de manera similar a la ecuación (6-122), como sigue:

$$\hat{\mathbf{K}}_e^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\hat{\mathbf{C}}^* \vdots \hat{\mathbf{G}}^*\hat{\mathbf{C}}^* \vdots \cdots \vdots (\hat{\mathbf{G}}^*)^{n-1}\hat{\mathbf{C}}^*]^{-1} \phi(\hat{\mathbf{G}}^*) \qquad (6\text{–}123)$$

que puede modificarse a

$$\hat{\mathbf{K}}_e^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]^{-1}(\mathbf{Q}^*)^{-1}\phi(\hat{\mathbf{G}}^*)$$

Si tomamos la transpuesta conjugada de ambos miembros de esta última ecuación, tenemos que

$$\hat{\mathbf{K}}_e = [\phi(\hat{\mathbf{G}}^*)]^*\mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \vdots\\ \mathbf{CG}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Si

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{K}}_e$$

obtenemos

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\phi(\hat{\mathbf{G}})\mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \vdots\\ \mathbf{CG}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{6-124}$$

Observe que, dado que $\hat{}\mathbf{G} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{GQ}$,

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{G}}^k\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{G}^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\phi(\hat{\mathbf{G}})\mathbf{Q}^{-1} &= \mathbf{Q}[\hat{\mathbf{G}}^n + \alpha_1\hat{\mathbf{G}}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\hat{\mathbf{G}} + \alpha_n\mathbf{I}]\mathbf{Q}^{-1}\\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{G}}^n\mathbf{Q}^{-1} + \alpha_1\mathbf{Q}\hat{\mathbf{G}}^{n-1}\mathbf{Q}^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{Q}^{-1} + \alpha_n\mathbf{I}\\ &= \mathbf{G}^n + \alpha_1\mathbf{G}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{G} + \alpha_n\mathbf{I} = \phi(\mathbf{G})\end{aligned} \tag{6-125}$$

Utilizando la ecuación (6-125), la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ requerida, dada por la ecuación (6-124), puede escribirse de nuevo en la forma:

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G})\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \vdots\\ \mathbf{CG}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{6-126}$$

donde $\phi(\mathbf{G})$ es el polinomio característico deseado de la dinámica de error. La expresión para $\mathbf{K}_e$ dada por la ecuación (6-126) suele llamarse fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$.

Resumen. El observador de predicción de orden completo está dado por la ecuación (6-92):

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Hu}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k)$$

La realimentación del estado observado es

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Si esta última ecuación se sustituye en la ecuación del observador, obtenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{HK})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k)$$

Esta ecuación define el observador de predicción de orden completo, cuando se incorpora el control con realimentación del estado observado.

Como en el caso de los cuatro métodos para el diseño de la ubicación de polos, por lo regular disponibles para determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ para el sistema completamente observable, se pueden resumir como sigue:

1. Si nos referimos a la ecuación (6-117), la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ puede estar dada por

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \tag{6-127}$$

donde las matrices $\mathbf{N}$ y $\mathbf{W}$ están dadas por las ecuaciones (6-102) y (6-103), respectivamente. Las α_i son los coeficientes de la ecuación característica deseada

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

y las α_i son coeficientes de la ecuación característica de la ecuación de estado original

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Observe que si el sistema ya tiene una forma canónica observable, entonces la matriz $\mathbf{K}_e$ puede determinarse con facilidad, pues la matriz $\mathbf{WN}^*$ se convierte en una matriz identidad, y por lo tanto, $(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \mathbf{I}$.

2. La matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ puede estar dada por la fórmula de Ackermann, dada, a su vez, por la ecuación (6-126):

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G})\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6-128}$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^n + \alpha_1 \mathbf{G}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{G} + \alpha_n \mathbf{I}$$

3. Si los valores característicos deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ son distintos, entonces la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ puede estar expresada por la ecuación

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6-129}$$

donde las $\boldsymbol{\eta}_i$ se definen como sigue:

$$\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mu_i \mathbf{I})^{-1}$$

Observe que los $\boldsymbol{\eta}_i$ son los vectores característicos de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*$.

En el caso especial en que se desee que el vector de error exhiba una respuesta con

oscilaciones muertas, de tal forma que $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$, la ecuación (6-129) puede simplificarse. La ecuación siguiente dará la matriz $\mathbf{K}_e$ para el caso de la respuesta con oscilaciones muertas:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-130}$$

donde las η_i están dadas por la ecuación

$$\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

[Para detalles de la deducción de las ecuaciones (6-129) y (6-130), vea los problemas A-6-12 y A-6-13.]

4. Si el orden del sistema es bajo, suponga una matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ con elementos desconocidos. Entonces los elementos de la matriz $\mathbf{K}_e$ pueden determinarse igualando los coeficientes con potencias iguales de z de

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}|$$

y del polinomio característico requerido, que está dado por

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$

donde las μ_i son los valores característicos deseados de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$.

Ejemplo 6-10

Considere el sistema del doble integrador dado por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

y T es el período de muestreo. (Vea el problema A-5-16 para la deducción de las ecuaciones en el espacio de estados en tiempo discreto correspondientes al sistema del doble integrador.) Suponga que la configuración del observador es la misma que la mostrada en la figura 6-8, para diseñar un observador de estados para este sistema. Se desea que el vector de error exhiba una respuesta con oscilaciones muertas. Utilice los cuatro métodos distintos, listados en el análisis anterior.

Primero, verifique la condición de observabilidad. Observe que el rango de

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

es 2. Por lo tanto, el sistema es completamente observable. A continuación examinamos la ecuación característica del sistema:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{vmatrix} = z^2 - 2z + 1 = 0$$

Comparando esta ecuación característica con

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

obtenemos

$$a_1 = -2, \qquad a_2 = 1$$

En vista de que se desea una respuesta con oscilaciones muertas, la ecuación característica deseada para la dinámica del error es

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0$$

Método 1. Refiriéndonos a la ecuación (6-127), tenemos que

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1\end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix}-1 \\ 2\end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{N}$ y $\mathbf{W}$, definidas por las ecuaciones (6-102) y (6-103), respectivamente, son

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & T\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}a_1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \left\{\begin{bmatrix}-2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 1 & T\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}-1 \\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \\ \frac{1}{T}\end{bmatrix}$$

Método 2. De la ecuación (6-128), la fórmula de Ackermann, $\mathbf{K}_e$, está dada por

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G})\begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CG}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 + \alpha_1\mathbf{G} + \alpha_2\mathbf{I} = \mathbf{G}^2$$

Por lo tanto, la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}1 & T \\ 0 & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 1 & T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2T \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\frac{1}{T} & \frac{1}{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \\ \frac{1}{T}\end{bmatrix}$$

Método 3. Puesto que se desea una respuesta con oscilaciones muertas, de la ecuación (6-130) tenemos

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

donde

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{CG}^{-1}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{CG}^{-2}$$

Observe que

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores η_1 y η_2 se obtienen como sigue:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -T]$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & -2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -2T]$$

Por lo tanto, la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 1 & -2T \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

Método 4. Suponemos que

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

y expandimos la ecuación característica como sigue:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = \left|z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}[1 \quad 0]\right|$$

$$= \begin{vmatrix} z - 1 + k_1 & -T \\ k_2 & z - 1 \end{vmatrix} = z^2 + (k_1 - 2)z + 1 - k_1 + k_2 T = 0$$

Dado que deseamos una respuesta con oscilaciones muertas, esta ecuación característica debe ser igual a

$$z^2 = 0$$

De modo que,

$$k_1 = 2, \qquad k_2 = \frac{1}{T}$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/T \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que el vector de error se reduce a cero cuando mucho en dos períodos de muestreo. Observe que la matriz de coeficientes para la ecuación de error se convierte en

$$\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}[1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -\frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix}$$

Si el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ está dado por

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

donde a_1 y b_1 son arbitrarias, y $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ se supone que es

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

donde a_2 y b_2 son también arbitrarias, entonces

$$\mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

donde a y b son constantes arbitrarias. Ahora, la ecuación (6-95) se convierte en

$$\begin{bmatrix} e_1(k+1) \\ e_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -\frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Los vectores $\mathbf{e}(1)$ y $\mathbf{e}(2)$ se determinan como sigue:

$$\begin{bmatrix} e_1(1) \\ e_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -\frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + bT \\ -\frac{1}{T}a + b \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} e_1(2) \\ e_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -\frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a + bT \\ -\frac{1}{T}a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bT - a + bT \\ \frac{1}{T}a - b - \frac{1}{T}a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es claro que el vector de error $\mathbf{e}(k)$ se convierte en cero en cuando mucho dos períodos de muestreo. Por lo tanto, la respuesta con oscilaciones muertas. Observe que para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, el vector de estado observado se vuelve idéntico al vector de estado actual en, a lo mucho, dos períodos de muestreo.

Finalmente, la ecuación del observador es

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -\frac{1}{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(kT) + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix} y(k)$$

[Observe que ésta es la ecuación dada por la ecuación (6-93).]

Comentarios sobre la selección de la mejor $\mathbf{K}_e$. Refiérase a la figura 6-8 y observe que la señal de realimentación a través de la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ sirve de señal de corrección al modelo de la planta, con el fin de tomar en cuenta las incógnitas en la misma. Si están involucradas incógnitas significativas, la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debe ser relativamente grande. Sin embargo, si la señal de salida está muy contaminada por perturbaciones y ruido en la medición, la salida $\mathbf{y}(k)$ no será confiable y la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ deberá ser relativamente pequeña. En la determinación de la matriz $\mathbf{K}_e$ (que depende de los valores característicos deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$), se debería examinar cuidadosamente los efectos de las perturbaciones y de ruido implicados en la salida $\mathbf{y}(k)$.

Recuerde que la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ depende de la ecuación característica deseada

$$\phi(z) = (z - \mu_1)(z - \mu_2)\cdots(z - \mu_n) = 0$$

La selección de un conjunto de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ no es única. Por lo tanto, se pueden seleccionar muchas ecuaciones características diferentes como ecuaciones características deseadas. Para cada una de éstas tendremos una matriz $\mathbf{K}_e$ distinta.

En el diseño del observador, es conveniente determinar varias matrices de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ basadas en varias ecuaciones características deseadas distintas. Para cada una de las matrices diferentes $\mathbf{K}_e$, deberán llevarse a cabo pruebas de simulación a fin de evaluar el desempeño resultante del sistema. A continuación seleccionaremos la mejor $\mathbf{K}_e$ desde el

punto de vista del desempeño general del sistema. En muchos casos prácticos, la selección de la mejor matriz $\mathbf{K}_e$ se reduce a un punto intermedio entre una respuesta rápida y la sensibilidad a perturbaciones y ruido.

Efectos de la adición del observador en un sistema en lazo cerrado. En el proceso del diseño de la ubicación de polos, supusimos que el estado verdadero $\mathbf{x}(k)$ estaba disponible para la realimentación. Pero en la práctica, el estado verdadero $\mathbf{x}(k)$ puede no ser medible, por lo que será necesario que utilicemos el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$. Investiguemos ahora los efectos de la utilización del estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, en lugar del estado verdadero $\mathbf{x}(k)$, sobre la ecuación característica de un sistema de control en lazo cerrado.

Considere el sistema de estado completamente controlable y completamente observable, definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

Para el control con realimentación del estado basado en el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, tenemos que

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Con este control, la ecuación de estado se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \qquad (6\text{–}131)$$

La diferencia entre el estado real $\mathbf{x}(k)$ y el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ se ha definido como el error $\mathbf{e}(k)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Sustituyendo el vector de error $\mathbf{e}(k)$, la ecuación (6-131) se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{e}(k) \qquad (6\text{–}132)$$

Observe que la ecuación de error del observador fue dada en la ecuación (6-95), que se repite aquí:

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(k) \qquad (6\text{–}133)$$

Combinando las ecuaciones (6-132) y (6-133), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}$$

Esta ecuación describe la dinámica del sistema de control con realimentación del estado observado.

La ecuación característica para el sistema es

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K} & -\mathbf{H}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}|\,|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0 \qquad (6\text{–}134)$$

Observe que los polos en lazo cerrado del sistema de control con realimentación del estado observado están formados por los polos debidos sólo al diseño de ubicación de polos, además de los polos que se deben sólo al diseño del observador. Esto significa que el diseño de ubicación de polos y el

diseño del observador son independientes uno del otro. Pueden diseñarse por separado y combinarse para formar el sistema de control con realimentación del estado.

Los polos en lazo cerrado que se desea que se generen mediante realimentación del estado (ubicación de polos) se seleccionan en forma tal que el sistema satisfaga los requisitos de desempeño. Los polos del observador por lo general se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema. Una regla práctica es escoger una respuesta de observador por lo menos cuatro a cinco veces más rápida que la respuesta del sistema, o, en algunos casos, escoger todos los polos del observador en el origen (para una respuesta con oscilaciones muertas). En vista de que el observador no es, por lo general, una estructura de hardware, sino un programa de computadora, es posible aumentar la velocidad de respuesta u obtener la respuesta con oscilaciones muertas de forma que el estado observado converja con rapidez al estado verdadero. La velocidad máxima de respuesta del observador queda generalmente limitada sólo por los problemas de ruido y de sensibilidad involucrados en el sistema de control.

Observador actual. En el observador de predicción, se obtiene el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ a partir de mediciones del vector de salida hasta $\mathbf{y}(k-1)$ y del vector de control hasta $\mathbf{u}(k-1)$. Por lo tanto, el vector de control $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k)$ no utiliza la información de la salida actual $\mathbf{y}(k)$. Una formulación diferente del observador de estados consiste en utilizar $\mathbf{y}(k)$ para la estimación de $\tilde{\mathbf{x}}(k)$. Esto se puede llevar a cabo separando el proceso de observación en dos pasos. En el primer paso, determinamos $\mathbf{z}(k+1)$, que es una aproximación de $\mathbf{x}(k+1)$ basada en $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$. En el segundo paso, utilizamos $\mathbf{y}(k+1)$ para mejorar $\mathbf{z}(k+1)$. La $\mathbf{z}(k+1)$ mejorada es $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$. El observador de estado basado en esta formulación se conoce como *observador actual.*

Considere el sistema de estado completamente controlable y completamente observable, definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)
$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)
$\mathbf{y}(k)$ = vector de salida (de dimensión m)
$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

Las ecuaciones del observador actual están dadas por

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) + \mathbf{K}_e[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{z}(k+1)] \tag{6-135}$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6-136}$$

La ecuación (6-136) da la predicción $\mathbf{z}(k+1)$ con base en $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$ en la etapa k. La ecuación (6-135) indica que, midiendo $\mathbf{y}(k+1)$, podemos mejorar $\mathbf{z}(k+1)$ para obtener $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$.

Defina el error de observador $\mathbf{e}(k)$ como sigue:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1)\\ &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \big(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\{\mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)]\\ &\quad - \mathbf{C}[\mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)]\}\big)\\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{G})[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]\\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{G})\mathbf{e}(k)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de error del observador para el observador actual es similar a la del observador de predicción dada por la ecuación (6-95). Sin embargo, en la dinámica de error aparece una diferencia. La matriz $\mathbf{K}_e$ puede obtenerse exactamente como en el caso del observador de predicción, excepto por que la matriz $\mathbf{C}$ queda remplazada por la matriz $\mathbf{CG}$. Para hacer posible que los valores característicos de $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{G})$ se ubiquen en forma arbitraria, el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}\mathbf{G}\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2\\ \vdots\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}\mathbf{G}\\ \vdots\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{G}$$

debe ser n. Observe que si la matriz $\mathbf{G}$ es no singular, entonces esta condición es equivalente a la condición de observabilidad, es decir,

$$\text{rango } [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = n$$

Si el rango de la matriz de observabilidad es n, entonces los valores característicos de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{G}$ pueden ubicarse en forma arbitraria mediante una selección adecuada de $\mathbf{K}_e$, y la matriz $\mathbf{K}_e$ puede determinarse de manera similar a como se hizo en el caso del observador de predicción. En la determinación de la matriz $\mathbf{K}_e$, remplazamos la matriz $\mathbf{C}$ por $\mathbf{CG}$ en los cálculos involucrados. Por ejemplo, si la salida $\mathbf{y}(k)$ es un escalar, la fórmula de Ackermann, como se dio en la ecuación (6-126), se modifica a la forma correspondiente:

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G})\begin{bmatrix}\mathbf{C}\mathbf{G}\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2\\ \vdots\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\\ \mathbf{C}\mathbf{G}^n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{6-137}$$

Sin embargo, si la matriz $\mathbf{G}$ es singular, entonces el rango de

$$[\mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^n\mathbf{C}^*]$$

es q, que es menor que n. En este caso, escribamos

$$(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\mathbf{G})^* = \mathbf{G}^* - \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^* = \mathbf{G}^* - \mathbf{B}\mathbf{K}_e^*$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*$. Observe que la matriz $(\mathbf{G}^* - \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}_e^*)$ tiene la misma forma que la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})$, que jugó un papel importante en el diseño de la ubicación de polos.

Con un análisis similar al dado en la sección 6-5 [refiérase a las ecuaciones (6-55) y (6-57)], es posible utilizar una matriz de transformación adecuada para transformar las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{B}$ en $\hat{\mathbf{G}}^*$ y $\hat{\mathbf{B}}$, donde

$$\hat{\mathbf{G}}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}^*\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11}^* & \mathbf{G}_{12}^* \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^* \end{array}\right], \qquad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

y donde todos los valores característicos de la matriz $\mathbf{G}_{22}^*$ no controlable de $(n-q) \times (n-q)$ se puedan hacer cero. (Por lo tanto, se puede estabilizar el sistema.) A continuación, defina

$$\mathbf{K}_e^* \mathbf{T} = \hat{\mathbf{K}}_e^* = [\hat{\mathbf{K}}_{e11}^* \vdots \hat{\mathbf{K}}_{e12}^*]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}^* - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}_e^* &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11}^* & \mathbf{G}_{12}^* \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^* \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right][\hat{\mathbf{K}}_{e11} \vdots \hat{\mathbf{K}}_{e12}^*] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11}^* - \mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{K}}_{e11}^* & \mathbf{G}_{12}^* - \mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{K}}_{e12}^* \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^* \end{array}\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la matriz $\mathbf{G}$ es singular y el rango de la matriz de observabilidad es q, sólo necesitamos especificar q valores característicos de la matriz de $q \times q$ $\mathbf{G}_{11}^* - \mathbf{B}_{11}\mathbf{K}_{e11}^*$.

Observador de orden mínimo. Los observadores analizados hasta ahora están diseñados para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas de las variables de estado pueden medirse con precisión. Estas variables de estado medibles con precisión no necesitan ser estimadas. Un observador que estime menos de n variables de estado, donde n es la dimensión del vector estado, se conoce como *observador de orden reducido*. Si tal observador es el mínimo posible, el se conoce como *observador de orden mínimo*.

Suponga que el vector de estado $\mathbf{x}(k)$ es uno de dimensión n y que el vector de salida $\mathbf{y}(k)$ es de dimensión m, que puede medirse. Dado que las variables de salida m son combinaciones lineales de las variables de estado, m variables de estado no necesitan ser estimadas. Sólo necesitamos estimar $n-m$ variables de estado. Entonces, el observador de orden reducido se convierte en un observador de orden $(n-m)$. Un observador de orden $n-m$ como éste, es el observador de orden mínimo. La figura 6-10 muestra el diagrama de bloques de un sistema con un observador de orden mínimo.

Es importante notar, sin embargo, que si la medición de las variables de salida incluyen ruido significativo y son relativamente poco precisas, la utilización de un observador de orden completo puede dar como resultado un mejor desempeño del sistema.

El observador de orden mínimo puede diseñarse dividiendo primero el vector de estado $\mathbf{x}(k)$ en dos partes, como sigue:

$$\mathbf{x}(k) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \mathbf{x}_b(k) \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{x}_a(k)$ es aquella porción del vector de estado que puede medirse en forma directa [por lo tanto, $\mathbf{x}_a(k)$ es un vector de dimensión m] y $\mathbf{x}_b(k)$ es la porción no medible del vector de estado [así que $\mathbf{x}_b(k)$ es un vector de dimensión $(n-m)$]. Luego, las ecuaciones de estado divididas se convierten en:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \hline \mathbf{x}_b(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \hline \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \mathbf{x}_b(k) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_a \\ \hline \mathbf{H}_b \end{array}\right]\mathbf{u}(k) \qquad (6\text{–}138)$$

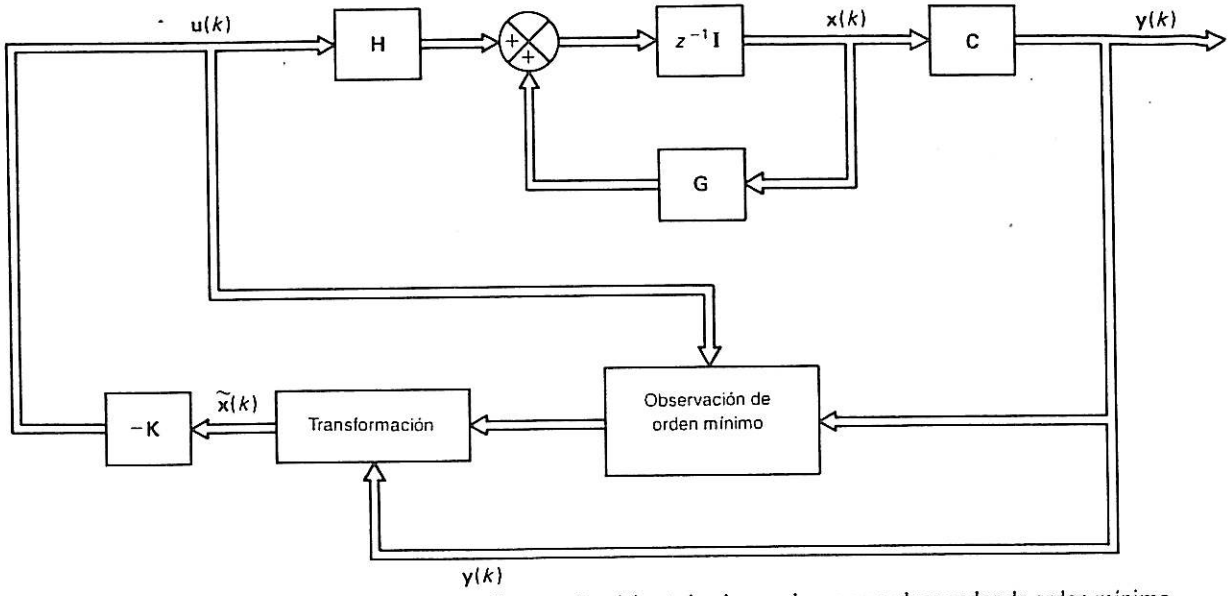


Figura 6-10 Sistema de control de realimentación del estado observado, con un observador de orden mínimo.

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{I} \vdots \mathbf{0}]\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \hline \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \tag{6-139}$$

donde

$$\mathbf{G}_{aa} = \text{matriz de } m \times m$$
$$\mathbf{G}_{ab} = \text{matriz de } m \times (n-m)$$
$$\mathbf{G}_{ba} = \text{matriz de } (n-m) \times m$$
$$\mathbf{G}_{bb} = \text{matriz de } (n-m) \times (n-m)$$
$$\mathbf{H}_a = \text{matriz de } m \times r$$
$$\mathbf{H}_b = \text{matriz de } (n-m) \times r$$

Reescribiendo la ecuación 6-138, la ecuación correspondiente a la porción medible del estado se convierte en

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \mathbf{G}_{aa}\,\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{ab}\,\mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_a\,\mathbf{u}(k)$$

es decir,

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\,\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\,\mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab}\,\mathbf{x}_b(k) \tag{6-140}$$

donde son medibles los términos del primer miembro de la ecuación. La ecuación (6-140) actúa como ecuación de salida. En el diseño del observador de orden mínimo, consideremos el primer miembro de la ecuación (6-140) como una cantidad conocida. De hecho, la ecuación (6-140) relaciona las cantidades medibles con las no medibles del estado.

De la ecuación (6-138), la ecuación de la porción no medible del estado se convierte en

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{G}_{ba}\,\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{G}_{bb}\,\mathbf{x}_b(k) + \mathbf{H}_b\,\mathbf{u}(k) \tag{6-141}$$

La ecuación (6-141) describe la dinámica de la porción no medible del estado. Observe que los términos $\mathbf{G}_{ba}\,\mathbf{x}_a(k)$ y $\mathbf{H}_b\,\mathbf{u}(k)$ son cantidades conocidas.

El diseño del observador de orden mínimo puede facilitarse si utilizamos la técnica de diseño desarrollada para el observador de orden completo. Comparemos la ecuación de estado correspondiente al observador de orden completo, con la correspondiente al observador de orden mínimo. La ecuación de estado para el observador de orden completo es

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

y la "ecuación de estado" para el observador de orden mínimo es

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{G}_{bb}\,\mathbf{x}_b(k) + [\mathbf{G}_{ba}\,\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b\,\mathbf{u}(k)]$$

La ecuación de salida para el observador de orden completo es

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

y la "ecuación de salida" para el observador de orden mínimo es

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\,\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\,\mathbf{u}(k) = \mathbf{G}_{ab}\,\mathbf{x}_b(k)$$

El diseño del observador de orden mínimo se puede llevar a cabo efectuando las sustituciones que se dan en la tabla 6-1 en la ecuación para el observador de orden completo, dada en la ecuación (6-93) y que repetimos aquí:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\,\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\,\mathbf{y}(k) \tag{6-142}$$

Efectuando la sustitución de la tabla 6-1 en la ecuación (6-142), obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) = {} & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\,\mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{G}_{ba}\,\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b\,\mathbf{u}(k) \\ & + \mathbf{K}_e[\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\,\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\,\mathbf{u}(k)]\end{aligned} \tag{6-143}$$

TABLA 6-1 LISTA DE SUSTITUCIONES NECESARIAS PARA ESCRIBIR LA ECUACIÓN DE OBSERVADOR PARA EL OBSERVADOR DE ESTADOS DE ORDEN MÍNIMO

Observador de estados de orden completo	Observador de estados de orden mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}(k)$	$\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$
$\mathbf{G}$	$\mathbf{G}_{bb}$
$\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$	$\mathbf{G}_{ba}\,\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{H}_b\,\mathbf{u}(k)$
$\mathbf{y}(k)$	$\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\,\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\,\mathbf{u}(k)$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{G}_{ab}$
$\mathbf{K}_e$, matriz de $n \times m$	$\mathbf{K}_e$, matriz de $(n-m) \times m$

donde la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ es una de $(n-m) \times m$. La ecuación (6-143) define el observador de orden mínimo.

Refiriéndonos a la ecuación (6-139), tenemos que

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_a(k) \tag{6-144}$$

Sustituyendo la ecuación (6-144) en la ecuación (6-143), obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k+1) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k)\end{aligned} \tag{6-145}$$

Observe que para estimar $\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1)$ se necesita el valor medido de $\mathbf{y}(k+1)$. Esto no es conveniente, por lo que desearíamos algunas modificaciones. [En el caso del observador de orden completo, $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ puede estimarse utilizando la medición $\mathbf{y}(k)$ y no requiere de la medición de $\mathbf{y}(k+1)$. Vea la ecuación (6-93).] Volvamos a escribir la ecuación (6-145) como sigue:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) - \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b(k) + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})[\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k)] + (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{aa})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})[\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k)] + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{aa}]\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k)\end{aligned} \tag{6-146}$$

Definamos

$$\mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{x}_a(k) = \boldsymbol{\eta}(k) \tag{6-147}$$

y

$$\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{y}(k) = \tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{x}_a(k) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \tag{6-148}$$

Entonces, la ecuación (6-146) se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} \\ &\quad - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{aa}]\mathbf{y}(k) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e\mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k)\end{aligned} \tag{6-149}$$

Las ecuaciones (6-148) y (6-149) definen la dinámica del observador de orden mínimo. Observe que para obtener $\eta(k+1)$ no necesitamos el valor medido de $\mathbf{y}(k+1)$.

A continuación obtengamos la ecuación de error del observador. Definamos

$$\mathbf{e}(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \tag{6-150}$$

Rotando la ecuación (6-143) de la ecuación (6-141), se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_b(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb}[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab}\tilde{\mathbf{x}}_b(k) \\ &\quad - \mathbf{K}_e[\mathbf{x}_a(k+1) - \mathbf{G}_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{H}_a\mathbf{u}(k)]\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (6-140) en esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_b(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \mathbf{G}_{bb}[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)] + \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab}\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab}\mathbf{x}_b(k) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab})[\mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)]\end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede dividir en la forma

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{e}(k) \tag{6-151}$$

Ésta es la ecuación de error del observador. Observe que $\mathbf{e}(k)$ es un vector de dimensión $(n-m)$. La dinámica de error puede determinarse como se desee, siguiendo la técnica desarrollada para el observador de orden completo, siempre y cuando el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab}\mathbf{G}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ab}\mathbf{G}_{bb}^{n-m-1} \end{bmatrix}$$

sea $n-m$. (Ésta es la condición de observabilidad completa aplicable al observador de orden mínimo.)

La ecuación característica para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la ecuación (6-151), como sigue:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = 0 \tag{6-152}$$

La matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ puede determinarse a partir de la ecuación (6-152) seleccionando primero las localizaciones de los polos en lazo cerrado deseados para el observador de orden mínimo [esto es, ubicando las raíces de la ecuación característica, ecuación (6-152) en las posiciones deseadas] y, a continuación, mediante el uso del procedimiento desarrollado para el observador de predicción de orden completo.

Si, por ejemplo, la salida $y(k)$ es un escalar, entonces $x_a(k)$ será un escalar, $\mathbf{G}_{ab}$ una matriz de $1 \times (n-1)$, y $\mathbf{G}_{bb}$ una de $(n-1) \times (n-1)$. Para este caso, la fórmula de Ackermann, como se dio en la ecuación (6-126), puede modificarse para obtener

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ab}\mathbf{G}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ab}\mathbf{G}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{G}_{ab}\mathbf{G}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6–153}$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}_{bb}) = \mathbf{G}_{bb}^{n-1} + \alpha_1 \mathbf{G}_{bb}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2}\mathbf{G}_{bb} + \alpha_{n-1}\mathbf{I} \tag{6–154}$$

Resumen. Una vez determinada la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$, que es una de $(n-m) \times m$, se puede definir el observador de orden mínimo, mediante las ecuaciones (6-148) y (6-149):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_b(k) &= \bar{\boldsymbol{\eta}}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) \\ \bar{\boldsymbol{\eta}}(k+1) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\bar{\boldsymbol{\eta}}(k) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}]\mathbf{y}(k) \\ &\quad + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{H}_a)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

En forma equivalente, en términos de $\mathbf{e}(k)$, más que de $\bar{\boldsymbol{\eta}}(k)$, se puede definir el valor de orden mínimo mediante las ecuaciones (6-150) y (6-151):

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k) = \mathbf{x}_b(k) - \mathbf{e}(k) \tag{6–155}$$

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{e}(k) \tag{6–156}$$

Sistema de control con realimentación del estado observado con observador de orden mínimo. Considere el sistema de estado completamente controlable y completamente observable, dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6–157}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–158}$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector de dimensión n, $\mathbf{u}(k)$ es un vector de dimensión r y $\mathbf{y}(k)$ es un vector de dimensión m. Las matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{C}$ están dadas por

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \hline \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{array}\right], \qquad \mathbf{H} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_a \\ \hline \mathbf{H}_b \end{array}\right], \qquad \mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \vdots \mathbf{0}]$$

Considere la combinación de control con realimentación del estado, en la que el estado realimentado está formado por la porción medida del estado y la porción observada (estimada) del mismo, obtenida mediante el observador de orden mínimo. La figura 6-11 muestra el diagrama de bloques correspondiente al sistema. En este sistema el vector de control $\mathbf{u}(k)$ es

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{6–159}$$

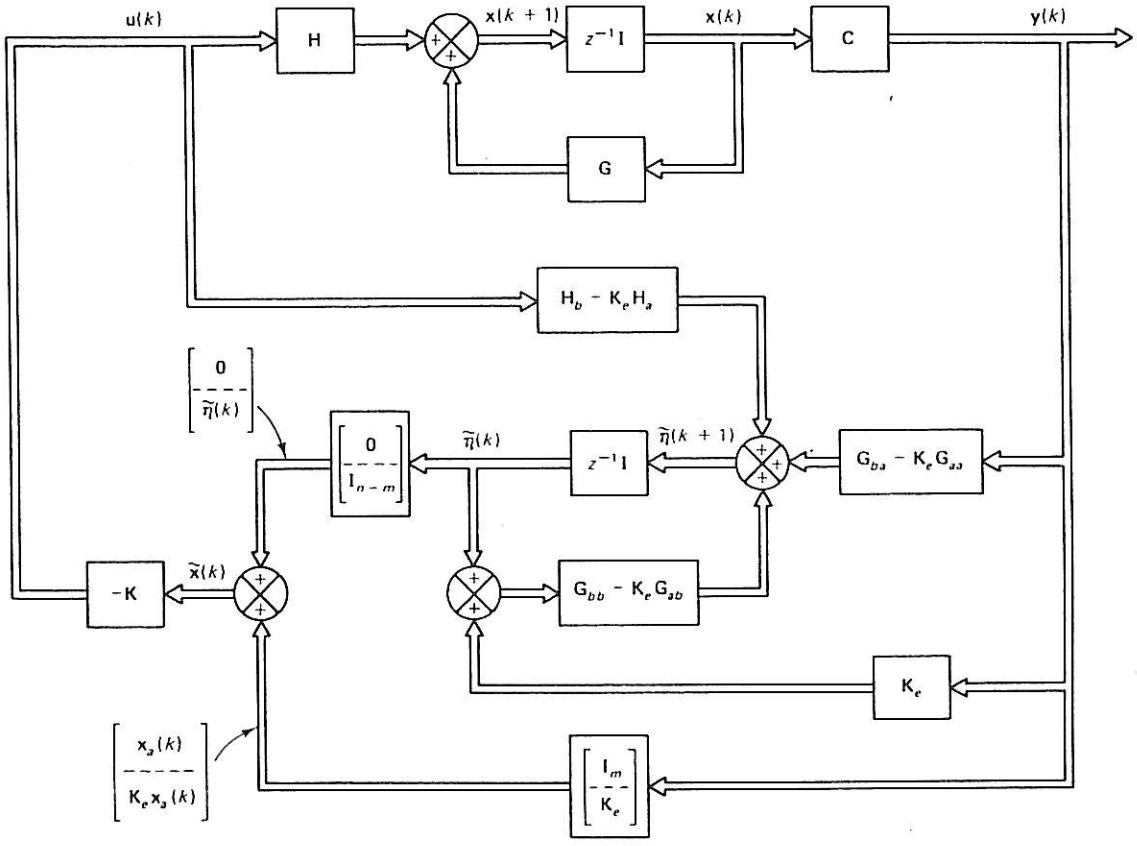


Figura 6-11 Esquema de control con realimentación del estado, en el que el estado realimentado está constiituido por la porción medida del estado y la porción observada del mismo, obtenida mediante el uso del observador de orden mínimo.

donde $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ está formado por el estado medible $\mathbf{x}_a(k)$ y el estado no medible (observado) $\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + \mathbf{K}_e \mathbf{x}_a(k) \end{bmatrix} \tag{6–160}$$

Sustituyendo la ecuación (6-159) en la ecuación (6-157), obtenemos

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}[\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \tag{6–161}$$

Observe que

$$\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}_b(k) - \tilde{\mathbf{x}}_b(k)$. Defina

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}$$

Entonces, utilizando esta matriz Γ, la ecuación (6-161) puede reescribirse como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{e}(k) \tag{6–162}$$

Las ecuaciones (6-162) y (6-156) caracterizan el sistema de control con realimentación del estado, en el que el estado realimentado está constituido por la porción medida del estado, $\mathbf{x}_a(k)$, y la porción observada del estado, $\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$, obtenida mediante la utilización del observador de orden mínimo. Combinando las ecuaciones (6-162) y (6-156), resulta que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \tag{6–163}$$

La ecuación (6-163) caracteriza la dinámica del sistema con realimentación del estado observado, mediante un observador de orden mínimo. La ecuación característica del sistema es

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K} & -\mathbf{H}\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab} \end{vmatrix}$$

$$= |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}|\,|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}| = 0 \tag{6–164}$$

La ecuación (6-164) implica que los polos en lazo cerrado del sistema incluyen los polos en lazo cerrado debidos a la ubicación de polos [los valores característicos de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})$] y los polos en lazo cerrado debidos al observador de orden mínimo [los valores característicos de la matriz $(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})$].

Ejemplo 6-11

Considere el sistema con doble integrador en tiempo discreto definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6–165}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–166}$$

donde el período de muestreo T se supone de 0.2, es decir, $T = 0.2$, y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Utilizando la técnica del diseño de la ubicación de polos, determine la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ tal que los polos en lazo cerrado del sistema queden localizados en

$$z_1 = 0.6 + j0.4, \qquad z_2 = 0.6 - j0.4$$

Suponiendo que la salida $y(k) = x_1(k)$ es la única variable de estado que puede medirse, diseñe un observador de orden mínimo tal que la señal de error exhiba una respuesta con oscilaciones muertas a un error inicial arbitrario. Determine la función de transferencia pulso para el controlador (formado por el control mediante realimentación del estado y el observador de orden mínimo).

Primero examinaremos la controlabilidad y la observabilidad del sistema. Dado que el rango de las matrices

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.06 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

en ambos casos es 2, el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable.

Ahora resolveremos la porción de la ubicación de polos del problema. Dado que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \begin{vmatrix} z - 1 & -0.2 \\ 0 & z - 1 \end{vmatrix} = z^2 - 2z + 1 = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

tenemos que

$$a_1 = -2, \qquad a_2 = 1$$

La ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| &= (z - 0.6 - j0.4)(z - 0.6 + j0.4) = z^2 - 1.2z + 0.52 \\ &= z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1 = -1.2, \qquad \alpha_2 = 0.52$$

De la ecuación (6-65) se obtiene la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$, como sigue:

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} = [-0.48 \quad 0.8]\mathbf{T}^{-1} \tag{6-167}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}]\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.06 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -2.5 \\ 25 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$, dada por la ecuación (6-167), se convierte en

$$\mathbf{K} = [-0.48 \quad 0.8]\begin{bmatrix} 25 & -2.5 \\ 25 & 2.5 \end{bmatrix} = [8 \quad 3.2]$$

La señal de control de realimentación puede entonces estar dada por

$$\begin{aligned} u(k) &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \\ &= -[8 \quad 3.2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = -[8 \quad 3.2]\begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6-168}$$

A continuación, resolveremos la porción de observador del problema. En vista de que el estado $\mathbf{x}(k)$ es un vector 2 y la salida $y(k)$ es un escalar, el observador de orden mínimo es de primer orden. Observe que

$$\left[\begin{array}{c|c} G_{aa} & G_{ab} \\ \hline G_{ba} & G_{bb} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0.2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c} H_a \\ \hline H_b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0.02 \\ \hline 0.2 \end{array}\right]$$

Dado que deseamos una respuesta con oscilaciones requeeri, la ecuación característica requerida para el observador es

$$\phi(z) = z = 0$$

Refiriéndonos a la fórmula de Ackermann, como fue dada por la ecuación (6-153), obtenemos

$$K_e = \phi(G_{bb})[G_{ab}]^{-1}[1] = (1)(0.2)^{-1}(1) = 5$$

Refiriéndonos a la ecuación del observador de orden mínimo, dada por la ecuación (6-149), resulta que

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k+1) &= (G_{bb} - K_e G_{ab})\bar{\eta}(k) + [(G_{bb} - K_e G_{ab})K_e + G_{ba} - K_e G_{aa}]y(k) \\ &\quad + (H_b - K_e H_a)u(k) \\ &= (1 - 5 \times 0.2)\bar{\eta}(k) + [(1 - 5 \times 0.2) \times 5 + 0 - 5 \times 1]y(k) \\ &\quad + (0.2 - 5 \times 0.02)u(k) \end{aligned}$$

que puede simplificarse a la forma

$$\bar{\eta}(k+1) = -5y(k) + 0.1u(k) \tag{6-169}$$

La ecuación (6-169) define el observador de orden mínimo.

El control con realimentación del estado observado $\mathbf{u}(k)$ ahora se da por

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) = -8x_1(k) - 3.2\tilde{x}_2(k) = -8y(k) - 3.2\tilde{x}_2(k) \tag{6-170}$$

donde, refiriéndonos a la ecuación (6-148),

$$\tilde{x}_2(k) = K_e y(k) + \bar{\eta}(k) = 5y(k) + \bar{\eta}(k) \tag{6-171}$$

En la figura 6-12 se muestra el diagrama de bloques del sistema. De las ecuaciones (6-169), (6-170) y (6-171), obtenemos

$$\begin{aligned} u(k+1) &= -8y(k+1) - 3.2[5y(k+1) + \bar{\eta}(k+1)] \\ &= -24y(k+1) + 16y(k) - 0.32u(k) \end{aligned}$$

es decir,

$$u(k+1) + 0.32u(k) = -24y(k+1) + 16y(k)$$

Si tomamos la transformada z de esta última ecuación, y suponemos condiciones iniciales cero, obtenemos

$$zU(z) + 0.32U(z) = -24zY(z) + 16Y(z)$$

La función de transferencia pulso del regulador es

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = 24\left(\frac{z - 0.6667}{z + 0.32}\right) = 24\left(\frac{1 - 0.6667z^{-1}}{1 + 0.32z^{-1}}\right) \tag{6-172}$$

Al referirnos a la ecuación (5-60), la función de transferencia pulso del sistema, definida por las ecuaciones (6-165) y (6-166), puede ser obtenida como sigue:

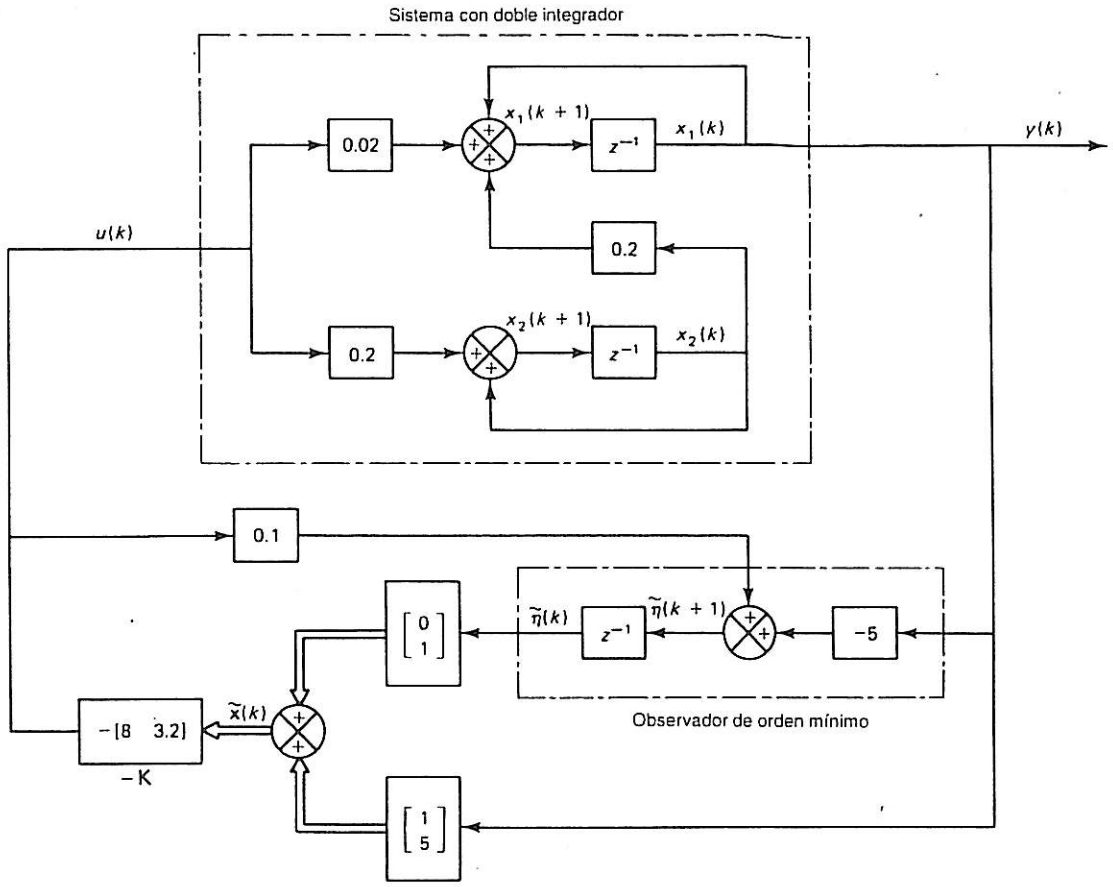


Figura 6-12 Diagrama de bloques del sistema diseñado en el ejemplo 6-11.

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{U(z)} &= G_p(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} \\ &= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z-1 & -0.2 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.02(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{0.02(1+z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\end{aligned} \tag{6-173}$$

Utilizando las funciones de transferencia pulso de las ecuaciones (6-172) y (6-173), el diagrama de bloques de la figura 6-12 puede modificarse a la forma mostrada en la figura 6-13.

Utilizando la forma dada por la ecuación (6-164),

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}||z - G_{bb} + K_e G_{ab}| = 0$$

hemos obtenido la ecuación característica siguiente para el sistema:

$$(z^2 - 1.2z + 0.52)(z - 1 + 5 \times 0.2) = (z^2 - 1.2z + 0.52)z = 0 \tag{6-174}$$

La ecuación característica para el sistema en lazo cerrado, mostrado en la figura 6-13, es

$$1 + G_p(z)G_D(z) = 0$$

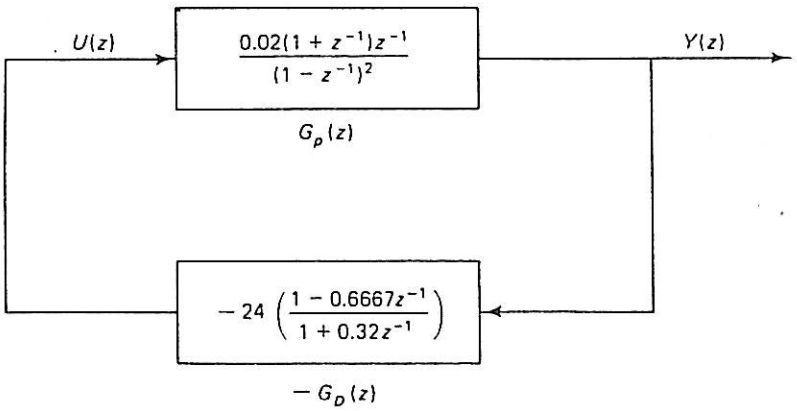


Figura 6-13 Forma modificada del diagrama de bloques del sistema diseñado en el ejemplo 6-11.

es decir,

$$1 + \left[\frac{0.02(1 + z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}\right]\left[24\left(\frac{1 - 0.6667z^{-1}}{1 + 0.32z^{-1}}\right)\right] = 0$$

que se puede escribir como sigue:

$$1 + \left[\frac{0.02(z + 1)}{(z - 1)^2}\right]\left[24\left(\frac{z - 0.6667}{z + 0.32}\right)\right] = 0$$

Y, de una manera sencilla, esta ecuación característica se puede simplificar a

$$(z^2 - 1.2z + 0.52)z = 0$$

que es igual a la ecuación (6-174) obtenida mediante la ecuación (6-164).

Sistema de control con entrada de referencia. Aplicaremos el método de realimentación del estado observado, para diseñar sistemas de control que deban seguir entradas de referencia cambiantes.

Es importante observar que la ubicación de polos con el enfoque o método del estado observado no tiene control sobre la dinámica del numerador del sistema en lazo cerrado. (Para controlar la dinámica del numerador, consulte el método de ecuaciones polinomiales presentado en el capítulo 7.) Sin embargo, es posible transformar un sistema de regulación con realimentación del estado observado, en un sistema de control, como se muestra en la figura 6-14.

Como se dijo antes, la parte de la ubicación de polos determina la ecuación característica de grado n deseada para el sistema de orden n. La porción de observador de estados determina la ecuación característica de error del observador de grado n o menor. Tal y como se obtiene de la ecuación (6-134) o la (6-164), el producto de la ecuación característica de grado n y la ecuación característica de error del observador de estados da la ecuación característica correspondiente a la totalidad del sistema.

Al modificar el sistema de regulación en un sistema de control, es necesario incluir una ganancia ajustable $\boldsymbol{K}_0$ en la trayectoria de entrada, de tal forma que la ganancia de entrada de la totalidad del sistema de control pueda determinarse para que sea la unidad la salida en estado permanente a una entrada escalón unitario. Esto se debe a que la ubicación de polos con el observador de estados modifica la ganancia de la totalidad del sistema. Por lo tanto, a menos que $\boldsymbol{K}_0$ esté correctamente ajustada, el sistema no se comportará en forma correcta.

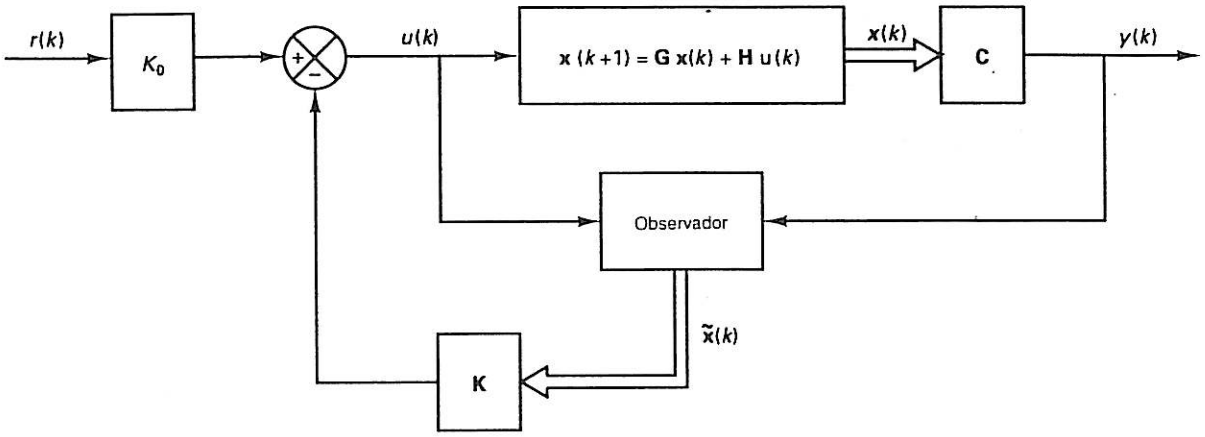


Figura 6-14 Diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación del estado observado.

Ejemplo 6-12

Modifique el sistema de regulación considerado en el ejemplo 6-11 a un sistema de control, tal que la salida siga la entrada de referencia. A continuación, obtenga la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema de control. (Suponga que el período de muestreo T es 0.2, es decir, que $T = 0.2$.)

La figura 6-15 muestra un diagrama de bloques posible para el sistema de control. En este sistema de control es necesario definir la ganancia K_0 de forma que no exista desplazamiento en la salida a una entrada escalón. (Observe que si $K_0 = 1$, entonces la salida en estado permanente para una entrada escalón unitario no será igual a la unidad, excepto en casos especiales.)

Del diagrama de bloques, la función de transferencia pulso en lazo cerrado $Y(z)/R(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0(0.02)(z + 0.32)(z + 1)}{(z - 1)^2(z + 0.32) + 0.48(z + 1)(z - 0.6667)}$$
$$= \frac{K_0(0.02)(z + 0.32)(z + 1)}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z}$$

El sistema es de tercer orden.

Antes de examinar el comportamiento del sistema, es necesario determinar la constante de ganancia K_0. Supongamos que $R(z)$ es la transformada z de la secuencia escalón unitario. Entonces, la salida en estado permanente está dada por

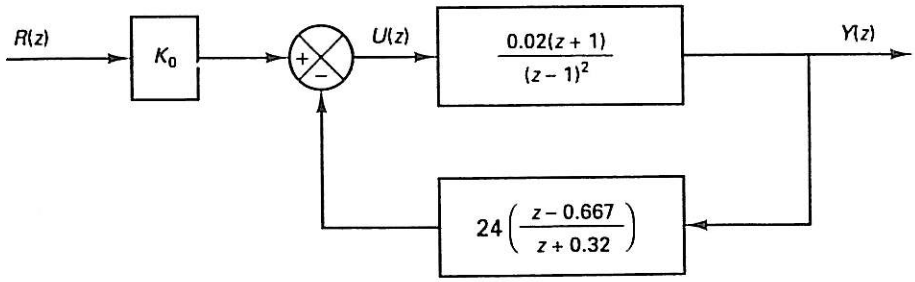


Figura 6-15 Sistema de control obtenido modificando el diagrama de bloques que aparece en la figura 6-13.

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})Y(z)]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{z - 1}{z} \frac{K_0(0.02)(z + 0.32)(z + 1)}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z} \frac{z}{z - 1}$$

$$= 0.165K_0$$

Establecemos la ganancia K_0 de modo que

$$y(\infty) = 0.165K_0 = 1$$

es decir,

$$K_0 = 6.0606$$

Sustituyendo $K_0 = 6.0606$ en la función de transferencia de pulso en lazo cerrado, obtenemos

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.1212z^2 + 0.16z + 0.03879}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z}$$

La respuesta escalón unitario de este sistema puede obtenerse con facilidad utilizando MATLAB. Un programa MATLAB de muestra para la obtención de la respuesta escalón unitario aparece en el MATLAB Program 6-2. La respuesta escalón unitario resultante se tiene en la figura 6-16.

MATLAB Programa 6–2

```
num = [0  0.1212  0.1600  0.03879];
den = [1  -1.2  0.52  0];
r = ones(1,41);
v = [0  40  0  1.6];
axis(v);
k = 0: 40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,'o')
grid
title('Respuesta escalón unitario')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Asimismo, la respuesta rampa unitaria puede obtenerse si se introduce el programa MATLAB Program 6-3 en la computadora. La respuesta rampa unitaria resultante aparece en la figura 6-17.

El error que sigue a la entrada rampa unitaria se obtiene como sigue: si observamos que el período de muestreo T es 0.2, la entrada rampa unitaria está dada por

$$R(z) = \frac{0.2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Entonces, obtenemos

$$E(z) = R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right]R(z)$$

$$= \frac{z^3 - 1.3212z^2 + 0.36z - 0.03879}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z} \frac{0.2z}{(z - 1)^2}$$

$$= \frac{(z - 1)(z^2 - 0.3212z + 0.03879)}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z} \frac{0.2z}{(z - 1)^2}$$

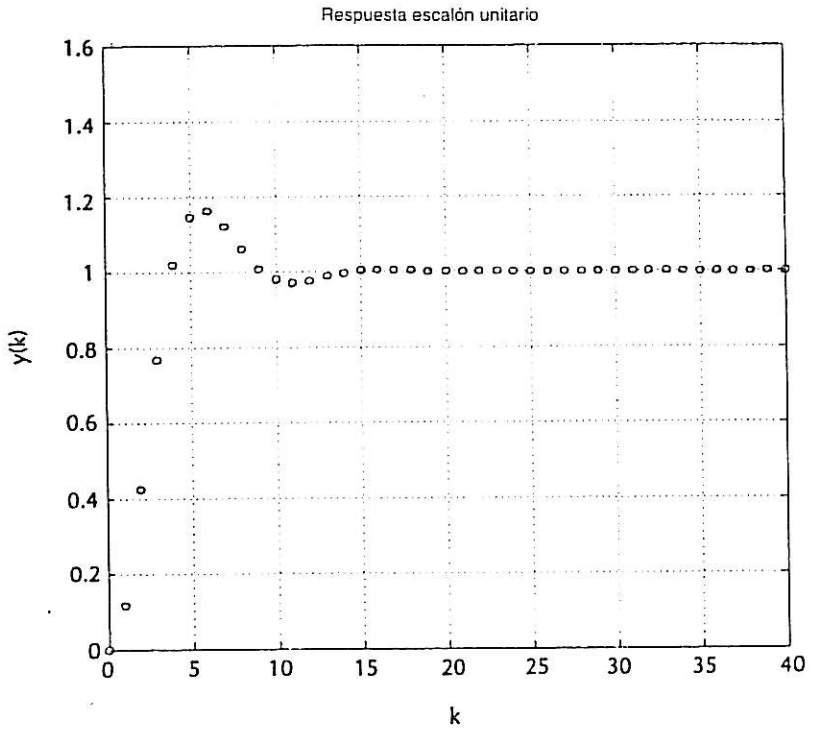


Figura 6-16 Respuesta escalón unitario del sistema de control mostrado en la figura 6-15 con $K_0 = 0.0606$.

MATLAB Programa 6–3

```
num = [0  0.1212  0.1600  0.03879];
den = [1  -1.2  0.52  0];
k = 0:20;
r = [0.2*k];
v = [0  20  0  4];
axis(v);
y = filter(num,den,r );
plot(k,y,'o',k,y,'-',k,0.2*k,'--')
grid
title('Unit-Ramp Response')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z^2 - 0.3212z + 0.03879)}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z} \frac{0.2z}{(z-1)^2}$$

$$= 0.4485$$

El error en estado permanente al seguir la entrada rampa unitaria es 0.4485. (Vea la figura 6-17.)

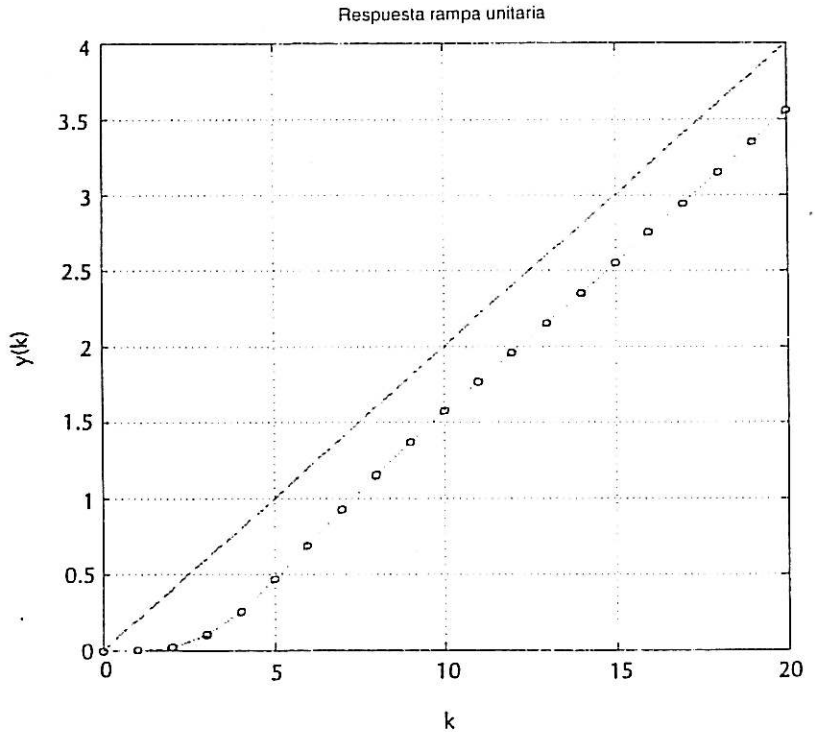


Figura 6-17 Respuesta rampa unitaria del sistema de control mostrado en la figura 6-15, con $K_0 = 0.0606$.

6-7 SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Por lo general, en el sistema de seguimiento es necesario que el sistema tenga uno o más integradores dentro del lazo cerrado. (A menos que la planta a controlarse tenga una propiedad integradora, a fin de eliminar el error en estado permanente a entradas escalón, es necesario añadir uno o más integradores dentro del lazo.)

Una forma de introducir un integrador en el modelo matemático de un sistema en lazo cerrado, es introduciendo un nuevo vector de estado, que integre la diferencia entre el vector de comando R y el vector de salida Y. La figura 6-18 muestra una configuración posible del diagrama de bloques para un sistema de seguimiento con realimentación del estado y control integral. El controlador integral está formado por m elementos integradores, uno por cada uno de los componentes de la entrada de comando. (La entrada de comando es un vector de dimensión m y tiene m componentes.) El integrador puede incluirse como parte de la formulación de la ubicación de polos presentada en la sección 6-5.

Sistema de seguimiento con integrador. Considere el sistema de seguimiento mostrado en la figura 6-18. Se supone que la planta es de estado completamente controlable y completamente observable. Suponga que la planta no tiene un integrador. La ecuación de estado de la planta y su ecuación de salida son

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{6–175}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–176}$$

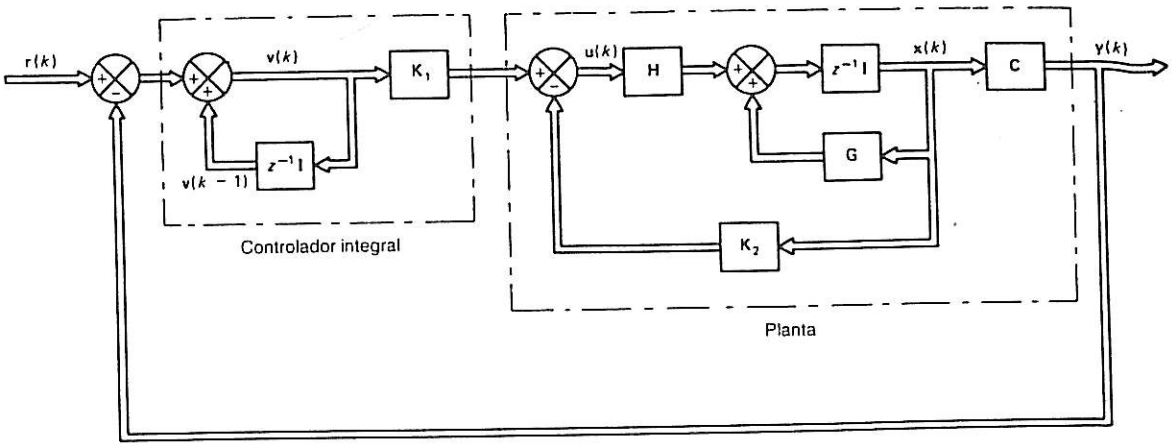


Figura 6-18 Sistema de seguimiento con realimentación del estado y control integral.

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado de la planta (de dimensión n)
$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (de dimensión r)
$\mathbf{y}(k)$ = vector de salida (de dimensión m)
$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times m$
$\mathbf{C}$ = matriz de $m \times n$

(Observe que en el análisis presente suponemos que las dimensiones del vector de salida y del vector de control son iguales; ambos son vectores de dimensión m.) La ecuación de estado del integrador es

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) \tag{6–177}$$

donde

$\mathbf{v}(k)$ = vector de error de actuación (vector de dimensión m)
$\mathbf{r}(k)$ = vector de entrada de comando (vector de dimensión m)

La ecuación (6-177) puede volverse a escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\\ &= \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)]\\ &= -\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) - \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{r}(k+1)\end{aligned} \tag{6–178}$$

El vector de control $\mathbf{u}(k)$ está dado por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_1\mathbf{v}(k) \tag{6–179}$$

En nuestro sistema de seguimiento, la configuración del sistema queda especificada en la figura 6-18. Los parámetros de diseño son las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$.

A continuación analizaremos el procedimiento para determinar de las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, de forma que el sistema tenga los polos en lazo cerrado deseados. De las ecuaciones (6-175), (6-178) y (6-179), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k+1) &= -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{K}_1\mathbf{v}(k+1)\\ &= (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG})\mathbf{x}(k)\\ &\quad + (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH})\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_1\mathbf{r}(k+1)\end{aligned} \tag{6-180}$$

Si observamos que $\mathbf{u}(k)$ es una combinación lineal de los vectores de estado $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{v}(k)$, podemos definir un nuevo vector de estado formado por $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$ [en vez de $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{v}(k)$]. De las ecuaciones (6-175) y (6-180) obtenemos la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k+1)\\ \mathbf{u}(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{H}\\ \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{u}(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{K}_1\end{bmatrix}\mathbf{r}(k+1) \tag{6-181}$$

La ecuación de salida, ecuación (6-176), puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{u}(k)\end{bmatrix} \tag{6-182}$$

Observe que los polos en lazo cerrado del sistema están determinados por el sistema mismo, y no dependen de la entrada de comando $\mathbf{r}(k)$. En la ecuación (6-181), los valores característicos de la matriz de estado determinan los polos en lazo cerrado del sistema.

Para aplicar en forma directa la técnica de la ubicación de polos de la sección 6-5 al diseño del sistema de seguimiento presente, considere el caso en el que el vector de comando $\mathbf{r}(k)$ es un vector constante (entrada escalón), de forma que

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{r}$$

Entonces, la ecuación (6-181) se convierte en

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k+1)\\ \mathbf{u}(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{H}\\ \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{u}(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{K}_1\mathbf{r}\end{bmatrix} \tag{6-183}$$

Observe que para la entrada escalón, $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ y $\mathbf{v}(k)$ tienden a los valores de vector constantes $\mathbf{x}(\infty)$, $\mathbf{u}(\infty)$ y $\mathbf{v}(\infty)$, respectivamente. Por lo tanto, de la ecuación (6-177), obtenemos la ecuación siguiente en estado permanente:

$$\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{v}(\infty) + \mathbf{r} - \mathbf{y}(\infty)$$

es decir,

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}$$

En la salida no hay error en estado permanente cuando la entrada de comando es un vector escalón. Asimismo, en estado permanente, la ecuación (6-183) se convierte en

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(\infty)\\ \mathbf{u}(\infty)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{H}\\ \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(\infty)\\ \mathbf{u}(\infty)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{K}_1\mathbf{r}\end{bmatrix} \tag{6-184}$$

Definamos los vectores de error por

$$\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty)$$

$$\mathbf{u}_e(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(\infty)$$

A continuación, restando la ecuación (6-184) de la ecuación (6-183), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ \mathbf{u}_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{u}_e(k) \end{bmatrix} \tag{6-185}$$

La dinámica del sistema queda determinada por los valores característicos de la matriz de estado, que aparecen en la ecuación (6-185). La (6-185) puede modificarse a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ \mathbf{u}_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{u}_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{w}(k) \tag{6-186}$$

donde

$$\mathbf{w}(k) = [\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} \vdots \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{u}_e(k) \end{bmatrix} \tag{6-187}$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{u}_e(k) \end{bmatrix} = (n+m)\text{-vector} \\ \hat{\mathbf{G}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = (n+m) \times (n+m) \text{ matriz} \\ \hat{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = (n+m) \times m \text{ matriz} \\ \hat{\mathbf{K}} &= -[\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} \vdots \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH}] \\ &= m \times (n+m) \text{ matriz} \end{aligned} \tag{6-188}$$

las ecuaciones (6-186) y (6-187) se convierten, respectivamente, en

$$\xi(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{w}(k) \tag{6-189}$$

y

$$\mathbf{w}(k) = -\hat{\mathbf{K}}\xi(k) \tag{6-190}$$

Observe que la matriz de controlabilidad del sistema definido por la ecuación (6-189) es

$$[\hat{\mathbf{H}} \vdots \hat{\mathbf{G}} \vdots \cdots \vdots \hat{\mathbf{G}}^{n+m-1}\hat{\mathbf{H}} = \text{matriz de } (n+m) \times m(n+m)$$

En términos de $\mathbf{G}$ y de $\mathbf{H}$, esta matriz de controlabilidad puede escribirse como sigue:

$$[\hat{\mathbf{H}} \vdots \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{H}} \vdots \cdots \vdots \hat{\mathbf{G}}^{n+m-1}\hat{\mathbf{H}}] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \cdots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{G}^{n+m-2}\mathbf{H} \\ \hline \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{6-191}$$

En vista de que la ecuación de estado de la planta, dada por la ecuación (6-175), se supone de estado completamente controlable, el rango de la matriz

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

es n. Por lo tanto, el rango de la matriz dada por la ecuación (6-191) es $n + m$. En consecuencia, si la planta es de estado completamente controlable, el sistema definido por la ecuación (6-189) es de estado completamente controlable y, por lo tanto, en este caso es aplicable la técnica de ubicación de polos analizada en la sección 6-5.

Una vez especificados los polos en lazo cerrado deseados, es posible determinar la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ mediante la técnica de ubicación de polos. Utilizando la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ así determinada, podemos obtener las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, como sigue. Primero, obsérvese que

$$[\mathbf{K}_2 \vdots \mathbf{K}_1]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{I}_n & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{array}\right] = [\mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{CG} \vdots \mathbf{K}_2\mathbf{H} + \mathbf{K}_1\mathbf{CH}] \tag{6-192}$$

Entonces, de las ecuaciones (6-188) y (6-192), tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= [\mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{CG} \vdots -\mathbf{I}_m + \mathbf{K}_2\mathbf{H} + \mathbf{K}_1\mathbf{CH}] \\ &= [\mathbf{K}_2 \vdots \mathbf{K}_1]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{I}_n & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{array}\right] + [\mathbf{0} \vdots -\mathbf{I}_m] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\mathbf{K}_2 \vdots \mathbf{K}_1]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{I}_n & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{array}\right] = \hat{\mathbf{K}} + [\mathbf{0} \vdots \mathbf{I}_m] \tag{6-193}$$

Las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ deseadas pueden determinarse a partir de la ecuación (6-193).

Debe observarse que, cuando $\mathbf{u}(k)$ es un vector de dimensión m, y $m > 1$, la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ no es única. En consecuencia, es posible determinar más de un conjunto de matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$. (Cada $\hat{\mathbf{K}}$ posible genera un conjunto de matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$.) En general, debe escogerse el conjunto de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ que dé el mejor desempeño general del sistema.

Finalmente, hay que notar que si no son medibles todas las variables de estado, entonces necesitaremos utilizar las variables de estado observadas en lugar de las variables de estado no medibles, para fines de la realimentación del estado. (Asimismo, si las variables de estado medidas están contaminadas por ruido y, en consecuencia, no son precisas, para fines de realimentación del estado preferiremos utilizar las variables de estado observadas, y no las variables de estado actuales.) En la figura 6-19 se muestra un diagrama de bloques para el sistema de seguimiento, con realimentación del estado, en el cual en vez del estado real se utiliza el estado observado.

Ejemplo 6-13

Considere el control digital de una planta mediante el uso de realimentación del estado y control integral. Suponga que la configuración del sistema es la misma que la que se muestra en la figura 6-18. También que la función de transferencia pulso de la planta es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2} + 0.5z^{-3}}{1 - z^{-1} + 0.01z^{-2} + 0.12z^{-3}} \tag{6-194}$$

donde $Y(z)$ y $U(z)$ son las transformadas z de la salida de la planta, $y(k)$, y de la entrada de planta (señal de control), $u(k)$, en forma respectiva.

Determine la constante de ganancia integral K_1 y la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$, de forma que la respuesta a una entrada de comando escalón unitario tenga oscilaciones muertas. Suponga que no todas las variables de estado están disponibles para medición directa, y utilice la configuración de sistema mostrada en la figura 6-19 como ejemplo para un diagrama de bloques de un sistema con un observador de estados, a fin de diseñar un observador de estados tal que el estado observado tienda al estado verdadero tan rápido como sea posible.

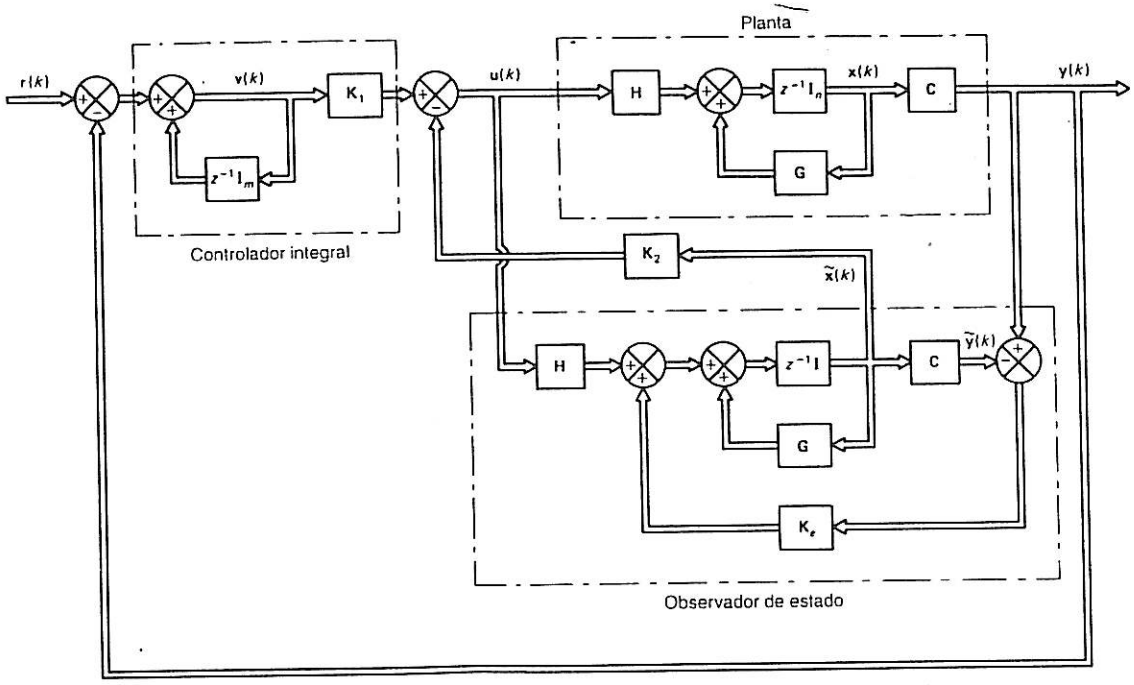


Figura 6-19 Sistema de seguimiento con realimentación del estado observado.

Primero obtendremos una representación en el espacio de estados para la función de transferencia pulso de la planta. Comparando la función de transferencia pulso dada con la forma estándar

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

encontramos que

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0.5$$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 0.01, \quad a_3 = 0.12$$

Entonces, refiriéndonos a las ecuaciones (5-8) y (5-9), podemos obtener las ecuaciones siguientes en el espacio de estados para la planta:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6–195}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–196}$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.01 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0.5 \quad 1 \quad 0]$$

Observe que esta planta es de estado completamente controlable y completamente observable.

Determinación de la constante de ganancia integral K_1 y de la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$ para una respuesta con oscilaciones muertas. Ahora determinaremos la constante de ganancia integral K_1 y la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$. En el sistema presente es necesario que la respuesta a la entrada de comando escalón tenga oscilaciones muertas. (Por lo tanto, deberemos ubicar los polos en lazo cerrado del sistema en el origen.)

Refiriéndonos a las ecuaciones (6-189) y (6-190), tenemos

$$\xi(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k)$$

$$w(k) = -\hat{\mathbf{K}}\xi(k)$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.12 & -0.01 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nuestro problema aquí es determinar la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ de forma tal que los polos en lazo cerrado del sistema queden en el origen, es decir, que la ecuación característica deseada sea

$$z^4 = 0$$

Mediante la técnica de ubicación de polos analizada en la sección 6-5, se puede determinar fácilmente la matriz $\hat{\mathbf{K}}$. Refiriéndonos a la fórmula de Ackermann, tal y como se obtuvo de la ecuación (6-71), obtenemos

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1][\hat{\mathbf{H}} \vdots \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{H}} \vdots \hat{\mathbf{G}}^2\hat{\mathbf{H}} \vdots \hat{\mathbf{G}}^3\hat{\mathbf{H}}]^{-1}\phi(\hat{\mathbf{G}})$$

donde

$$\phi(\hat{\mathbf{G}}) = \hat{\mathbf{G}}^4$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0.99 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.12 & -0.01 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.01 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.12 & -0.13 & 0.99 & 1 \\ -0.1188 & -0.1299 & 0.86 & 0.99 \\ -0.1032 & -0.1274 & 0.7301 & 0.86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [-0.12 \quad -0.13 \quad 0.99 \quad 1] \end{aligned} \tag{6-197}$$

La ecuación (6-197) da la matriz $\hat{\mathbf{K}}$.

La constante de ganancia integral deseada K_I y la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$ se obtienen de la ecuación (6-193). Si observamos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{I}_n & \mathbf{H} \\ \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -0.12 & -0.01 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0.5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

es no singular (para ver esto, utilice las operaciones de renglones y columnas, y convierta la matriz en una triangular), obtenemos

$$[\mathbf{K}_2 \vdots K_1] = [\hat{\mathbf{K}} + [0 \vdots 1]]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{I}_3 & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{array}\right]^{-1}$$

$$= [-0.12 \quad -0.13 \quad 0.99 \vdots 2]\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -0.12 & -0.01 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 & 0 \end{array}\right]^{-1}$$

$$= [-0.12 \quad -0.13 \quad 0.99 \vdots 2]\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{1.5} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{1.5} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{1.5} \\ \hline -0.12 & -\frac{0.26}{3} & 1 & \frac{0.13}{1.5} \end{array}\right]$$

$$= [-0.12 \quad 0.3233 \quad 2 \vdots 0.6667] \tag{6–198}$$

De la ecuación (6-198) obtenemos la constante de ganancia integral K_1:

$$K_1 = 0.6667 = \tfrac{2}{3} \tag{6–199}$$

La matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$ está dada por

$$\mathbf{K}_2 = [-0.12 \quad 0.3233 \quad 2] \tag{6–200}$$

Cómo determinar la salida y(k). A continuación determinemos la salida $y(k)$. En la ecuación (6-196),tenemos que

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = [0.5 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Para obtener la salida $y(k)$, primero determinaremos el vector del estado $\mathbf{x}(k)$ y la señal $v(k)$. De la figura 6-18,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6–201}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{6–202}$$

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \tag{6–203}$$

$$u(k) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k) + K_1 v(k) \tag{6–204}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (6-201) y (6-204) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_1 v(k) \end{aligned} \tag{6–205}$$

Asimismo, de las ecuaciones (6-202), (6-203) y (6-205)

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_1 v(k)] \\ &= -(\mathbf{C}\mathbf{G} - \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}(k) + (1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_1)v(k) + r(k+1) \end{aligned} \tag{6–206}$$

Combinando las ecuaciones (6-205) y (6-206), resulta

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(k+1) \\ \hline v(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}_2 & \mathbf{H}K_1 \\ \hline -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K}_2 & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(k) \\ \hline v(k) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] r(k+1) \tag{6–207}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \qquad (6\text{–}208)$$

Dado que la entrada de comando $r(k)$ es de escalón unitario, tenemos que

$$r(k) = 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Supongamos que el estado inicial es

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y d son arbitrarios. Entonces, de la ecuación

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} b \\ c \\ -\frac{1}{3}b - c + \frac{2}{3}d \\ -\frac{1}{2}b - c + d + 1 \end{bmatrix}$$

De manera similar,

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \\ v(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -\frac{1}{3}b - c + \frac{2}{3}d \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}d + 2 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \\ v(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}b - c + \frac{2}{3}d \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}, \qquad k = 4, 5, 6, \ldots$$

La salida $y(k)$ se obtiene como sigue:

$$y(0) = [0.5 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = [0.5 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}a + b$$

Del mismo modo,

$$y(1) = \frac{1}{2}b + c$$

$$y(2) = -\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c + \frac{2}{3}d$$

$$y(3) = -\frac{1}{6}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}$$

$$y(k) = 1, \qquad k = 4, 5, 6, \ldots$$

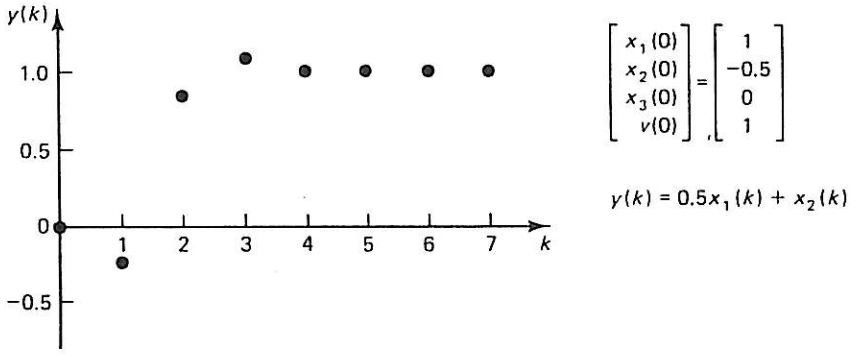
$$u(k) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(k) + K_1 v(k)$$

$$= -[-0.12 \quad 0.3233 \quad 2]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + (\tfrac{2}{3})(\tfrac{7}{3}) = 0.08670$$

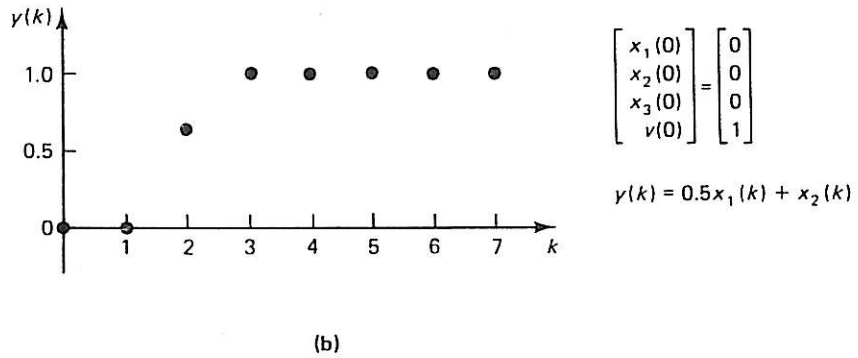
donde $k = 4, 5, 6, \ldots$ En vista de que $\mathbf{u}(t)$, para $t \geq 4T$ (donde T es el periodo de muestreo), es constante, en la salida no existe oscilación entre muestras. Entonces, la respuesta del sistema tiene oscilaciones muertas.

Observe que la salida $y(k)$ llega a la unidad en cuatro períodos de muestreo como máximo, y que se queda ahí en ausencia de perturbaciones o de nuevas entradas de comando. [Vea, por ejemplo, la secuencia de respuesta escalón unitario de muestra que aparece en la figura 6-20*a*).] Bajo condiciones iniciales especiales, por ejemplo, $a = b = c = 0$ y $d = 1$, la salida alcanza la unidad en tres períodos de muestreo y se queda ahí, es decir, $y(k) = 1$ para $k = 3, 4, 5, \ldots$ [Véase la figura 6-20*b*).]

Diseño del observador de estados. A continuación, diseñaremos un observador de estados para el sistema. En vista de que la salida de la planta $y(k)$ es medible, diseñemos un observador de orden mínimo. Supongamos que deseamos la respuesta con oscilaciones muertas. En el sistema presente, la



(a)



(b)

Figura 6-20 Secuencias de respuesta escalón unitario de muestra para el sistema de seguimiento, con realimentación del estado actual (medida) y control integral diseñado en el ejemplo 6-13.

matriz de salida $\mathbf{C}$ está dada por

$$\mathbf{C} = [0.5 \quad 1 \quad 0]$$

Para modificar la matriz de salida $\mathbf{C}$ [0.5 1 0] a [1 0 0], hagamos la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) \tag{6-209}$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-210}$$

Observe que

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-211}$$

Entonces, las ecuaciones de estado de la planta se convierten en

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) \tag{6-212}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) \tag{6-213}$$

donde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.01 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.25 \\ -0.01 & 1 & -0.115 \\ 1 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{T} = [0.5 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0] = \hat{\mathbf{C}}$$

Las ecuaciones de sistema transformadas son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0.5 & 1 & -0.25 \\ \hline -0.01 & 1 & -0.115 \\ 1 & 0 & -0.5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right]u(k) \tag{6-214}$$

$$y(k) = [1 \,\vdots\, 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} \tag{6-215}$$

Dado que sólo se puede medir una variable de estado, necesitaremos observar dos de ellas. Por lo tanto, el orden del observador de orden mínimo es 2. De las ecuaciones (6-138) y (6-114), tenemos que

$$\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -0.115 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \end{bmatrix} [1 \quad -0.25]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - k_{e_1} & -0.115 + 0.25k_{e_1} \\ -k_{e_2} & -0.5 + 0.25k_{e_2} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del observador es

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_{bb} + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab}| = \begin{vmatrix} z - 1 + k_{e_1} & 0.115 - 0.25k_{e_1} \\ k_{e_2} & z + 0.5 - 0.25k_{e_2} \end{vmatrix}$$

$$= (z - 1 + k_{e_1})(z + 0.5 - 0.25k_{e_2}) - k_{e_2}(0.115 - 0.25k_{e_1})$$

$$= z^2 + (k_{e_1} - 0.25k_{e_2} - 0.5)z + (0.5k_{e_1} + 0.135k_{e_2} - 0.5)$$

$$= 0 \tag{6–216}$$

Dado que queremos una respuesta con oscilaciones muertas, la ecuación característica deseada es

$$z^2 = 0$$

Por lo tanto, es necesario que

$$k_{e_1} - 0.25k_{e_2} - 0.5 = 0$$

$$0.5k_{e_1} + 0.135k_{e_2} - 0.5 = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneas en función de k_{e_1} y k_{e_2}, tenemos

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7404 \\ 0.9615 \end{bmatrix} \tag{6–217}$$

Control integral con observador de estados. Hasta ahora hemos considerado un problema de diseño en el cual las variables de estado observadas se realimentan en un lazo menor, y en el lazo principal se utiliza un controlador integral.

En la parte del diseño de la ubicación de polos, hemos utilizado un estado real en vez de un estado observado. A continuación obtendremos las ecuaciones de sistema para el caso en el que se utilizan el controlador integral y el observador de estados.

El uso del estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, donde $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{T}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k)$, modifica la señal de control $u(k)$, en el control con realimentación del estado, como sigue. En la ecuación (6-204) tenemos

$$u(k) = -\mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{x}}(k) + K_1 v(k) = -\mathbf{K}_2 \mathbf{T}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) + K_1 v(k) \tag{6–218}$$

Definamos

$$\boldsymbol{\xi}(k) - \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) = \boldsymbol{\epsilon}(k)$$

Entonces, la ecuación (6-218) se puede escribir como sigue:

$$u(k) = -\mathbf{K}_2 \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) + K_1 v(k) + \mathbf{K}_2 \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon}(k) \tag{6–219}$$

que puede expresarse como

$$u(k) = [-0.3233 \quad -2 \quad 0.2817] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \tfrac{2}{3} v(k) + [0.3233 \quad 2 \quad -0.2817] \begin{bmatrix} \epsilon_1(k) \\ \epsilon_2(k) \\ \epsilon_3(k) \end{bmatrix} \tag{6–220}$$

Sustituyendo la ecuación (6-220) en la ecuación (6-214), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.25 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3233 & 2 & -0.2817 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1(k) \\ \epsilon_2(k) \\ \epsilon_3(k) \end{bmatrix} \tag{6-221}$$

Asimismo, se puede modificar la ecuación (6-206) para obtener

$$v(k+1) = -(\mathbf{CGT} - \mathbf{CHK}_2\mathbf{T})\boldsymbol{\xi}(k) + (1 - \mathbf{CH}K_1)v(k) + r(k+1)$$

es decir,

$$v(k+1) = -[0.5 \quad 1 \quad -0.25] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} + v(k) + r(k+1) \tag{6-222}$$

Si nos referimos a la ecuación (6-156), y observamos que $\epsilon_1(k) = 0$, es posible dar la dinámica de error del observador mediante

$$\begin{bmatrix} \epsilon_2(k+1) \\ \epsilon_3(k+1) \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab}] \begin{bmatrix} \epsilon_2(k) \\ \epsilon_3(k) \end{bmatrix}$$

Y, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1(k+1) \\ \epsilon_2(k+1) \\ \epsilon_3(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.2596 & 0.0701 \\ 0 & -0.9615 & -0.2596 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \epsilon_1(k) \\ \epsilon_2(k) \\ \epsilon_3(k) \end{bmatrix} \tag{6-223}$$

Si combinamos las ecuaciones (6-221), (6-222) y (6-223) en una ecuación de estado,

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \\ v(k+1) \\ \epsilon_1(k+1) \\ \epsilon_2(k+1) \\ \epsilon_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0.3233 & 2 & -0.2817 \\ 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2596 & 0.0701 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9615 & -0.2596 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ v(k) \\ \epsilon_1(k) \\ \epsilon_2(k) \\ \epsilon_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(k+1) \tag{6-224}$$

La salida de la planta $y(k)$ puede ser

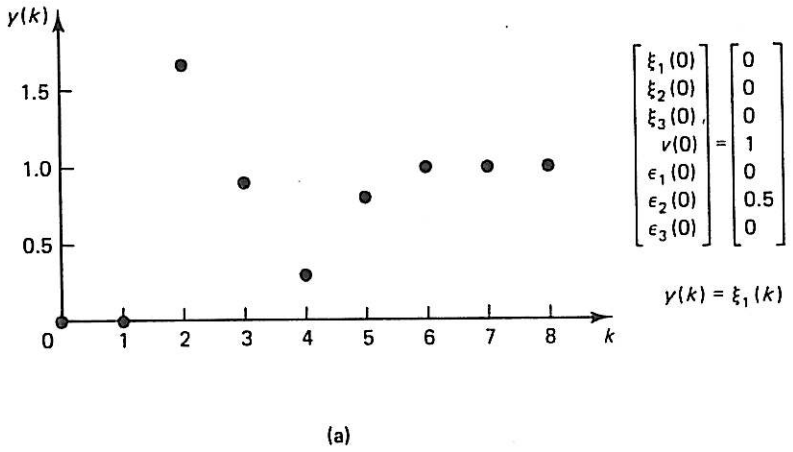
$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \xi_1(k) \tag{6-225}$$

Se puede demostrar que para la entrada de comando escalón unitario, la respuesta del sistema bajo una condición inicial arbitraria,

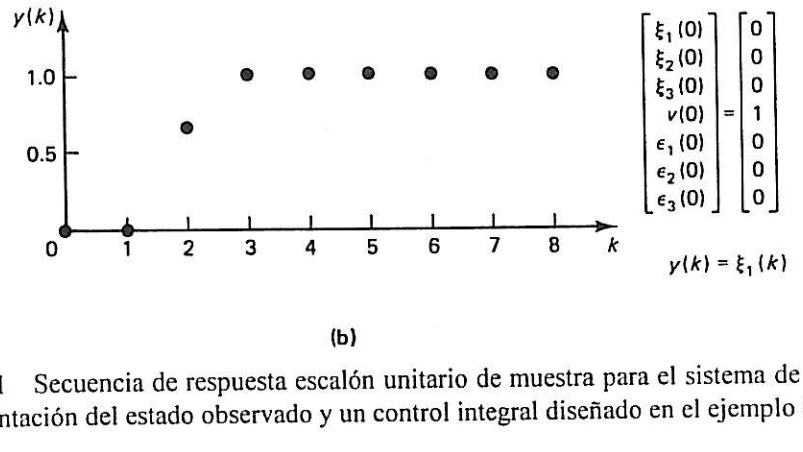
$$\begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \\ \nu(0) \\ \epsilon_1(0) \\ \epsilon_2(0) \\ \epsilon_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

requiere de por lo menos seis períodos de muestreo para completarse. (Es decir, la salida llega a la unidad como máximo en seis períodos de muestreo, y después se queda ahí en ausencia de perturbaciones y nuevas entradas de comando.)

Observe que, como ya vimos, si el estado real puede ser realimentado, el sistema requiere como máximo de cuatro períodos de muestreo para completar la respuesta escalón unitario. [En el caso en que $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$, $\xi_3(0) = 0$, y $\nu(0) = 1$, el sistema sólo requiere de tres períodos de muestreo para completar la respuesta escalón unitario.] Sin embargo, si se utiliza el observador de estados, el tiempo de respuesta aumenta. Si se utiliza el observador de orden mínimo (en este caso de segundo orden), el sistema requiere como máximo de seis períodos de muestreo, para completar la respuesta escalón unitario. [Vea, por ejemplo, la secuencia de respuesta escalón unitario de muestra, que aparece en la figura 6-21*a*).] Esto significa que, en casos especiales, el tiempo de respuesta es mucho más corto.
Por ejemplo, si las condiciones iniciales son $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$, $\xi_3(0) = 0$, $\nu(0) = 1$, $\varepsilon_2(0) = 0$, y $\varepsilon_3(0) = 0$,



(a)



(b)

Figura 6-21 Secuencia de respuesta escalón unitario de muestra para el sistema de seguimiento con una realimentación del estado observado y un control integral diseñado en el ejemplo 6-13.

entonces, para completar la respuesta escalón unitario, el sistema sólo requiere de tres períodos de muestreo. Véase la figura 6-21(b).

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-6-1

La definición de controlabilidad que se da en la sección 6-2 no es la única que se usa en los libros. A veces se utiliza la siguiente definición: un sistema de control se define como de estado controlable si, dado un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$, es posible traer el estado al origen del espacio de estados en un intervalo de tiempo finito, siempre que el vector de control no tenga restricciones (no acotado).

El concepto de alcanzabilidad, similar al de controlabilidad, se encuentra en los libros y se utiliza en la forma siguiente: un sistema de control se define como alcanzable si, al empezar desde el origen del espacio de estados, el estado puede ser llevado a un punto arbitrario en el espacio respectivo en un período finito, siempre que el vector de control no esté restringido (no acotado).

Demuestre que el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

es controlable (en el sentido definido en este problema), pero no alcanzable.

Solución Si se reescribe la ecuación de estado del sistema, se obtiene

$$x_1(k+1) = 0$$

$$x_2(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$

Empezando a partir de un estado arbitrario resulta

$$x_1(1) = 0$$

$$x_2(1) = -x_1(0) + x_2(0) + u(0)$$

Por lo tanto, al seleccionar

$$u(0) = x_1(0) - x_2(0)$$

el estado puede ser llevado al origen en un solo paso. Por lo tanto el sistema es controlable en el sentido definido en este problema.

Si el estado empieza a partir del origen, tenemos

$$x_1(1) = 0$$

$$x_2(1) = -x_1(0) + x_2(0) + u(0) = -0 + 0 + u(0) = u(0)$$

Aunque $x_2(1)$ puede ser llevado a un punto arbitrario en un paso, $x_1(1)$ no puede ser controlado. En consecuencia, el sistema no es alcanzable.

Observe que el sistema presente no es controlable en el sentido definido en la sección 6-2 (donde el estado terminal es un punto arbitrario en el espacio de estado incluyendo el origen), porque no se satisface la condición de rango requerida, como muestra lo siguiente:

$$\text{rango } [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

Como se ve en este problema, controlabilidad y alcanzabilidad (ambas definidas en este problema) son distintas. Sin embargo, si la matriz de estado **G** es no singular, entonces la controlabilidad completa del estado, en el sentido definido en este problema, y la alcanzabilidad completa del estado, significan lo mismo. Es decir, para el sistema con una matriz no singular **G**, la controlabilidad completa del estado significa la alcanzabilidad completa, y viceversa.

Problema A-6-2

Considere el sistema de estado completamente controlable definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix}$$

El período de muestreo es de 1. La señal de control $u(k)$ es no acotada, es decir

$$-\infty \leq u(k) \leq \infty$$

entonces un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ puede ser traído al origen como máximo en dos períodos de muestreo, utilizando una señal de control constante por intervalos.

Deduzca la ley de control para transferir un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ al origen. Determine la región en el espacio de estados en el cual el estado inicial puede ser llevado al origen en un período de muestreo.

Si la magnitud de $u(k)$ está acotada, entonces algún estado inicial no podrá ser transferido al origen en dos períodos de muestreo. (Pudieran requerirse de dos, tres, cuatro o más de tales períodos.) Suponga que

$$|u(k)| \leq 1$$

Determine la región de los estados iniciales en el plano x_1x_2 que pueden ser transferidos al origen en uno y en dos períodos de muestreo, respectivamente, al usar la señal de control acotada $|u(k)| \leq 1$.

Solución

Para el caso en que $u(k)$ es no acotada. En vista de que el sistema es del segundo orden, se necesitan como máximo dos períodos de muestreo para transferir cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ al origen. Al observar que

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) \tag{6-226}$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{0} = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{H}u(1)$$

y que **G** es no singular, se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u(0) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}u(1) \tag{6-227}$$

Sustituyendo la ecuación (6-227) en la ecuación (6-226),

$$\mathbf{x}(1) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u(1) \tag{6-228}$$

Observa

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1.7181 \\ 0 & 2.7181 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7181 \\ 1.7181 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -6.3881 \\ 0 & 7.3881 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.6700 \\ 4.6700 \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones (6-227) y (6-228) se obtienen las dos siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.7181 \\ 1.7181 \end{bmatrix} u(0) - \begin{bmatrix} -3.6700 \\ 4.6700 \end{bmatrix} u(1) \tag{6-229}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.7181 \\ 1.7181 \end{bmatrix} u(1) \tag{6-230}$$

Si se combinan las ecuaciones (6-229) y (6-230), se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7181 & 3.6700 \\ -1.7181 & -4.6700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix}$$

que puede modificarse a

$$\begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5820 & -1.2433 \\ 0.5820 & 0.2433 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \tag{6-231}$$

de la cual se obtiene

$$u(k) = -1.5820x_1(k) - 1.2433x_2(k), \qquad k = 0, 1$$

Esta ecuación da la ley de control requerida. Con esta ley cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede transferirse al origen cuando mucho en dos períodos de muestreo.

A continuación se determinarán los estados iniciales a partir de los cuales el estado del sistema puede ser transferido al origen en un solo período de muestreo. Al igualar $\mathbf{x}(1)$ a $\mathbf{0}$ en la ecuación (6-226), se obtiene

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{0} = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0)$$

de lo cual resulta

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u(0)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7181 \\ -1.7181 \end{bmatrix} u(0) \tag{6-232}$$

De la ecuación (6-232) se encuentra que si el estado inicial está sobre la línea

$$1.7181x_1(0) + 0.7181x_2(0) = 0$$

entonces puede ser transferido al origen en un solo período de muestreo. (De lo contrario, necesitamos de dos períodos para traer el estado inicial al origen.)

En el caso en que $u(k)$ está acotada, es decir $|u(k)| \leq 1$. Si se necesita $\mathbf{x}(1) = \mathbf{0}$, entonces, a partir de la ecuación (6-232) se tiene

$$x_1(0) = 0.7181u(0), \qquad x_2(0) = -1.7181u(0)$$

Dado que $|u(0)| \leq 1$,

$$|x_1(0)| \leq 0.7181, \qquad |x_2(0)| \leq 1.7181$$

Por lo tanto, si el estado inicial está sobre el segmento de recta

$$1.7181x_1(0) + 0.7181x_2(0) = 0, \qquad -0.7181 \leq x_1(0) \leq 0.7181$$

puede ser llevado al origen en un solo período de muestreo. Este segmento aparece en la figura 6-22 como *AOB*.

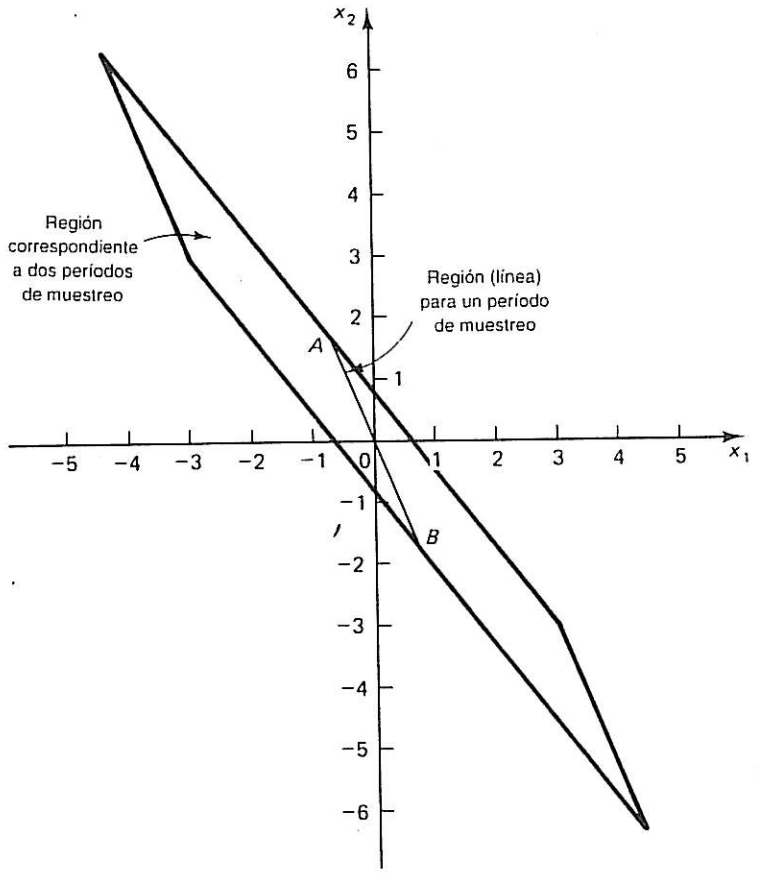


Figura 6-22 Regiones a partir de las cuales los estados iniciales pueden ser llevados al origen en uno o dos períodos de muestreo, cuando $u(k)$ está acotada de forma que $|u(k)| \leq 1$.

Si se necesita que $\mathbf{x}(2) = \mathbf{0}$, entonces de la ecuación (6-231) se obtiene

$$u(0) = -1.5820x_1(0) - 1.2433x_2(0)$$

$$u(1) = 0.5820x_1(0) + 0.2433x_2(0)$$

Como $|u(0)| \leq 1$ y $|u(1)| \leq 1$, se obtienen las siguientes cuatro relaciones:

$$1.5820x_1(0) + 1.2433x_2(0) \leq 1$$

$$1.5820x_1(0) + 1.2433x_2(0) \geq -1$$

$$0.5820x_1(0) + 0.2433x_2(0) \leq 1$$

$$0.5820x_1(0) + 0.2433x_2(0) \geq -1$$

La región limitada por estas cuatro desigualdades aparece en la figura 6-22. Si el estado inicial ocurre en esta región, excepto en la línea AOB, puede ser transferido entonces al origen en dos períodos de muestreo. Si el estado inicial está fuera de esta región, llevar el estado al origen tomará entonces más de dos períodos.

Problema A-6-3

Considere el sistema de función de transferencia pulso siguiente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}(1 + 0.8z^{-1})}{1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

Una representación en el espacio de estados para este sistema puede estar dado por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6-233}$$

$$y(k) = [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{6-234}$$

Para el mismo sistema se puede dar una representación en el espacio de estados diferente mediante

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6-235}$$

$$y(k) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{6-236}$$

Demuestre que la representación en el espacio de estados definida por las ecuaciones (6-233) y (6-234) da un sistema que es de estado controlable, pero no observable. Demuestre, por otra parte, que la representación en el espacio de estados definido por las ecuaciones (6-235) y (6-236) da un sistema que no es de estado completamente controlable, pero sí observable. Explique lo que causa la diferencia aparente en controlabilidad y observabilidad del mismo sistema.

Solución Considere el sistema de control en tiempo discreto definido por las ecuaciones (6-233) y (6-234). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. De modo que el sistema no es observable.

A continuación, considere el sistema definido por las ecuaciones (6-235) y (6-236). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. Por lo tanto, el sistema no es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$|\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. En consecuencia, el sistema es observable.

La diferencia aparente en controlabilidad y observabilidad del mismo sistema está causada por el hecho de que el sistema original tiene una cancelación polo-cero en la función de transferencia de pulso

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0.8}{z^2 + 1.3z + 0.4} = \frac{z + 0.8}{(z + 0.8)(z + 0.5)}$$

Si ocurre una cancelación polo-cero en la función de transferencia pulso, entonces la controlabilidad y la observabilidad varían, dependiendo de cómo se escojan las variables de estado.

Note que para que sea de estado completamente controlable y completamente observable, el sistema de función de transferencia pulso no debe tener ninguna cancelación polo-cero.

Problema A-6-4

Considere el sistema de control definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6-237}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + D \tag{6-238}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión n)
$u(k)$ = señal de control (escalar)
$y(k)$ = señal de salida (escalar)
$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times 1$
$\mathbf{C}$ = matriz de $1 \times n$
D = escalar (constante)

Como se indicó mediante la ecuación (5-60), la función de transferencia de pulso $F(z)$ puede darse como sigue:

$$F(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D$$

Demuestre que si el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, entonces en la función de transferencia pulso $F(z)$ no hay cancelación polo-cero.

Solución Suponga que existe una cancelación polo cero en la función de transferencia de pulso, aunque el sistema sea de estado completamente controlable y completamente observable. Considere la siguiente ecuación de identidad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & F(z) \end{bmatrix}$$

Al tomar el determinante del primer miembro de la ecuación, e igualarlo al del segundo miembro, se obtiene

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} & D \end{vmatrix} = |z\mathbf{I} - \mathbf{G}|F(z)$$

es decir,

$$F(z) = \frac{\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} & D \end{vmatrix}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|}$$

Los polos de $F(z)$ son las raíces de $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$, y los ceros de $F(z)$ son las raíces de

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} & D \end{vmatrix} = 0 \tag{6-239}$$

Ahora suponga que ocurre una cancelación polo-cero. Supongamos que $z = z_1$ es un polo de $F(z)$ y también es un cero de $F(z)$, por lo que se presenta cancelación. Entonces $z = z_1$ es una raíz de $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$. También es una raíz de la ecuación del determinante dada por la ecuación (6-239).

Esto significa que existe un vector

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \hline w \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector de dimensión n y w es un escalar, de forma que

$$\left[\begin{array}{c|c} z_1\mathbf{I} - \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \hline -\mathbf{C} & D \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \hline w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{6-240}$$

Si $w \geq 0$, entonces de la ecuación (6-240) tenemos

es decir,

$$(\mathbf{G} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{H}w \tag{6–241}$$

Dado que $z = z_1$ es una raíz de la ecuación característica, el polinomio característico $\phi(z)$ de $\mathbf{G}$ se puede escribir como sigue:

$$\phi(z) = (z - z_1)\hat{\phi}(z)$$

o sea

$$\phi(\mathbf{G}) = (\mathbf{G} - z_1\mathbf{I})\hat{\phi}(\mathbf{G}) = \hat{\phi}(\mathbf{G})(\mathbf{G} - z_1\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

De la ecuación (6-241) se tiene

$$\phi(\mathbf{G})\mathbf{v} = \hat{\phi}(\mathbf{G})(\mathbf{G} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \hat{\phi}(\mathbf{G})\mathbf{H}w = \mathbf{0}$$

Por lo tanto,

$$\hat{\phi}(\mathbf{G})\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

En vista de que $\hat{\phi}(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$, el hecho de que $\hat{\phi}(\mathbf{G})\mathbf{H} = \mathbf{0}$ significa que el vector $\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}$ se puede expresar en función de $\mathbf{G}, \mathbf{GH}, \ldots, \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H}$. Por lo tanto,

$$\text{rango } [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] < n$$

Esto contradice la suposición de que el sistema es de estado completamente controlable. Por lo tanto, si el sistema es de tal estado, entonces en la función de transferencia pulso no existe cancelación de polo-cero.

Ahora, refiriéndonos a la ecuación (6-240), si $w = 0$ y $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ se tiene entonces

$$(z_1\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6-242}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = 0 \tag{6-243}$$

De la ecuación (6-243),

$$\mathbf{v}^*\mathbf{C}^* = 0 \tag{6-244}$$

De la ecuación (6-242),

$$\mathbf{v}^*\mathbf{G}^* = z_1\mathbf{v}^*$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}^*\mathbf{G}^*\mathbf{C}^* = z_1\mathbf{v}^*\mathbf{C}^* = 0$$

donde hemos utilizado la ecuación (6-244). En forma similar,

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{C}^* = \mathbf{v}^*\mathbf{G}^*\mathbf{G}^*\mathbf{C}^* = z_1\mathbf{v}^*\mathbf{G}^*\mathbf{C}^* = z_1^2\mathbf{v}^*\mathbf{C}^* = 0$$

y

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{G}^*)^{k-1}\mathbf{C}^* = z_1^{k-1}\mathbf{v}^*\mathbf{C}^* = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}^*[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\text{rank}\,[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] < n$$

Lo anterior contradice la suposición de que el sistema sea completamente observable. Entonces, si el sistema es de tal clase no existe cancelación polo-cero.

Esto comprueba que si el sistema es de estado completamente controlable y completamente observable, entonces en la función de transferencia pulso $F(z)$ no existe cancelación polo-cero.

Problema A-6-5

Considere el sistema de estado completamente controlable

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

Defina la matriz de controlabilidad como $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

Demuestre que

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6–245}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

Solución Consideremos el caso donde $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6–246}$$

El primer miembro de la ecuación (6-246) es

$$\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{G}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}] = [\mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}]$$

El segundo miembro de dicha ecuación es

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H} \vdots -a_3\mathbf{H} - a_2\mathbf{G}\mathbf{H} - a_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}] \tag{6–247}$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que la matriz $\mathbf{G}$ satisface a su propia ecuación característica, es decir,

$$\mathbf{G}^n + a_1\mathbf{G}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{G} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Para $n = 3$ se tiene

$$\mathbf{G}^3 + a_1\mathbf{G}^2 + a_2\mathbf{G} + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{6–248}$$

Al usar la ecuación (6-248), la tercera columna del segundo miembro de la ecuación (6-247) se convierte en

$$-a_3\mathbf{H} - a_2\mathbf{GH} - a_1\mathbf{G}^2\mathbf{H} = \mathbf{G}^3\mathbf{H}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-247), que es el segundo miembro de la ecuación (6-246), se convierte en

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}]$$

Así se ha demostrado que la ecuación (6-246) es cierta. Por lo tanto,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{GM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La deducción anterior se puede extender fácilmente al caso general de cualquier entero positivo n.

Problema A-6-6

Considere el sistema de estado completamente controlable

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

Defina

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

Defina también

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

Demuestre que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución Consideremos el caso donde $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT} = (\mathbf{MW})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{MW}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6-249}$$

Refiriéndonos al problema A-6-5, se tiene

$$(\mathbf{MW})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{MW}) = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{GM})\mathbf{W} = \mathbf{W}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-249) se puede reescribir como sigue:

$$\mathbf{W}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, debemos demostrar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6–250}$$

El primer miembro de la ecuación (6-250) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el segundo miembro

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es claro que la ecuación (6-250) es cierta. Por lo tanto, se ha demostrado que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se demostrará que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6–251}$$

Observe que la ecuación (6-251) se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{MW}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación puede verificarse fácilmente, debido a que

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{MW}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La deducción anterior puede extenderse con facilidad al caso general de cualquier entero positivo n.

Problema A-6-7

Considere el sistema siguiente:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que el sistema está en la forma canónica controlable.

Defina la matriz de transformación $\mathbf{T}$ como sigue:

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

donde

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que si el sistema está en la forma canónica controlable, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. En consecuencia, si el sistema está en la forma canónica controlable se tiene que

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución En vista de que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema A-6-8

Considere el sistema completamente observable

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

Defina la matriz de observabilidad como N:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

Demuestre que

$$\mathbf{N}^*\mathbf{G}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6-252}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

Solución Consideremos el caso donde $n = 3$. Entonces la ecuación (6-252) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{N}^*\mathbf{G}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6-253}$$

La ecuación (6-253) se puede volver a expresar como

$$\mathbf{N}^*\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{N}^* \tag{6-254}$$

Demostraremos que la ecuación (6-254) es cierta. El primer miembro de la ecuación (6-254) es

$$\mathbf{N}^*\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \end{bmatrix}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \\ \mathbf{CG}^3 \end{bmatrix}$$

El segundo miembro de la misma es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \\ -a_3\mathbf{C} - a_2\mathbf{CG} - a_1\mathbf{CG}^2 \end{bmatrix}$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que la matriz **G** satisface su propia ecuación característica, es decir, para el caso de $n = 3$,

$$\mathbf{G}^3 + a_1\mathbf{G}^2 + a_2\mathbf{G} + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto,

$$-a_1\mathbf{CG}^2 - a_2\mathbf{CG} - a_3\mathbf{C} = \mathbf{CG}^3$$

En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \\ \mathbf{CG}^3 \end{bmatrix}$$

Se ha demostrado así que la ecuación (6-254) es cierta. Por lo tanto,

$$\mathbf{N}^*\mathbf{G}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La deducción aquí presentada puede extenderse al caso general de cualquier entero positivo n.

Problema A-6-9

Considere el sistema de estado completamente controlable y completamente observable, dado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{6-255}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \tag{6-256}$$

Defina

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \vdots (\mathbf{G}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

Defínase también

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

Demuestre ahora que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

donde las b_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) son los coeficientes que aparecen en el numerador de la función de transferencia de pulso, cuando $\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D$ se escribe como sigue:

$$\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + D = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

donde $D = b_0$.

Solución Consideremos el caso cuando $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)\mathbf{G}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{6-257}$$

Observe que refiriéndonos al problema A-6-8, se tiene

$$(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)\mathbf{G}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} = \mathbf{W}[\mathbf{N}^*\mathbf{G}(\mathbf{N}^*)^{-1}]\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1}$$

Por lo tanto, se necesita demostrar que

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} \tag{6-258}$$

El primer miembro de la ecuación (6-258) es

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el segundo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación (6-258) es cierta. Por lo tanto, se ha demostrado que la ecuación (6-257) también lo es.

Ahora se demostrará que

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

es decir,

$$\mathbf{C}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1] \tag{6-259}$$

Observe que

$$[0 \quad 0 \quad 1](\mathbf{W}\mathbf{N}^*) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Por lo tanto, se ha demostrado que

$$[0 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{C}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

que es la ecuación (6-259).

Ahora definamos

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces la ecuación (6-255) se convierte en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}u(k) \tag{6-260}$$

y la ecuación (6-256) en

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}(k) + Du(k) \tag{6-261}$$

Para el caso de $n = 3$, la ecuación (6-260) será:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}u(k)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}$$

La función de transferencia pulso $F(z)$ para el sistema definido por las ecuaciones (6-260) y (6-261) es

$$F(z) = (\mathbf{C}\mathbf{Q})(z\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H} + D$$

Al observar que

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

se tiene

$$F(z) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} z & 0 & a_3 \\ -1 & z & a_2 \\ 0 & -1 & z + a_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D$$

Note que $D = b_0$. Como

$$\begin{bmatrix} z & 0 & a_3 \\ -1 & z & a_2 \\ 0 & -1 & z + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}\begin{bmatrix} z^2 + a_1 z + a_2 & -a_3 & -a_3 z \\ z + a_1 & z^2 + a_1 z & -a_2 z - a_3 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}[1 \quad z \quad z^2]\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{\gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} + b_0 \\ &= \frac{b_0 z^3 + (\gamma_1 + a_1 b_0)z^2 + (\gamma_2 + a_2 b_0)z + (\gamma_3 + a_3 b_0)}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} \\ &= \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma_1 = b_1 - a_1 b_0$, $\gamma_2 = b_2 - a_2 b_0$ y $\gamma_3 = b_3 - a_3 b_0$. Se ha demostrado así que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

Observe que lo que se ha deducido aquí puede extenderse fácilmente al caso en donde n es cualquier entero positivo.

Problema A-6-10

Considere el sistema definido por

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 + z + 0.16} \tag{6-262}$$

Refiriéndonos a la sección 6-4, obtenga las representaciones en el espacio de estados para este sistema en las tres configuraciones siguientes:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal

Solución

1. *Forma canónica controlable.* Al comparar las ecuaciones (6-262) con la ecuación (6-39), se obtiene

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.16, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1$$

Por lo tanto, refiriéndonos a las ecuaciones (6-37) y (6-38) resulta

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2. *Forma canónica observable.* En vista de que $a_1 = 1$, $a_2 = 0.16$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 1$, refiriéndonos a las ecuaciones (6-41) y (6-42), se obtiene que

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

3. *Forma canónica diagonal.* Observemos que

$$G(z) = \frac{\frac{4}{3}}{z + 0.2} + \frac{-\frac{1}{3}}{z + 0.8}$$

Al comparar esta última ecuación con la (6-47) resulta

$$\alpha_1 \beta_1 = \tfrac{4}{3}, \quad \alpha_2 \beta_2 = -\tfrac{1}{3}, \quad p_1 = -0.2, \quad p_2 = -0.8, \quad D = 0$$

Por lo tanto, escogiendo arbitrariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y refiriéndonos a las ecuaciones (6-45) y (6-46), resulta

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Problema A-6-11

Considere el sistema con doble integrador

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

y donde T es el período de muestreo. (Vea el problema A-5-16 para la deducción de esta ecuación de estado en tiempo discreto correspondiente al sistema con un doble integrador.) Determine la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ tal que la respuesta a una condición inicial arbitraria sea con oscilaciones muertas. Para el estado inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determine $u(0)$ y $u(T)$, para $T = 0.1$ s, $T = 1$ s y $T = 10$ s.

Solución Definamos

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

Entonces

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| &= \begin{vmatrix} z - 1 + \dfrac{T^2}{2}k_1 & -T + \dfrac{T^2}{2}k_2 \\ Tk_1 & z - 1 + Tk_2 \end{vmatrix} \\ &= z^2 - \left(2 - \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2\right)z + 1 + \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6-263}$$

La ecuación característica deseada es

$$z^2 = 0 \tag{6-264}$$

Por lo tanto, al comparar las ecuaciones (6-263) y (6-264) se obtiene

$$2 - \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 = 0$$

$$1 + \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 = 0$$

De las cuales resulta

$$k_1 = \frac{1}{T^2}, \qquad k_2 = \frac{3}{2T}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T^2} & \dfrac{3}{2T} \end{bmatrix}$$

A continuación se demostrará que la respuesta a las condiciones iniciales es con oscilaciones muertas. Suponga que el estado inicial es

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

La ecuación con la realimentación del estado es

$$\mathbf{x}((k+1)T) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(kT)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}b \\ -\frac{1}{T}a - \frac{1}{2}b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2T) \\ x_2(2T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}b \\ -\frac{1}{T}a - \frac{1}{2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, es claro que la respuesta es con oscilaciones muertas.

Se determinará ahora $u(0)$ y $u(T)$. Note que

$$u(kT) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(kT) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT)$$

Por lo tanto,

$$u(0) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\frac{1}{T^2}a - \frac{3}{2T}b$$

$$u(T) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{T}{4}b \\ -\frac{1}{T}a - \frac{1}{2}b \end{bmatrix} = \frac{1}{T^2}a + \frac{b}{2T}$$

Para $a = 1$ y $b = 1$, se tiene

$$u(0) = -\frac{1}{T^2} - \frac{3}{2T}, \qquad u(T) = \frac{1}{T^2} + \frac{1}{2T}$$

En particular, para $T = 0.1$ s,

$$u(0) = -115, \qquad u(T) = u(0.1) = 105$$

Para $T = 1$ s,

$$u(0) = -2.5, \qquad u(T) = u(1) = 1.5$$

Para $T = 10$ s,

$$u(0) = -0.16, \qquad u(T) = u(10) = 0.06$$

Observe que para un valor pequeño del periodo de muestreo T, se hacen grandes $u(0)$ y $u(T)$. Al aumentar el valor de T se reducen en forma significativa las magnitudes de $u(0)$ y de $u(T)$.

Problema A-6-12

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector de dimensión 3. Se supone que el sistema es de estado completamente controlable. Mediante la utilización de la técnica de ubicación de polos, se desea diseñar el sistema con polos en lazo cerrado en $z = \mu_1$, $z = \mu_2$ y $z = \mu_3$, donde las μ_i son distintas. Es decir, al usar el control con realimentación del estado

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

se desea obtener

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}| = (z-\mu_1)(z-\mu_2)(z-\mu_3) = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3$$

Demuestre que la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ deseada puede darse por

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1 \quad 1][\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]^{-1} \tag{6-265}$$

donde

$$\xi_i = (\mathbf{G} - \mu_i \mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}, \qquad i = 1,2,3 \tag{6-266}$$

Demuestre también que los vectores ξ_i son vectores característicos de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$; esto es, ξ_i satisface la ecuación

$$(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\xi_i = \mu_i \xi_i, \qquad i = 1,2,3$$

Solución Definamos

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$$

Al usar el teorema de Cayley-Hamilton, $\tilde{\mathbf{G}}$ satisface su propia ecuación característica:

$$\tilde{\mathbf{G}}^3 + \alpha_1\tilde{\mathbf{G}}^2 + \alpha_2\tilde{\mathbf{G}} + \alpha_3\mathbf{I} = \phi(\tilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{0} \tag{6-267}$$

Considere las identidades siguientes:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^2 = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^2 = \mathbf{G}^2 - \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{K} - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^3 = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^3 = \mathbf{G}^3 - \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^2$$

Si se multiplica cada una de las ecuaciones precedentes por α_3, α_2, α_1 y α_0 (siendo $\alpha_0 = 1$) en este orden, y sumando los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{G}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{G}}^2 + \tilde{\mathbf{G}}^3 = {} & \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{G} + \alpha_1\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}^3 - \alpha_2\mathbf{H}\mathbf{K} \\ & - \alpha_1\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{K} - \alpha_1\mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{H}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^2\end{aligned}$$

Al observar que el primer miembro de esta última ecuación es cero, esta última ecuación se puede reducir a

$$\mathbf{0} = \phi(\mathbf{G}) - [\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix}\alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{G}} \\ \mathbf{K}\end{bmatrix}$$

De modo que

$$\begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{G}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{G}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = [\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por [0 0 1], se obtiene

$$[0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{G}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{G}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

o bien

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G}) \qquad (6\text{–}268)$$ ·268)

que es la fórmula de Ackermann. Observando que

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{G}) &= \mathbf{G}^3 + \alpha_1\mathbf{G}^2 + \alpha_2\mathbf{G} + \alpha_3\mathbf{I} \\ &= (\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})\end{aligned}$$

tenemos

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})$$

Mediante la posmultiplicación de ambos miembros de esta última ecuación por $\xi_1 = (\mathbf{G} - \mu_1\,\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{H}$, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\xi_1 &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})\mathbf{H} \qquad (6\text{–}269)\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I}) &= \mathbf{G}^2 + \beta_{12}\mathbf{G} + \beta_{13}\mathbf{I} \\ (\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I}) &= \mathbf{G}^2 + \beta_{22}\mathbf{G} + \beta_{23}\mathbf{I} \\ (\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I}) &= \mathbf{G}^2 + \beta_{32}\mathbf{G} + \beta_{33}\mathbf{I}\end{aligned}$$

Entonces la ecuación (6-269) puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\xi_1 &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}(\mathbf{G}^2 + \beta_{22}\mathbf{G} + \beta_{23}\mathbf{I})\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix} \beta_{23} \\ \beta_{22} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \beta_{23} \\ \beta_{22} \\ 1 \end{bmatrix} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K}\xi_1 = 1$$

De manera similar,

$$\mathbf{K}\xi_2 = 1, \qquad \mathbf{K}\xi_3 = 1$$

En consecuencia,

$$\mathbf{K}[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = [1 \quad 1 \quad 1]$$

es decir,

$$\mathbf{K} = [1 \quad 1 \quad 1][\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]^{-1} \qquad (6\text{-}270)$$

La ecuación (6-270) da la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** deseada en términos de ξ_1, ξ_2 y ξ_3.

Para demostrar que los ξ_i son vectores característicos de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, note que

$$\begin{aligned}(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_i &= (\mathbf{G} - \mathbf{HK})(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H} \\ &= (\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I} + \mu_i\mathbf{I} - \mathbf{HK})(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H} \\ &= (\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H} + (\mu_i\mathbf{I} - \mathbf{HK})(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H} \\ &= \mathbf{H} + (\mu_i\mathbf{I} - \mathbf{HK})\xi_i \\ &= \mathbf{H} - \mathbf{HK}\xi_i + \mu_i\xi_i \end{aligned} \tag{6-271}$$

Como ya se ha demostrado anteriormente,

$$\mathbf{K}\xi_i = 1, \qquad i = 1, 2, 3$$

Por lo tanto, la ecuación (6-271) se puede simplificar a la forma

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_i = \mu_i\xi_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

Por lo tanto, los vectores ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son vectores característicos de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ correspondiente a los valores característicos μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente.

Problema A-6-13

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector de dimensión 3. Se supone que el sistema es de estado completamente controlable y que se desea respuesta con oscilaciones muertas al estado inicial $\mathbf{x}(0)$. (Es decir, los polos en lazo cerrado deseados deberán estar en el origen de modo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.)

Demuestre que la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** deseada puede darse mediante la fórmula

$$\mathbf{K} = [1 \quad 0 \quad 0][\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]^{-1} \tag{6-272}$$

donde

$$\xi_1 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$$
$$\xi_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}$$
$$\xi_3 = \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}$$

Demuestre también que los vectores ξ_i son vectores característicos generalizados de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$: esto es, que ξ_i satisface las ecuaciones

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_1 = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_2 = \xi_1$$
$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_3 = \xi_2$$

Solución Refiriéndonos a la ecuación (6-268), tenemos

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

donde

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^3$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G}^3 \tag{6-273}$$

Posmultiplicando ambos miembros de la ecuación (6-273) por $\xi_1 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\xi_1 &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G}^3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G}^2\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 1\end{aligned}$$

Así que

$$\mathbf{K}\xi_1 = 1$$

Posmultiplicando ambos miembros de la ecuación (6-273) por $\xi_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}$, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\xi_2 &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G}^3\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{GH} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K}\xi_2 = 0$$

De igual manera, si se posmultiplican ambos miembros de la ecuación (6-273) por $\xi_3 = \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\xi_3 &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G}^3\mathbf{G}^{-3}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0\end{aligned}$$

De manera que,

$$\mathbf{K}\xi_3 = 0$$

En consecuencia se tiene que

$$\mathbf{K}[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = [1 \quad 0 \quad 0]$$

En consecuencia,

$$\mathbf{K} = [1 \quad 0 \quad 0][\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]^{-1}$$

que es la ecuación (6-272).

Para demostrar que ξ_1 es un vector característico de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, observe que

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_1 = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{HKG}^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{HK}\xi_1$$

En vista de que $\mathbf{K}\xi_1 = 1$, se obtiene

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_1 = \mathbf{0}$$

Para demostrar que $\xi_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}$ es un vector característico generalizado de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, observe que

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_2 = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{HKG}^{-2}\mathbf{H} = \xi_1 - \mathbf{HK}\xi_2$$

Como $\mathbf{K}\xi_2 = 0$, se obtiene

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_2 = \xi_1$$

Similarmente, para demostrar que $\xi_3 = \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H}$ es un vector característico generalizado de la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, observe que

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_3 = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{G}^{-3}\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} - \mathbf{HKG}^{-3}\mathbf{H} = \xi_2 - \mathbf{HK}\xi_3$$

Y en vista de que $\mathbf{K}\xi_3 = 0$, se obtiene

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\xi_3 = \xi_2$$

Problema A-6-14

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector de dimensión 3 y $y(k)$ es un escalar. Se supone que el sistema es completamente observable. Se desea determinar la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ para un observador de predicción de orden completo, tal que la dinámica de error tenga raíces características en $z = \mu_1$, $z = \mu_2$ y $z = \mu_3$. Es decir

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = (z - \mu_1)(z - \mu_2)(z - \mu_3)$$
$$= z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3$$

Suponga que los valores característicos de $\mathbf{G}$ son λ_1, λ_2 y λ_3 y que son distintos de μ_1, μ_2 y μ_3. También suponga que μ_1, μ_2 y μ_3 son distintos.

Demuestre que la matriz $\mathbf{K}_e$ puede estar dada por

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}, \qquad i = 1, 2, 3$$

Demuestre también que las $\mathbf{f}_i^*$ son vectores característicos de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*$; esto es, $\mathbf{f}_i^*$ satisface la ecuación

$$(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*\mathbf{f}_i^* = \overline{\mu}_i\mathbf{f}_i^*, \qquad i = 1, 2, 3$$

donde $\overline{\mu}_i$ es el complejo conjugado de μ_i. (Observe que cualquiera de los valores característicos complejos se presentan en pares conjugados.)

Solución Refiriéndonos a la fórmula de Ackermann, tal como se dio mediante la ecuación (6-126) para la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$, se tiene

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al observar que

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^3 + \alpha_1\mathbf{G}^2 + \alpha_2\mathbf{G} + \alpha_3\mathbf{I} = (\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})$$

se tiene

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \mathbf{CG}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{6-274}$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación $\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})^{-1}$ resulta

$$\mathbf{f}_1\mathbf{K}_e = \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \mathbf{CG}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{6-275}$$

Definamos

$$(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I}) = \mathbf{G}^2 + \beta_{12}\mathbf{G} + \beta_{13}\mathbf{I}$$
$$(\mathbf{G} - \mu_2\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I}) = \mathbf{G}^2 + \beta_{22}\mathbf{G} + \beta_{23}\mathbf{I}$$
$$(\mathbf{G} - \mu_3\mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_1\mathbf{I}) = \mathbf{G}^2 + \beta_{32}\mathbf{G} + \beta_{33}\mathbf{I}$$

Entonces la ecuación (6-275) se convierte en

$$\mathbf{f}_1\mathbf{K}_e = \mathbf{C}(\mathbf{G}^2 + \beta_{22}\mathbf{G} + \beta_{23}\mathbf{I})\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \mathbf{CG}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$= [\beta_{23} \quad \beta_{22} \quad 1]\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \mathbf{CG}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CG}\\ \mathbf{CG}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 1$$

$$\mathbf{f}_1\mathbf{K}_e = 1$$

Similarmente se obtiene

$$\mathbf{f}_2\mathbf{K}_e = 1, \qquad \mathbf{f}_3\mathbf{K}_e = 1$$

Y así,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \mathbf{f}_3\end{bmatrix}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \mathbf{f}_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{6-276}$$

La ecuación (6-276) da la matriz deseada $\mathbf{K}_e$ en función de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_3$, donde

$$(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*\mathbf{f}_i^* = \mathbf{C}^* - \mathbf{C}^* + \overline{\mu}_i\mathbf{f}_i^* = \overline{\mu}_i\mathbf{f}_i^*$$

Para demostrar que las $\mathbf{f}_i^*$ son vectores característicos de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*$, note que

$$\begin{aligned}(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*\mathbf{f}_i^* &= (\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})^*[\mathbf{C}(\mathbf{G} - \mu_i\mathbf{I})^{-1}]^*\\ &= (\mathbf{G}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*)(\mathbf{G}^* - \overline{\mu}_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}^*\\ &= (\mathbf{G}^* - \overline{\mu}_i\mathbf{I} + \overline{\mu}_i\mathbf{I} - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*)(\mathbf{G}^* - \overline{\mu}_i\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}^*\\ &= \mathbf{C}^* + (\overline{\mu}_i\mathbf{I} - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*)\mathbf{f}_i^*\\ &= \mathbf{C}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e^*\mathbf{f}_i^* + \overline{\mu}_i\mathbf{f}_i^*\end{aligned} \tag{6-277}$$

Como se ha demostrado antes,

$$\mathbf{f}_i \mathbf{K}_e = 1$$

En consecuencia,

$$\mathbf{K}_e^* \mathbf{f}_i^* = 1$$

Por lo tanto la ecuación (6-277) se convierte en

$$(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})^* \mathbf{f}_i^* = \mathbf{C}^* - \mathbf{C}^* + \bar{\mu}_i \mathbf{f}_i^* = \bar{\mu}_i \mathbf{f}_i^*$$

Así que se ha demostrado que los vectores $\mathbf{f}_1^*$, $\mathbf{f}_2^*$ y $\mathbf{f}_3^*$ son vectores característicos de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})^*$ correspondientes a los valores característicos μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente.

Problema A-6-15

En el problema A-6-14 se obtuvo la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ para el caso en que los valores característicos μ_1, μ_2 y μ_3 de $\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ fueran distintos. Supongamos que deseamos una respuesta con oscilaciones muertas para el vector de error. Entonces requerimos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Demuestre que para este caso la matriz $\mathbf{K}_e$ puede darse como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}, \qquad \mathbf{f}_3 = \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}$$

[Note que los vectores $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_3$ dados aquí son los vectores característicos o vectores característicos generalizados de la matriz $(\mathbf{G} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})^*$.] El sistema se supone completamente observable.

Solución Refiriéndonos a la ecuación (6-274),

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{G} - \mu_1 \mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_2 \mathbf{I})(\mathbf{G} - \mu_3 \mathbf{I}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al tomar $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ y sustituir de acuerdo con esta última ecuación, se obtiene

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6-278}$$

La ecuación (6-278) da la matriz de ganancia de realimentación del observador $\mathbf{K}_e$ deseada cuando $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

Observe que la ecuación (6-278) puede ser modificada para leerse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G}^{-3} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-2} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a las siguientes tres ecuaciones:

$$\mathbf{C}\mathbf{G}^{-3}\mathbf{K}_e = \mathbf{f}_3\mathbf{K}_e = 0$$

$$\mathbf{C}\mathbf{G}^{-2}\mathbf{K}_e = \mathbf{f}_2\mathbf{K}_e = 0$$

$$\mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_e = \mathbf{f}_1\mathbf{K}_e = 1$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1\mathbf{K}_e \\ \mathbf{f}_2\mathbf{K}_e \\ \mathbf{f}_3\mathbf{K}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que también da la matriz de ganancia de realimentación deseada, cuando $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

Problema A-6-16

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponga que se utiliza el siguiente esquema de control:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Utilizando MATLAB, determine la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**, de modo que el sistema tenga polos en lazo cerrado en

$$z = 0.5 + j0.5, \qquad z = 0.5 - j0.5$$

Utilice la fórmula de Ackermann dada por la ecuación (6-68).

Solución Primero construimos la matriz **J**, cuyos valores característicos son los polos en lazo cerrado deseados.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.5 + j0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 - j0.5 \end{bmatrix}$$

El comando poly(**I**) da el polinomio característico para **J**.

```
p = poly(J)

p =

    1.0000   -1.0000    0.5000
```

Esta es la expresión MATLAB correspondiente al polinomio característico para **J**.

$$\text{poly}(\mathbf{J}) = \phi(\mathbf{J}) = \mathbf{J}^2 - \mathbf{J} + 0.5\mathbf{I}$$

donde **I** es la matriz de identidad. Para la matriz

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}$$

el comando polyvalm (poly (**J**), **G**) evalúa la $\phi(\mathbf{G})$ siguiente:

$$\phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 - \mathbf{G} + 0.5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.34 & -2 \\ 0.32 & 2.34 \end{bmatrix}$$

Vea la salida de MATLAB que sigue:

```
polyvalm(poly(J),G)

ans =

    0.3400   -2.0000
    0.3200    2.3400
```

Refiriéndonos a la fórmula de Ackermann, dada por la ecuación (6-68), la matriz **K** deseada se obtiene a partir de

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1][\mathbf{H} \quad \mathbf{GH}]^{-1}\phi(\mathbf{G})$$
$$= [0 \quad 1]\mathbf{M}^{-1}\phi(\mathbf{G})$$

donde $\mathbf{M} = (\mathbf{H} \quad \mathbf{GH})$. Un programa MATLAB para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación de estado **K** se da en el programa 6-4 de MATLAB.

MATLAB Programa 6-4

```
% -------Colocación de polo en el plano z -------

% *****Este programa determina el estado de la matriz de ganancia de
% realimentación K, basado en la fórmula de Akermann *****

% Anote la matriz de estado G la de control H *****

G = [0    1;-0.16   -1];
H = [0;1];

% *****Anote la matriz de controlabilidad M y
% compruebe su rango*****

M = [H    G*H];
rank(M)

ans =

        2

% *****Como el rango de la matriz de controlabilidad es 2,
```

```
% es.posible colocar un polo arbitrario*****

% ***** Anote el polo característico deseado definiéndo
% la siguiente matriz J y calcular poly(J)*****

J = [0.5+0.5*i   0;0   0.5-0.5*i]

JJ = poly(J)

JJ =

      1.0000      -1.0000       0.5000

% ***** Anote el polinomio característico Phi*****

Phi = polyvalm(poly(J),G);

% *****El estado de la matriz de ganancia de realimentación lo da******

K = [0   1]*inv(M)*Phi

K =

      0.3400      -2.0000

k1 = K(1), k2 = K(2)

k1 =

      0.3400


k2 =

      -2
```

Problema A-6-17

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión 3)
$u(k)$ = señal de control (escalar)
$y(k)$ = señal de salida (escalar)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

1. Determine la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**, tal que el sistema muestre una respuesta con oscilaciones muertas a cualquier estado inicial. Suponiendo que el estado es completamente medible, de modo que el estado real $\mathbf{x}(k)$ puede realimentarse para control, es decir,

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

determine la respuesta del sistema al estado inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

siendo a, b y c constantes arbitrarias.

2. Al suponer que sólo una porción del vector de estado es medible, es decir, solamente lo es la salida $y(k)$, diseñe el observador de orden mínimo tal que la respuesta de error del observador sea con oscilaciones muertas. Suponga que la configuración del sistema es la misma que la que se muestra en la figura 6-11.

3. Considerando que el estado observado se utiliza para realimentación, obtenga la respuesta del sistema a

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{e}}(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}(0)$ es el error de observador inicial para el observador de orden mínimo, y a, b, c, α y β son constantes arbitrarias.

4. Deduzca la función de transferencia de pulso $G_D(z)$ del regulador-observador.

Solución Observe que el sistema es de estado completamente controlable y observable.

1. La matriz de ganancia de realimentación de estado **K** requerida para respuesta con oscilaciones muertas se puede obtener fácilmente como sigue. Definamos

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Entonces

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ k_1 + 0.5 & k_2 + 0.2 & z + k_3 - 1.1 \end{vmatrix}$$

$$= z^3 + (k_3 - 1.1)z^2 + (k_2 + 0.2)z + k_1 + 0.5 = 0$$

Al igualar esta ecuación característica a la ecuación característica deseada (para una respuesta con oscilaciones muertas),

$$z^3 = 0$$

obtenemos

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [-0.5 \quad -0.2 \quad 1.1]$$

Con esta matriz **K**, la ecuación de sistema se convierte en

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \\ x_3(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

La respuesta de este sistema a un estado inicial arbitrario se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Claramente, la respuesta es con oscilaciones muertas.

2. Ahora diseñaremos un observador de orden mínimo, suponiendo que solamente la salida $y(k)$ es medible. Primero transformaremos el vector de estado $\mathbf{x}(k)$ a un nuevo vector de estado $\xi(k)$, tal que la matriz de salida $\mathbf{C}$ se transforme de $[0 \quad 1 \quad 0]$ a $[1 \quad 0 \quad 0]$. La matriz siguiente $\mathbf{T}$ llevará a cabo la transformación requerida:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces definimos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\xi(k)$$

De manera que las ecuaciones de sistema serán

$$\xi(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\xi(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\xi(k) = \hat{\mathbf{C}}\xi(k)$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.5 & 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{aa} & \hat{\mathbf{G}}_{ab} \\ \hat{\mathbf{G}}_{ba} & \hat{\mathbf{G}}_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

El sistema transformado está dado por lo tanto por

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.5 & 1.1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] u(k) \tag{6-279}$$

$$y(k) = \left[1 \,\vdots\, 0 \quad 0\right] \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} \tag{6-280}$$

En vista de que sólo se puede medir una variable de estado, $\xi_1(k)$, es necesario que se observen dos variables de estado. Por lo tanto, el orden del observador de orden mínimo es 2. Debido a que

$$\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{G}}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 1.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \end{bmatrix}[0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & -k_{e_1} \\ -0.5 & 1.1 - k_{e_2} \end{bmatrix}$$

la ecuación característica del observador se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_{bb} + \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{G}}_{ab}| = \begin{vmatrix} z & k_{e_1} \\ 0.5 & z - 1.1 + k_{e_2} \end{vmatrix} = z^2 + (k_{e_2} - 1.1)z - 0.5k_{e_1}$$

La ecuación característica deseada (para respuesta con oscilaciones muertas) es

$$z^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$k_{e_1} = 0, \qquad k_{e_2} = 1.1$$

es decir,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

3. La ecuación para el sistema con realimentación de estado, con un observador de orden mínimo, corresponde a la (6-163):

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(k+1) \\ \hline \mathbf{e}(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK\Gamma} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{G}_{ab} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(k) \\ \hline \mathbf{e}(k) \end{array}\right] \tag{6-281}$$

Volvamos a escribir la ecuación (6-281) en función del nuevo vector de estado $\xi(k)$ y del vector de error $\hat{\mathbf{e}}(k)$. Al notar que el estado observado es el utilizado para la realimentación, esto es,

$$u(k) = -\hat{\mathbf{K}}\hat{\boldsymbol{\xi}}(k)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \hat{\mathbf{G}}\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k) \\ &= \hat{\mathbf{G}}\boldsymbol{\xi}(k) - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}\hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \\ &= (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}})\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}[\boldsymbol{\xi}(k) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(k)] \\ &= (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}})\boldsymbol{\xi}(k) + \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Gamma}\hat{\mathbf{e}}(k) \end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{KT} = [-0.5 \quad -0.2 \quad 1.1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-0.2 \quad -0.5 \quad 1.1]$$

Por lo tanto, se puede modificar la ecuación (6-281) para quedar

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\xi}(k+1) \\ \hline \hat{\mathbf{e}}(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Gamma} \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{G}}_{ab} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\xi}(k) \\ \hline \hat{\mathbf{e}}(k) \end{array}\right]$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \\ \hat{e}_1(k+1) \\ \hat{e}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ \hat{e}_1(k) \\ \hat{e}_2(k) \end{bmatrix}$$

La respuesta de este sistema a la condición inicial dada puede obtenerse como sigue. Primero observe que la condición inicial supuesta es

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \hat{e}_1(0) \\ \hat{e}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \\ \hat{e}_1(0) \\ \hat{e}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_1(1) \\ \xi_2(1) \\ \xi_3(1) \\ \hat{e}_1(1) \\ \hat{e}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ -0.5\alpha + 1.1\beta \\ 0 \\ -0.5\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1(2) \\ \xi_2(2) \\ \xi_3(2) \\ \hat{e}_1(2) \\ \hat{e}_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5\alpha + 1.1\beta \\ c \\ -0.55\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_1(3) \\ \xi_2(3) \\ \xi_3(3) \\ \hat{e}_1(3) \\ \hat{e}_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.55\alpha \\ -0.5\alpha + 1.1\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1(4) \\ \xi_2(4) \\ \xi_3(4) \\ \hat{e}_1(4) \\ \hat{e}_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.55\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_1(5) \\ \xi_2(5) \\ \xi_3(5) \\ \hat{e}_1(5) \\ \hat{e}_2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es claro que la respuesta es con oscilaciones muertas. Para cualquier condición inicial, el tiempo de asentamiento es como máximo de cinco períodos de muestreo. (Esto significa que como máximo se necesitan dos períodos para que el vector de error se convierta en cero y, además, como máximo son necesarios tres períodos de muestreo para que el vector de estado se anule.)

4. Para deducir la función de transferencia de pulso $G_D(z)$ del regulador-observador, nos referimos a la ecuación de estado y a la ecuación de salida que se da en las ecuaciones (6-279) y (6-280), respectivamente. Las ecuaciones para el observador de orden mínimo son las (6-148) y (6-149), escritas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_b(k) - \mathbf{K}_e y(k) &= \tilde{\eta}(k) \\ \tilde{\eta}(k+1) &= (\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab})\tilde{\eta}(k) + [(\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \hat{\mathbf{G}}_{ba} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{aa}]y(k) + (\hat{\mathbf{H}}_b - \mathbf{K}_e \hat{H}_a)u(k) \end{aligned} \tag{6-282}$$

Para este problema,

$$\hat{\mathbf{G}}_{bb} - \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{G}}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{ba} - \mathbf{K}_e \hat{G}_{aa} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_b - \mathbf{K}_e \hat{H}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación (6-282) se convierte en

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Si se toma la transformada z de esta última ecuación resulta

$$z\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0.5 & z \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z)$$

Al resolver en función de $\eta(z)$, se obtiene

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z} \\ -\dfrac{0.5}{z^2} - \dfrac{0.2}{z} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} U(z)$$

La ecuación (6-148) será entonces

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_b(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix} Y(z) + \tilde{\boldsymbol{\eta}}(z)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z} \\ 1.1 - \dfrac{0.5}{z^2} - \dfrac{0.2}{z} \end{bmatrix} Y(z) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} U(z)$$

La señal de control $u(k)$ está dada por

$$u(k) = -\hat{\mathbf{K}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) = -[-0.2 \quad -0.5 \quad 1.1]\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k)$$

$$= 0.2y(k) - [-0.5 \quad 1.1]\tilde{\boldsymbol{\xi}}_b(k)$$

La transformada z de esta última ecuación se convierte así en

$$U(z) = 0.2Y(z) - [-0.5 \quad 1.1] \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z} \\ 1.1 - \dfrac{0.5}{z^2} - \dfrac{0.2}{z} \end{bmatrix} Y(z)$$

$$- [-0.5 \quad 1.1] \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{z} \end{bmatrix} U(z)$$

$$= \left[0.2 + \frac{0.5}{z} - 1.1\left(1.1 - \frac{0.5}{z^2} - \frac{0.2}{z}\right) \right] Y(z) - \frac{1.1}{z} U(z)$$

es decir,

$$\left(1 + \frac{1.1}{z}\right)U(z) = \left(-1.01 + \frac{0.72}{z} + \frac{0.55}{z^2}\right)Y(z)$$

de lo cual se obtiene la función de transferencia pulso $G_D(z)$ del regulador-observador como sigue:

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{1.01z^2 - 0.72z - 0.55}{z^2 + 1.1z} \tag{6-283}$$

La función de transferencia pulso de la planta puede obtenerse mediante la ecuación (5-60) como sigue:

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}})^{-1}\hat{\mathbf{H}}$$

$$= \frac{z}{z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5}$$

En la figura 6-23 se muestra un diagrama de bloques del sistema regulador diseñado.

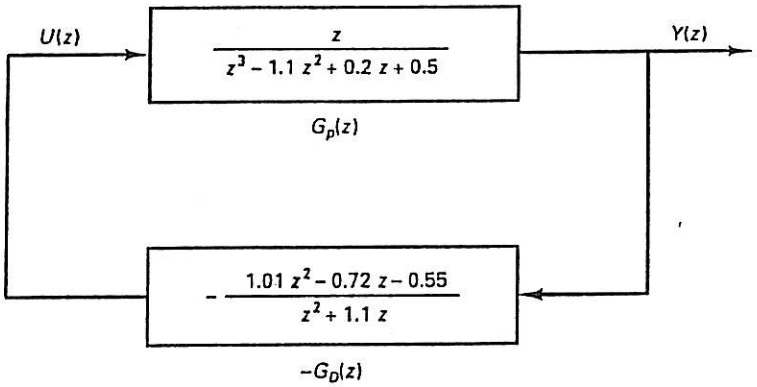


Figura 6-23 Diagrama de bloques del sistema regulador diseñado en el problema A-6-17.

Problema A-6-18

Considere el sistema de seguimiento definido por la ecuación (6-185). La ecuación característica para este sistema es

$$\left|z\mathbf{I}_{n+m} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{G} - \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_2\mathbf{H} - \mathbf{K}_1\mathbf{CH} \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{6-284}$$

Al volver a escribir la ecuación (6-284) se obtiene

$$\left|\begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} & -\mathbf{H} \\ \hline -\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2\mathbf{G} + \mathbf{K}_1\mathbf{CG} & z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m + \mathbf{K}_2\mathbf{H} + \mathbf{K}_1\mathbf{CH} \end{array}\right|$$

$$= \left|\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline -(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{C}) & \mathbf{I}_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} + \mathbf{H}(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{C}) & -\mathbf{H} \\ \hline \mathbf{K}_1\mathbf{C} & z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{array}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} + \mathbf{H}(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{C}) & -\mathbf{H} \\ \hline \mathbf{K}_1\mathbf{C} & z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m \end{array}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} + \mathbf{HK}_2 + \mathbf{HK}_1\mathbf{C} + \mathbf{HK}_1\mathbf{C}(z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m)^{-1} & -\mathbf{H} \\ \hline \mathbf{0} & z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m \end{array}\right]\right|$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}_1\mathbf{C}(z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m)^{-1} & \mathbf{I}_m \end{array}\right]\Bigg|$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}_2 + \mathbf{H}\mathbf{K}_1\mathbf{C} + \mathbf{H}\mathbf{K}_1\mathbf{C}(z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m)^{-1} & -\mathbf{H} \\ \hline \mathbf{0} & z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m \end{array}\right|$$

$$= |z\mathbf{I}_n - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}_2 + \mathbf{H}\mathbf{K}_1\mathbf{C} + \mathbf{H}\mathbf{K}_1\mathbf{C}(z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m)^{-1}||z\mathbf{I}_m - \mathbf{I}_m| = 0 \qquad (6\text{-}285)$$

La ecuación (6-285) da la ecuación característica correspondiente al sistema. Se pueden determinar las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ de forma tal que las raíces de esta ecuación característica asuman los valores deseados. Por ejemplo, si se desea una respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón, entonces determinaremos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ de modo que todas las raíces de la ecuación característica estén en el origen. [Cuando el vector de control $u(k)$ es de dimensión m (siendo $m > 1$), las matrices $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ no son únicas. Es decir, se puede obtener más de un conjunto de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$].

Refiriéndonos al problema de diseño del sistema de seguimiento analizado en el ejemplo 6-13, considere primero el problema de determinar una constante de ganancia integral K_1 y una matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$, utilizando la ecuación característica dada por la ecuación (6-284), o la ecuación (6-285), tal que la respuesta escalón unitario sea con oscilaciones muertas. A continuación considere diseñar un observador de predicción de orden completo (tercer orden), tal que la respuesta al error de observador sea con oscilaciones muertas. Si se define la matriz de ganancia de realimentación del observador como $\mathbf{K}_e$, determine esta matriz igualando los coeficientes de las potencias iguales de z de

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

y los de las potencias similares de z de la ecuación característica deseada, que es

$$z^3 = 0$$

Solución Definamos

$$\mathbf{K}_2 = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Al observar que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.01 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0.5 \quad 1 \quad 0]$$

la ecuación (6-285) se puede escribir como sigue:

$$|z\mathbf{I}_3 - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}_2 + \mathbf{H}K_1\mathbf{C} + \mathbf{H}K_1\mathbf{C}(zI_1 - I_1)^{-1}||zI_1 - I_1|$$

$$= |z\mathbf{I}_3 - \mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{K}_2 + \mathbf{H}K_1\mathbf{C}[1 + (z-1)^{-1}]||z-1|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.01 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1][0.5 \quad 1 \quad 0]\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) \right| |z-1|$$

$$= \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0.12 + k_1 + \dfrac{0.5K_1 z}{z-1} & 0.01 + k_2 + \dfrac{K_1 z}{z-1} & z - 1 + k_3 \end{vmatrix} |z-1|$$

$$= \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ (0.12 + k_1)(z-1) + 0.5K_1 z & (0.01 + k_2)(z-1) + K_1 z & (z-1)^2 + k_3(z-1) \end{vmatrix}$$

$$= z^4 + (-2 + k_3)z^3 + (1.01 + k_2 - k_3 + K_1)z^2$$
$$+ (0.11 + k_1 - k_2 + 0.5K_1)z - 0.12 - k_1 = 0$$

Esta ecuación característica debe ser igual a

$$z^4 = 0$$

Por lo tanto, requerimos que

$$-2 + k_3 = 0$$
$$1.01 + k_2 - k_3 + K_1 = 0$$
$$0.11 + k_1 - k_2 + 0.5K_1 = 0$$
$$-0.12 - k_1 = 0$$

de los cuales se obtiene

$$K_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad k_1 = -0.12, \qquad k_2 = \tfrac{0.97}{3}, \qquad k_3 = 2$$

es decir,

$$K_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad \mathbf{K} = [-0.12 \quad 0.3233 \quad 2]$$

[Es evidente que estos valores concuerdan con los proporcionados por las ecuaciones (6-199) y (6-200).]

A continuación, diseñaremos un observador de predicción de orden completo. Definamos

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \\ k_{e_3} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{G} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.12 & -0.01 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \\ k_{e_3} \end{bmatrix} [0.5 \quad 1 \quad 0]$$
$$= \begin{bmatrix} -0.5k_{e_1} & 1 - k_{e_1} & 0 \\ -0.5k_{e_2} & -k_{e_2} & 1 \\ -0.12 - 0.5k_{e_3} & -0.01 - k_{e_3} & 1 \end{bmatrix}$$

y se tiene que

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} z + 0.5k_{e_1} & -1 + k_{e_1} & 0 \\ 0.5k_{e_2} & z + k_{e_2} & -1 \\ 0.12 + 0.5k_{e_3} & 0.01 + k_{e_3} & z - 1 \end{vmatrix}$$

$$= z^3 + (-1 + 0.5k_{e_1} + k_{e_2})z^2 + (0.01 - 0.5k_{e_1} - 0.5k_{e_2} + k_{e_3})z$$
$$+ 0.12 - 0.115k_{e_1} - 0.5k_{e_2} + 0.5k_{e_3} = 0$$

Esta ecuación característica debe ser igual a la ecuación característica deseada

$$z^3 = 0$$

Por lo tanto,

$$-1 + 0.5k_{e_1} + k_{e_2} = 0$$
$$0.01 - 0.5k_{e_1} - 0.5k_{e_2} + k_{e_3} = 0$$
$$0.12 - 0.115k_{e_1} - 0.5k_{e_2} + 0.5k_{e_3} = 0$$

Al resolver estas tres ecuaciones simultáneas en función de k_{e1}, k_{e2} y k_{e3}, se obtiene

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5192 \\ 0.7404 \\ 0.6198 \end{bmatrix}$$

Esta expresión da la matriz de ganancia de realimentación deseada $\mathbf{K}_e$.

Recuerde que el diseño de la constante de ganancia integral K_1 y la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}_2$ (un problema de ubicación de polos), y el diseño de la matriz análoga del observador $\mathbf{K}_e$ (un problema de observador) son problemas independientes. Esto es, la matriz $\mathbf{K}_e$ no depende de K_1 ni de K_2, y viceversa.

PROBLEMAS

Problema B-6-1

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Determine las condiciones en a, b, c y d para la controlabilidad completa y observabilidad completa del estado.

Problema B-6-2

El sistema de control definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es de estado completamente controlable. Determine una secuencia de señales de control $u(0)$ y $u(1)$ tales que el estado $\mathbf{x}(2)$ sea

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema B-6-3

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determine la posibilidad de llevar el estado a

1. $$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.008 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema B-6-4

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & -\dfrac{a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Partiendo del estado inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determine si el estado $\mathbf{x}(3)$ puede ser llevado o no al origen. También determine si puede ser llevado o no al valor

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si el estado inicial es $\mathbf{x}(0) = 0$.

Problema B-6-5

Para el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

suponga que se observan las siguientes salidas:

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 2$$

Las señales de control dadas son

$$u(0) = 2, \qquad u(1) = -1$$

Determine el estado inicial $\mathbf{x}(0)$. También determine los estados $\mathbf{x}(1)$ y $\mathbf{x}(2)$.

Problema B-6-6

Demuestre que el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^* u(k)]$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión 4)

$u(k)$ = señal de control (escalar)

$y(k)$ = señal de salida (escalar)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

es de estado completamente controlable y completamente observable.

Demuestre también que, dado cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, todo vector de estado podrá ser llevado al origen en a lo máximo cuatro períodos de muestreo, si y sólo si la señal de control está dada por

$$u(k) = -\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

Problema B-6-7

Considere el sistema de control en tiempo continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema es de estado completamente controlable y completamente observable. Observe que los valores característicos de la matriz de estado son

$$\lambda_1 = -3 + j4, \qquad \lambda_2 = -3 - j4$$

Por lo tanto, este sistema involucra polos complejos.

Como se indicó en la sección 6-3, un sistema que es de estado completamente controlable y completamente observable, en ausencia de muestreo se conserva en tales condiciones después del muestreo, si y sólo si, para todo valor característico de la matriz de estado (raíz de la ecuación característica),

$$\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$$

implica que

$$\operatorname{Im} (\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2\pi n}{T}$$

donde T es el período de muestreo y $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Considere la versión discretizada de este sistema. Demuestre que para este sistema, si el período de muestreo $T = \pi n/4$ (siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$), entonces el sistema discretizado es no controlable y no observable.

Problema B-6-8

Considere el sistema de transferencia pulso

$$G(z) = \frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Refiriéndonos a la sección 6-4, obtenga la representación en el espacio de estados del sistema de las siguientes formas:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal

Problema B-6-9

Considere el sistema de función de transferencia pulso

$$G(z) = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Obtenga la representación en el espacio de estados del sistema en las formas siguientes:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal

Problema B-6-10

Considere el sistema siguiente que se da en la forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_3 - a_3 b_0 \vdots b_2 - a_2 b_0 \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Se desea transformar las ecuaciones del sistema a dicha forma canónica observable, mediante la transformación del vector de estado:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Determine una matriz de transformación $\mathbf{Q}$ de la forma canónica deseada.

Problema B-6-11

Considere el sistema de doble integrador

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

y T es el período de muestreo. (Vea el problema A-5-16 para la deducción de esta ecuación de estado en tiempo discreto en relación con el sistema de doble integrador.)

Se desea que los polos en lazo cerrado queden localizados en $z = \mu_1$ y $z = \mu_2$. Suponiendo que se utiliza el control de realimentación de estado

$$u(kT) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(kT)$$

determine la matriz $\mathbf{K}$ de ganancia de realimentación del estado.

Problema B-6-12

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.16 & 0.84 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Determine la matriz de ganancia de realimentación del estado, **K**, tal que cuando la señal de control esté dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

el sistema en lazo cerrado mostrará una respuesta con oscilaciones muertas a cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Problema B-6-13

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión 2)

$u(k)$ = señal de control (escalar)

$y(k)$ = señal de salida (escalar)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Diseñe un observador actual para el sistema. Se desea que la respuesta al error del observador inicial sea con oscilaciones muertas.

Problema B-6-14

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (de dimensión 3)

$u(k)$ = señal de control (escalar)

$y(k)$ = señal de salida (escalar)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Si se supone que es medible la salida $y(k)$, diseñe un observador de orden mínimo, tal que la respuesta al error de observador inicial sea con oscilaciones muertas.

Problema B-6-15

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Utilizando MATLAB, determine la matriz **K** de ganancia de realimentación de estado, tal que cuando la señal de control esté dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

el sistema en lazo cerrado (sistema de regulación) muestra respuesta con oscilaciones muertas a un estado inicial x(0). Escriba un programa MATLAB para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del estado, **K**.

Problema B-6-16

Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Mediante MATLAB, determine la matriz de ganancia de realimentación de observador, $\mathbf{K}_e$, tal que los valores característicos deseados para la matriz de observador sean

$$\mu_1 = 0.5 + j0.5, \qquad \mu_2 = 0.5 - j0.5$$

Suponga que la configuración del sistema sea idéntica a la mostrada en la figura 6-8. Escriba un programa MATLAB utilizando la fórmula de Ackermann.

Problema B-6-17

La figura 6-24 muestra un sistema de seguimiento, donde el controlador inicial tiene un tiempo de retardo de un período de muestreo. (Compare este sistema con el sistema de seguimiento ilustrado en la figura 6-18.)

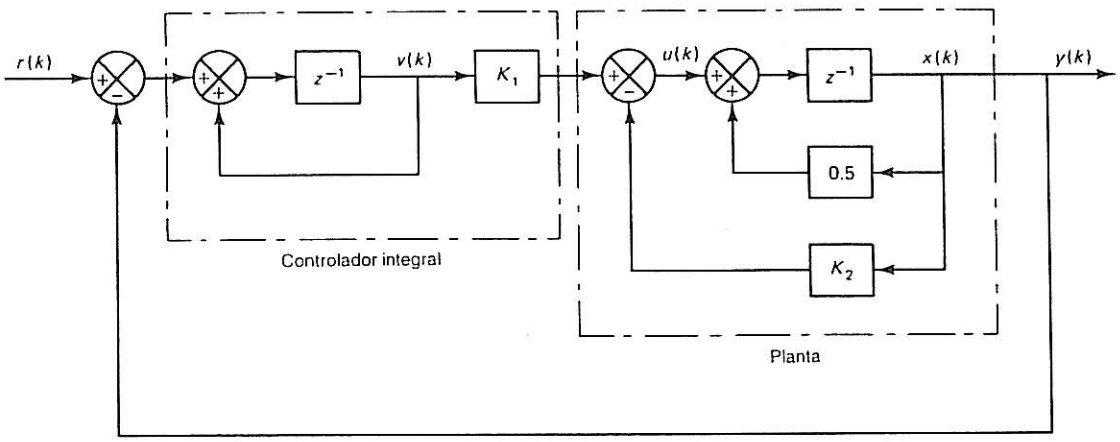


Figura 6-24 Sistema de seguimiento con realimentación del estado y control integral, que incluye un retardo unitario en la trayectoria directa.

Determine la ganancia de trayectoria directa K_1 y la ganancia de retroalimentación K_2, donde la respuesta a la entrada de secuencia escalón unitario $r(k) = 1$ (donde $k = 0, 1, 2, \ldots$) sea con oscilaciones muertas. Grafique la respuesta $y(k)$ en función de k.

Problema B-6-18

Considere el sistema de seguimiento que aparece en la figura 6-25. (Este sistema es similar al mostrado en la figura 6-24, excepto que el controlador integral tiene un elemento de retardo unitario en el lazo

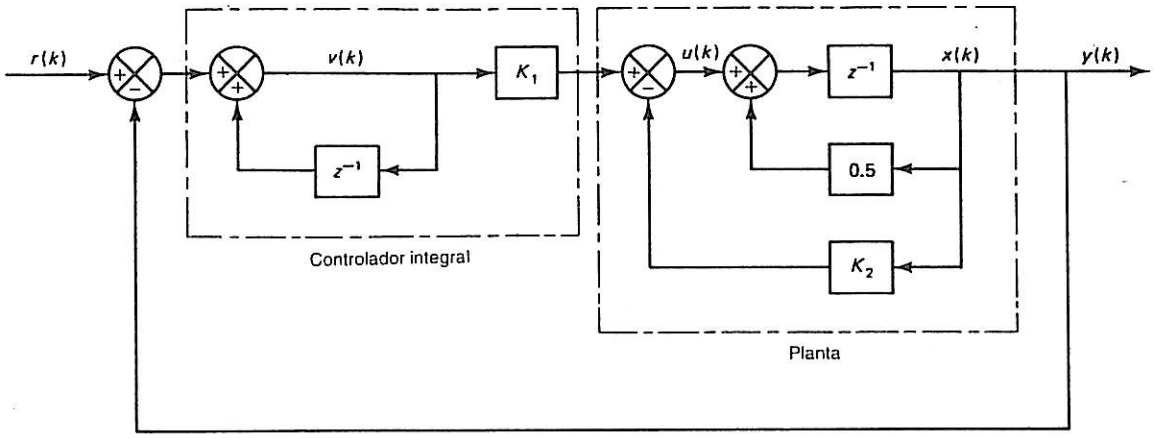


Figura 6-25 Sistema de seguimiento con realimentación del estado y control integral, que incluye un retraso unitario en el lazo menor.

menor.) Determine la ganancia de trayectoria directa K_1 y la ganancia de retroalimentación K_2, donde la respuesta a la entrada de secuencia escalón unitario $r(k) = 1$ (donde $k = 0, 1, 2, \ldots$), sea con oscilaciones muertas. Grafique la respuesta $y(k)$ en función de k.

7

Enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de sistemas de control

7-1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 6 se diseñaron sistemas del estado de control mediante realimentación, o retroalimentación, al usar la técnica de ubicación de polos. Si algunas de las variables de estado no se podían medir de manera directa, se empleaban los estados observados para propósitos de realimentación. El diseño completo se realizó en el espacio de estados.

Existe un enfoque diferente para el diseño de sistemas similares. Éste se denomina enfoque de ecuaciones polinomiales y es un enfoque alterno al diseño mediante ubicación de polos con un observador del estado de orden mínimo. (El enfoque de ecuaciones polinomiales se puede aplicar a sistemas con entradas y salidas múltiples. Sin embargo, en este capítulo, sólo se considera para sistemas con una entrada y una salida.)

Este capítulo presenta una explicación introductoria al enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de sistemas de control. En este enfoque se resuelven las ecuaciones Diofantinas para determinar polinomios en z que se pueden utilizar para construir sistemas físicamente realizables. Este punto de vista proporciona una solución matemática rápida a ciertos tipos de problemas de diseño.

La organización del capítulo es la siguiente: la sección 7-1 presenta algunos comentarios introductorios. La sección 7-2 explica las ecuaciones Diofantinas y provee los fundamentos matemáticos necesarios para el enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de sistemas de control. La sección 7-3 presenta un ejemplo simple para demostrar el enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño de un sistema de regulación que tenga una ecuación característica deseada. La sección 7-4 trata el enfoque de ecuaciones polinomiales al diseño de sistemas de control. La sección 7-5 estudia el diseño de un sistema de control mediante la igualación a un modelo. Aquí se diseña dicho sistema de modo que su respuesta a cualquier entrada sea la misma que la especificada por un

modelo matemático. Para diseñar dicho sistema, se determinan, con base en el enfoque de ecuaciones polinomiales, filtros físicamente realizables que producen las características deseadas del sistema.

7-2 LA ECUACIÓN DIOFANTINA

En esta sección se explica la ecuación Diofantina. Considere el sistema definido por la función de transferencia pulso

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{7-1}$$

donde

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$
$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n$$

Suponga que esta función de transferencia pulso es de estado completamente controlable y completamente observable. Esto es, no existe una cancelación entre polos y ceros en la función de trasferencia pulso, o $A(z)$ y $B(z)$ no tiene factores en común. Cuando los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ no tiene cancelaciones, se dice que son *polinomios coprimos*. Un polinomio en z se dice *mónico* si el coeficiente del término de mayor grado es uno. Por lo tanto, el polinomio $A(z)$ es mónico.

A continuación se define un polinomio estable $D(z)$ de grado $(2n - 1)$ como sigue:

$$D(z) = d_0 z^{2n-1} + d_1 z^{2n-2} + \cdots + d_{2n-2} z + d_{2n-1}$$

Entonces existen polinomios únicos de grado $(n - 1)$, $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ tales que

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z) \tag{7-2}$$

donde

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1}$$
$$\beta(z) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \cdots + \beta_{n-2} z + \beta_{n-1}$$

La ecuación (7-2) se denomina ecuación Diofantina, en honor a Diofanto de Alejandría (246?-330? d.C.). La ecuación Diofantina se puede resolver para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ mediante el uso de la matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ de $2n \times 2n$, la cual se define en términos de los coeficientes de los polinomios coprimos $A(z)$ y $B(z)$ como sigue:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_1 & \vdots & & \vdots & b_1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{7-3}$$

[Para utilizar la ecuación (7-3), el polinomio $A(z)$ debe ser mónico. De otra forma, se deberá modificar la ecuación (7-3).] Si $n = 4$, esta matriz se escribe como:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Sylvester **E** es no singular si y sólo si $A(z)$ y $B(z)$ son coprimos, o no tienen factores en común. Este hecho se puede ver de lo siguiente: en referencia a la matriz **E** anterior de 8 × 8, el determinante $|\mathbf{E}|$ es:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix} \\ &= b_0^4(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_8) \\ &\quad \cdot (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_8) \\ &\quad \cdot (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_8) \\ &\quad \cdot (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_8) \end{aligned} \tag{7-4}$$

donde $a_1, \ldots, a_4$ y $b_1, \ldots, b_4$ son los coeficientes de $A(z)$ y $B(z)$, respectivamente, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ y $\lambda_5 \ldots, \lambda_8$ son las raíces características de $A(z)$ y $B(z)$, respectivamente:

$$A(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)(z - \lambda_4)$$

$$B(z) = b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 = b_0(z - \lambda_5)(z - \lambda_6)(z - \lambda_7)(z - \lambda_8)$$

De la ecuación (7-4) se observa que el determinante $|\mathbf{E}|$ no es cero si y sólo si todos los factores multiplicativos en el segundo miembro de la ecuación no son cero, esto es, si y sólo si no hay cancelaciones entre $A(z)$ y $B(z)$. [Para obtener la ecuación (7-4), refiérase al problema A-7-1.]

Ahora se definen los vectores **D** y **M** tales que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Entonces los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ y $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ se pueden determinar a partir de

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} \tag{7-5}$$

La ecuación (7-5) da la solución a la ecuación Diofantina. [Para obtener la ecuación (7-5), véase el problema A-7-2.]

Ejemplo 7-1

Considere los siguientes $A(z)$ (un polinomio mónico de grado 2), $B(z)$ (un polinomio de grado 1), y $D(z)$ (un polinomio de grado 3):

$$A(z) = z^2 + z + 0.5$$

$$B(z) = z + 2$$

$$D(z) = z^3$$

[Es claro que no hay factores comunes en $A(z)$ y $B(z)$.] El problema es encontrar dos polinomios únicos $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ tales que:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z)$$

donde

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1$$

$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1$$

o bien

$$(\alpha_0 z + \alpha_1)(z^2 + z + 0.5) + (\beta_0 z + \beta_1)(z + 2) = z^3 \tag{7-6}$$

La ecuación (7-6) es una ecuación Diofantina. Para resolver esta ecuación para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, primero se debe observar que

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.5$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2$$

y entonces la matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ se escribe como:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz se puede obtener de una forma fácil con MATLAB. La salida de MATLAB para la inversa de la matriz $\mathbf{E}$ es:

```
E =

    0.5000         0    2.0000         0
    1.0000    0.5000    1.0000    2.0000
    1.0000    1.0000         0    1.0000
         0    1.0000         0         0

inv(E)
```

```
ans =

    0.4000   -0.8000    1.6000   -1.2000
         0         0         0    1.0000
    0.4000    0.2000   -0.4000    0.3000
   -0.4000    0.8000   -0.6000    0.2000
```

Ya que

$$D(z) = z^3$$

se tiene

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0$$

Por lo tanto, la matriz **D** es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al definir la matriz **M** como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

se obtiene la solución de la ecuación Diofantina de

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$$

como sigue:

```
M = (inv(E))*D

M =

   -1.2000
    1.0000
    0.3000
    0.2000
```

A partir de esta salida de MATLAB, se obtiene

$$\alpha_1 = -1.2, \quad \alpha_0 = 1, \quad \beta_1 = 0.3, \quad \beta_0 = 0.2$$

o bien

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 = z - 1.2$$
$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1 = 0.2z + 0.3$$

Los polinomios $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ determinados de esta forma satisfacen la ecuación Diofantina dada por la ecuación (7-6). Para verificar esto, se debe notar que

$$
\begin{aligned}
&(z - 1.2)(z^2 + z + 0.5) + (0.2z + 0.3)(z + 2) \\
&= z^3 - 1.2z^2 + z^2 - 1.2z + 0.5z - 0.6 + 0.2z^2 + 0.3z \\
&\quad + 0.4z + 0.6 \\
&= z^3
\end{aligned}
$$

7-3 EJEMPLO ILUSTRATIVO

En el capítulo 6 se discutió el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control. Se estableció que algunas de las variables de estado podían no estar disponibles para medirse de forma directa, y que en tales casos el enfoque de ubicación de polos requería los estados estimados u observados para la realimentación.

Veamos el ejemplo 6-11, donde se discutió el sistema de regulación con realimentación del estado. En tal sistema la ecuación característica estaba dada, y una de las variables de estado fue estimada mediante el uso de un observador de orden mínimo del tipo de oscilaciones muertas. En esta sección se mostrará que ese mismo sistema de regulación se puede diseñar mediante el enfoque de ecuaciones polinomiales.

Sistema de regulación diseñado en el ejemplo 6-11. El sistema de regulación diseñado en el ejemplo 6-11 se presenta en la figura 7-1. La planta es de estado completamente controlable y completamente observable. (No existe cancelación entre el polinomio numerador y el polinomio denominador.) El período de muestreo fue de 0.2 segundos, o $T = 0.2$. El controlador fue diseñado con base en el enfoque de ubicación de polos al especificar los polos de lazo cerrado en

$$z_1 = 0.6 + j0.4, \qquad z_2 = 0.6 - j0.4$$

y al incorporar un observador de orden mínimo para estimar las variables de estado para la realimentación. El observador de orden mínimo tenía la ecuación del error de observación

$$\phi(z) = z$$

El regulador diseñado fue

$$G_D(z) = 24\left(\frac{z - 0.6667}{z + 0.32}\right) \tag{7–7}$$

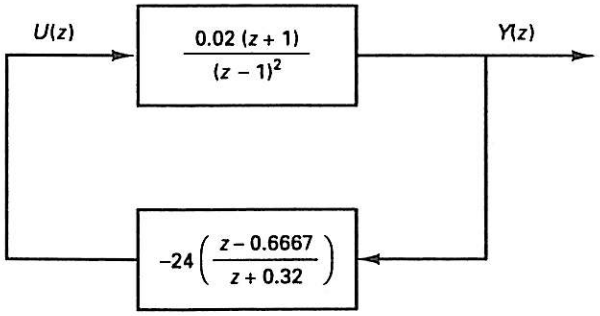


Figura 7-1 Sistema de regulación diseñado en el ejemplo 6-11.

A continuación se presentará el enfoque de ecuaciones polinomiales al diseño del mismo regulador dado por la ecuación (7-7) mediante la solución de la ecuación Diofantina.

Enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño del sistema de regulación. Considere el diagrama de bloques de la figura 7-2. La función de transferencia realimentada $\beta(z)/\alpha(z)$ funciona como un regulador. Se determinarán $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ mediante el enfoque de ecuaciones polinomiales. Primero se debe notar que la función de transferencia de la planta es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.02(z + 1)}{(z - 1)^2}$$

[$A(z)$ es mónico de grado 2 y no hay cancelación entre $A(z)$ y $B(z)$.] Entonces, aunque $R(z) = 0$, la función de transferencia pulso en lazo cerrado para el sistema está dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{0.02(z + 1)\alpha(z)}{\alpha(z)(z - 1)^2 + \beta(z)0.02(z + 1)}$$

Como se estableció antes, en el ejemplo 6-1, se requiere que los polos de lazo cerrado deseados mediante realimentación de estado sean

$$z_1 = 0.6 + j0.4, \qquad z_2 = 0.6 - j0.4$$

o que la ecuación característica deseada sea

$$\begin{aligned} H(z) &= (z - 0.6 - j0.4)(z - 0.6 + j0.4) \\ &= z^2 - 1.2z + 0.52 \end{aligned}$$

El polinomio del error del observador de orden mínimo fue

$$F(z) = z$$

Para determinar $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, se resuelve la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)H(z) = D(z) \tag{7-8}$$

donde

$$D(z) = F(z)H(z) = d_0 z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3 = z^3 - 1.2z^2 + 0.52z$$

Observe que $D(z)$ es un polinomio estable de grado $(2n - 1)$ en z (donde $n = 2$ para este caso). Ya que

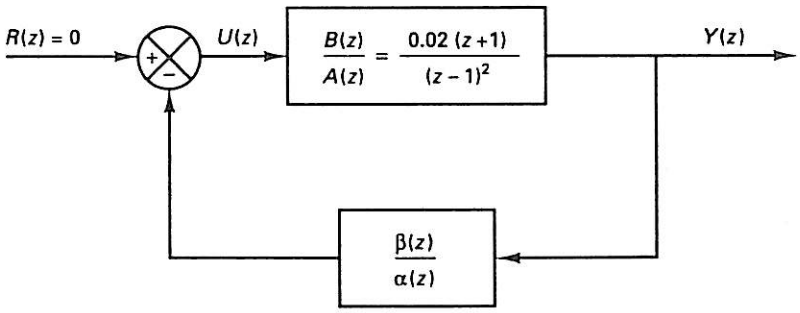


Figura 7-2 Diagrama de bloques del sistema de regulación.

$$A(z) = z^2 - 2z + 1$$
$$B(z) = 0.02z + 0.02$$

se tiene que

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0.02, \quad b_2 = 0.02$$

Al sustituir los polinomios $A(z)$, $B(z)$ y $D(z)$ en la ecuación (7-8), se obtiene

$$\alpha(z)(z^2 - 2z + 1) + \beta(z)(0.02z + 0.02) = z^3 - 1.2z^2 + 0.52z$$

Para resolver la ecuación Diofantina para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, primero se define la matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ de $2n \times 2n$ como:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.02 & 0 \\ -2 & 1 & 0.02 & 0.02 \\ 1 & -2 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de $\mathbf{E}$ se puede obtener fácilmente con MATLAB como sigue:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 37.5 & 12.5 & -12.5 & -37.5 \\ -12.5 & 12.5 & 37.5 & 62.5 \end{bmatrix}$$

$\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son polinomios de grado $n - 1 = 2 - 1 = 1$, o bien

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1$$
$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1$$

Se definen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Entonces el vector $\mathbf{M}$ se determina a partir de

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 37.5 & 12.5 & -12.5 & -37.5 \\ -12.5 & 12.5 & 37.5 & 62.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32 \\ 1 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1 = 0.32, \quad \alpha_0 = 1, \quad \beta_1 = -16, \quad \beta_0 = 24$$

Entonces, $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinan como

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 = z + 0.32$$
$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1 = 24z - 16$$

y el regulador realimentado se obtiene como

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = 24\left(\frac{z - 0.6667}{z + 0.32}\right)$$

que es idéntico al que se diseñó en el espacio de estado mediante el método de ubicación de polos combinado con un observador de orden mínimo.

7-4 ENFOQUE DE ECUACIONES POLINOMIALES PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

En la sección 7-3 se diseñó un sistema de regulación al usar el enfoque de ecuaciones polinomiales. El diagrama de bloques del sistema de regulación diseñado se presenta en la figura 7-3. Recuerde que $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinaron a partir de la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$$

donde $A(z)$ es un polinomio mónico de grado n, $B(z)$ es un polinomio de grado m ($m \leq n$) [se supuso que no hay factores comunes entre $A(z)$ y $B(z)$], $H(z)$ es el polinomio característico deseado para la parte de ubicación de polos, y $F(z)$ es el polinomio característico para el observador de orden mínimo. [Ambos polinomios $H(z)$ y $F(z)$ son polinomios estables.] El grado del polinomio $H(z)$ es n y el del $F(z)$ es $n - 1$. (Se supone que la salida del sistema es el único estado medible. Por lo tanto, el orden del observador mínimo es $n - 1$.)

A continuación se explicará el diseño de sistemas de control basado en el enfoque de ecuaciones polinomiales. Se consideran dos configuraciones diferentes de sistemas de control.

Configuración 1 del sistema de control. El sistema de regulación presentado en la figura 7-3 se puede modificar para un sistema de control cuya salida siga a la entrada de referencia. Un diagrama de bloques posible para este sistema de control se muestra en la figura 7-4. Como todo sistema de control, requiere tener una ganancia ajustable K_0. Esta ganancia K_0 debe ser ajustada para que la salida en estado estable $y(k)$ sea igual a uno cuando la entrada $r(k)$ es un secuencia de escalón unitario.

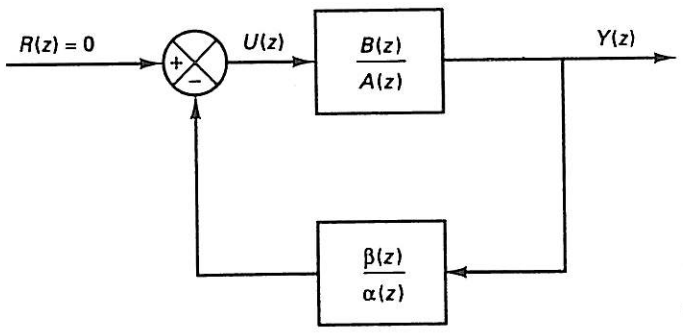


Figura 7-3 Diagrama de bloques del sistema de regulación.

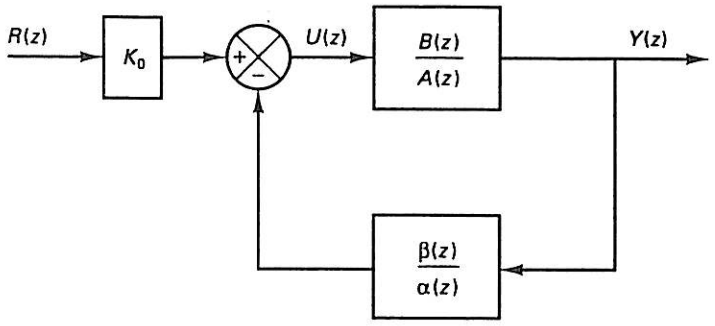


Figura 7-4 Diagrama de bloques del sistema de control.

La función de transferencia pulso en lazo cerrado $Y(z)/R(z)$ es

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{R(z)} &= K_0 \frac{\dfrac{B(z)}{A(z)}}{1 + \dfrac{B(z)\beta(z)}{A(z)\alpha(z)}} \\ &= K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} \\ &= K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \end{aligned} \tag{7-9}$$

Observe que el sistema en lazo cerrado es de orden $(2n - 1)$, a menos que ocurra alguna cancelación entre $\alpha(z)B(z)$ y $H(z)F(z)$. Observe que la dinámica del numerador ha cambiado de $B(z)$ a $K_0\alpha(z)B(z)$.

Para determinar K_0 se hace que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y(k) &= \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z - 1}{z} K_0 \frac{\alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} \frac{z}{z - 1} \\ &= K_0 \frac{\alpha(1)B(1)}{H(1)F(1)} \\ &= 1\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$K_0 = \frac{H(1)F(1)}{\alpha(1)B(1)}$$

Ejemplo 7-2

En el sistema de regulación considerado en la sección 7-3,

$$\begin{aligned}A(z) &= (z - 1)^2 \\ B(z) &= 0.02(z + 1) \\ H(z) &= z^2 - 1.2z + 0.52 \\ F(z) &= z \\ \alpha(z) &= z + 0.32 \\ \beta(z) &= 24z - 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia pulso en lazo cerrado $Y(z)/R(z)$ se obtiene de la ecuación (7-9) como

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0(z + 0.32)(0.02)(z + 1)}{z^3 - 1.2z^2 + 0.52z}$$

Observe que en este caso K_0 está dada por:

$$K_0 = \frac{H(1)F(1)}{\alpha(1)B(1)} = \frac{0.32 \times 1}{1.32 \times 0.04} = 6.0606$$

Note que el sistema es de tercer orden. La respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema con $K_0 = 6.0606$ fueron presentadas en la figura 6-16 y 6-17, respectivamente.

Configuración 2 del sistema de control. Un sistema de control con un diagrama de bloques diferente se puede diseñar mediante el uso del enfoque de ecuaciones polinomiales. Considere el diagrama de bloques de la figura 7.5. (Para obtener dicho diagrama de bloques, véase el problema A-7-3.)

De la figura 7-5, se obtiene la siguiente ecuación:

$$U(z) = -\left[\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z)\right] + K_0R(z)$$

que se puede simplificar a

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) = -\frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) + K_0R(z) \tag{7-10}$$

La función de transferencia pulso de la planta es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

donde $A(z)$ es un polinomio mónico de grado n y $B(z)$ es un polinomio estable de grado m ($m \leq n$). Ya que

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)}Y(z) \tag{7-11}$$

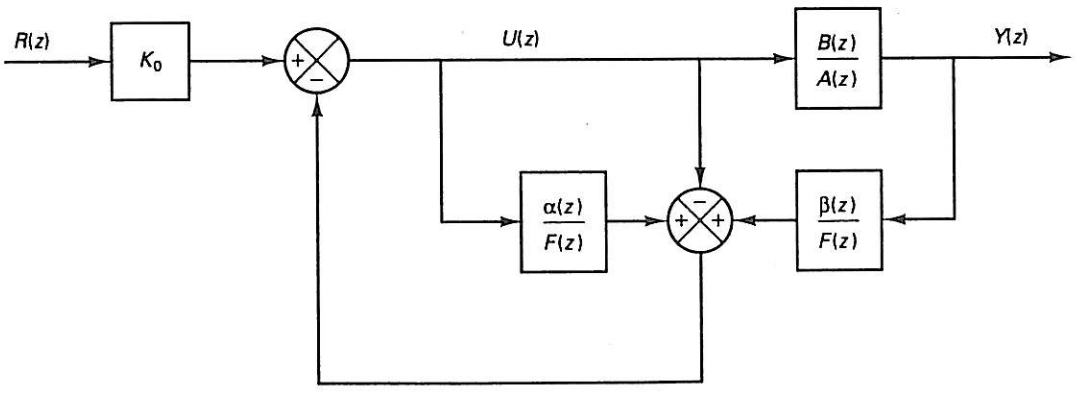


Figura 7-5 Diagrama de bloques del sistema de control.

al sustituir la ecuación (7-11) en la ecuación (7-10), se obtiene

$$\left[\frac{\alpha(z)A(z)}{F(z)B(z)} + \frac{\beta(z)}{F(z)}\right]Y(z) = K_0R(z)$$

Entonces

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0}{\dfrac{\alpha(z)A(z)}{F(z)B(z)} + \dfrac{\beta(z)}{F(z)}}$$

$$= \frac{K_0F(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)}$$

Ya que

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$$

se obtiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0F(z)B(z)}{H(z)F(z)} = \frac{K_0B(z)}{H(z)} \tag{7-12}$$

Note que el polinomio del observador $F(z)$ ha sido cancelado [como $F(z)$ es un polinomio estable, su cancelación es permitida], y el polinomio característico del sistema en lazo cerrado está dado por $H(z)$. $H(z)$ es el polinomio estable de grado n deseado pero que, en esencia, "se escoge en forma arbitraria". Por lo tanto, el sistema de control diseñado es de orden n. (En el caso del sistema de control de la configuración 1, el orden del sistema es $2n - 1$, a menos que ocurra cancelación en el sistema diseñado, lo que resulta en una reducción del orden del sistema.) También se observa que la dinámica del numerador de $Y(z)/R(z)$ no ha cambiado en el presente enfoque. [El numerador es $B(z)$ multiplicado por la constante K_0.]

Ejemplo 7-3

Se diseñará un sistema de control con base en el diagrama de bloques de la figura 7-5. La planta que se considera está dada por

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.02(z + 1)}{(z - 1)^2}$$

(El período de muestreo T es de 0.2 segundos). Se utilizarán los mismos polos en lazo cerrado deseados empleados en el ejemplo 7-2, es decir,

$$z_1 = 0.6 + j0.4, \qquad z_2 = 0.6 - j0.4$$

y se utilizará el mismo polinomio deseado del observador de orden mínimo, o bien,

$$\phi(z) = z$$

El polinomio característico deseado $H(z)$ se escribe así

$$H(z) = (z - 0.6 - j0.4)(z - 0.6 + j0.4)$$

$$= z^2 - 1.2z + 0.52$$

y el polinomio característico deseado $F(z)$ del observador como

$$F(z) = z$$

y se résuelve la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$$

o bien

$$\alpha(z)(z - 1)^2 + \beta(z)(0.02)(z + 1) = z^3 - 1.2z^2 + 0.52z \tag{7-13}$$

La ecuación (7-13) fue resuelta en la sección 7-3 y se obtuvieron $\alpha(z)$ y $\beta(z)$

$$\alpha(z) = z + 0.32$$

$$\beta(z) = 24z - 16$$

Al utilizar estas $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ y en referencia a la ecuación (7-12), la función de transferencia pulso en lazo cerrado $Y(z)/R(z)$ se puede escribir como:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = \frac{K_0(0.02z + 0.02)}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Para determinar la constante K_0, se requiere que $y(\infty)$ en la respuesta al escalón unitario sea igual a uno.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y(k) &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z - 1}{z}\frac{K_0(0.02z + 0.02)}{z^2 - 1.2z + 0.52}\frac{z}{z - 1} \\ &= \frac{K_0}{8} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de K_0 es

$$K_0 = 8$$

Entonces se obtiene la función de transferencia pulso en lazo cerrado

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.16z + 0.16}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Es claro que el sistema diseñado es de segundo orden. El diagrama de bloques del sistema diseñado se presenta en la figura 7-6*a*). La figura 7-6*b*) muestra el diagrama simplificado.

Ahora se examinará la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema diseñado. El programa para MATLAB 7-1 se utiliza para obtener la respuesta al escalón unitario. El resultado se presenta en la figura 7-7. El programa para MATLAB 7-2 da la respuesta a la rampa unitaria. El resultado se muestra en la figura 7-8.

El error en estado estable $e(\infty)$ al seguir a la entrada rampa unitaria se obtiene como: Ya que

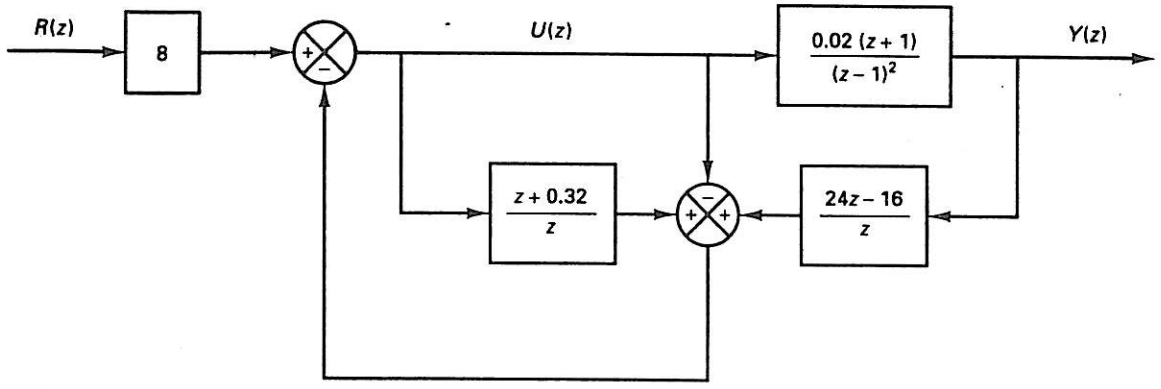
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{8(0.02z + 0.02)}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

se tiene que

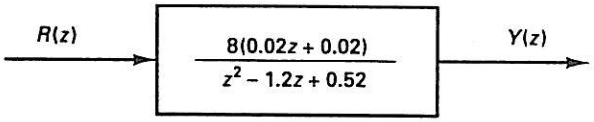
$$\begin{aligned}E(z) = R(z) - Y(z) &= \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right]R(z) \\ &= \frac{(z - 1)(z - 0.36)}{z^2 - 1.2z + 0.52}R(z)\end{aligned}$$

donde

$$R(z) = \frac{0.2z}{(z - 1)^2}$$



(a)



(b)

Figura 7-6 *a*) Diagrama de bloques del sistema de control diseñado mediante el enfoque de ecuaciones polinomiales; *b*) diagrama de bloques simplificado.

MATLAB Programa 7-1

```
num = [0   0.16   0.16];
den = [1   -1.2   0.52];
r = ones(1,41);
v = [0   40   0   1.6];
axis(v);
k = 0: 40;
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,`o´)
grid
title(`Unit-Step Response´)
xlabel(`k´)
ylabel(`y(k)´)
```

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z-0.36)}{z^2-1.2z+0.52} \frac{0.2z}{(z-1)^2}$$

$$= 0.4$$

El error en estado estable al seguir a la entrada rampa unitaria es 0.4.

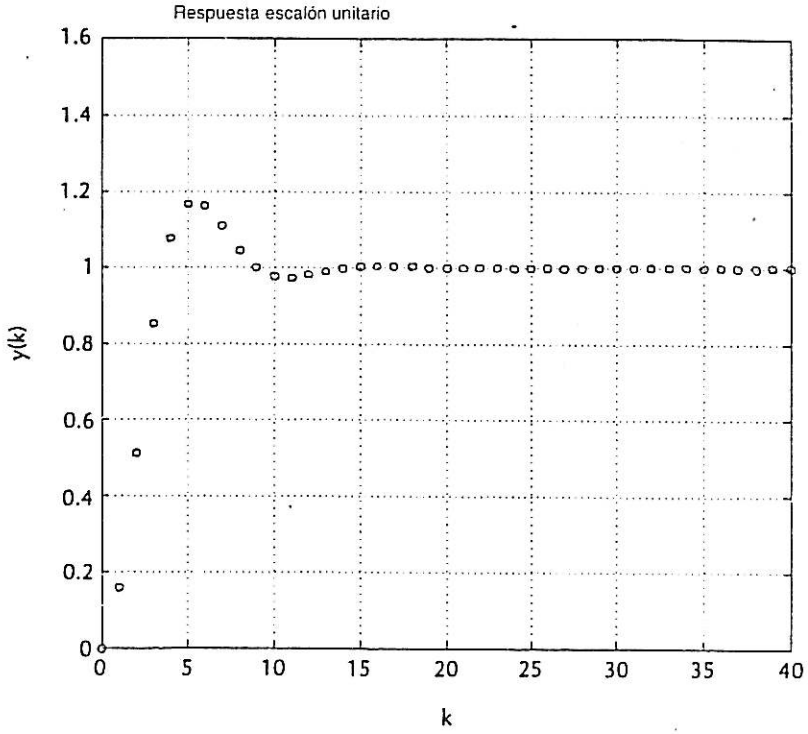


Figura 7-7 Respuesta al escalón unitario del sistema mostrado en la figura 7-6(*b*).

Programa de MATLAB 7-2

```
num = [0   0.16   0.16];
den = [1   -1.2   0.52];
k = 0:20;
r = [0.2*k];
v = [0   20   0   4];
axis(v);
y = filter(num,den,r);
plot(k,y,`o´,k,y`-´,k,0.2*k,`--´)
grid
title(`Unit-Ramp Response´)
xlabel(`k´)
ylabel(`y(k)´)
```

Al comparar las respuestas al escalón unitario de los sistemas de control de la configuración 1 y 2 se observa que son idénticas. Al comparar las respuestas a la rampa unitaria de los dos sistemas, se nota que el sistema de control de la configuración 2 tiene un error 10% menor en estado estable al seguir la entrada rampa unitaria que el sistema de control de la configuración 1.

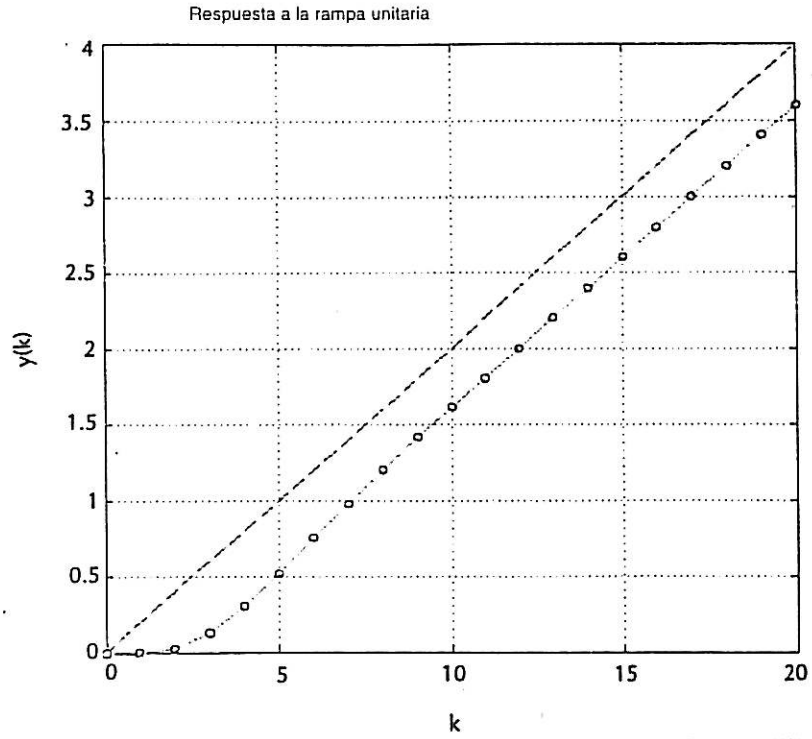


Figura 7-8 Respuesta a la rampa unitaria del sistema mostrado en la figura 7-6(*b*).

7-5 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE LA IGUALACIÓN A UN MODELO

En la técnica de diseño presentada en la sección 7-4 (del sistema de control de la configuración 2), el polinomio del observador $F(z)$ se canceló entre el numerador y el denominador de la función de transferencia pulso en lazo cerrado. [Véase la ecuación (7-12).] La ecuación característica del sistema diseñado fue $H(z)$ que es un polinomio estable de grado n. [$H(z)$ fue un polinomio estable de grado n deseado, pero escogido en un sentido "arbitrario".]

Suponga que la función de transferencia pulso de la planta es

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

donde $A(z)$ es un polinomio mónico de grado n en z y $B(z)$ es un polinomio de grado m en z ($m \leq n$), y se supone que no hay factores comunes entre $A(z)$ y $B(z)$. Si $B(z)$ es un polinomio estable (significa que todos los ceros están dentro del círculo unitario en el plano z), es posible escoger $H(z)$ tal que incluya al polinomio $B(z)$, o bien

$$H(z) = B(z)H_1(z)$$

Entonces, en referencia a la ecuación (7-12), se tiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = \frac{K_0 B(z)}{B(z)H_1(z)} = \frac{K_0}{H_1(z)}$$

Por lo tanto, se eliminaron los ceros del polinomio numerador lo que significa que si se desea se pueden eliminar los ceros de la planta.

Suponga que se quieren tener ciertos ceros en el numerador y ciertos polos en el denominador. Esto es, se quiere que el sistema posea ciertos polos deseados y ciertos ceros deseados como los de un "sistema modelo", o bien

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_{\text{modelo}} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Bajo ciertas condiciones, es posible diseñar tal sistema mediante el uso del enfoque de ecuaciones polinomiales. Ya que se obliga a que la función de transferencia pulso del sistema de control sea exactamente igual a la de un modelo, a este tipo de sistema de control se le llama sistema de control mediante la igualación a un modelo.

En el proceso de diseño discutido en la sección 7-4, $H(z)$ se escogió como el polinomio característico deseado de grado n. [$H(z)$ es un polinomio estable de grado n que no es único, pero sí un poco arbitrario con tal de que produzca una respuesta aceptable del sistema.] Se escoge un polinomio estable de grado $n - m$ como $H_1(z)$. [$H_1(z)$ debe ser un polinomio estable pero en un sentido arbitrario que produzca una respuesta aceptable del sistema resultante.] Ahora se define el producto de $B(z)$ por $H_1(z)$ como $H(z)$, es decir,

$$H(z) = B(z)H_1(z)$$

Sistema de control mediante la igualación a un modelo. Primero se hará referencia al diagrama de bloques de la figura 7-9. Se supone que la planta $B(z)/A(z)$ es de estado completamente controlable y completamente observable; esto es, no existen factores comunes entre $A(z)$ y $B(z)$. Se determinan $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ al resolver la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)B(z)H_1(z)$$

donde $F(z)$ es un polinomio estable de grado $(n - 1)$. [Observe que $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son polinomios de grado $(n - 1)$.] Entonces, del diagrama de bloques de la figura 7-9 se tiene

$$U(z) = -\left[\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) - U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z)\right] + V(z)$$

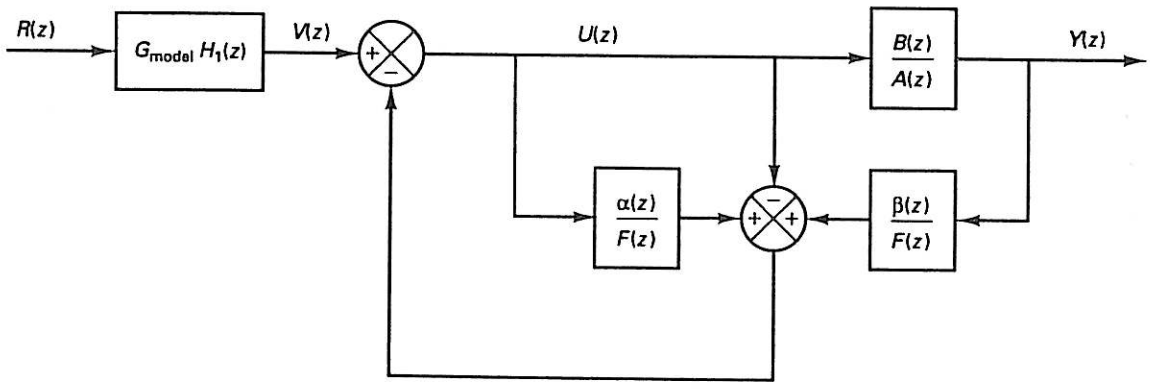


Figura 7-9 Diagrama de bloques del sistema de control mediante la igualación a un modelo.

o bien

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) = V(z)$$

Ya que

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)}Y(z)$$

se tiene

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}\frac{A(z)}{B(z)}Y(z) + \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) = V(z)$$

es decir

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)} = \frac{F(z)B(z)}{F(z)B(z)H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)}$$

También,

$$V(z) = G_{\text{modelo}}\, H_1(z)R(z)$$

Por lo tanto,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)}\frac{V(z)}{R(z)} = \frac{G_{\text{modelo}}H_1(z)}{H_1(z)} = G_{\text{modelo}}$$

En conclusión, se ha visto que si

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{modelo}}H_1(z)$$

entonces la función de transferencia pulso entre la salida $Y(z)$ y la entrada $R(z)$ es igual a G_{modelo}. Así, se logra el control mediante la igualación a un modelo.

Comentarios. Al aplicar el presente enfoque para el diseño de un sistema de control mediante la igualación a un modelo, es importante recordar lo siguiente:

1. Para hacer que la función de transferencia pulso $G_{\text{modelo}}\, H_1(z)$ sea físicamente realizable, el grado del polinomio numerador de $G_{\text{modelo}}\, H_1(z)$ debe ser igual o menor que el grado del polinomio denominador de $G_{\text{modelo}}\, H_1(z)$. De otra forma, el presente enfoque no se puede aplicar.
2. Como se hizo notar antes, el polinomio numerador $B(z)$ de la planta debe ser estable porque la cancelación de $B(z)$ se realiza entre el numerador y el denominador de $Y(z)/V(z)$. [Si $B(z)$ no es un polinomio estable, esto es, $B(z)$ tiene uno o varios ceros fuera del círculo unitario, entonces la cancelación de $B(z)$ en $Y(z)/V(z)$ producirá una respuesta inestable y el sistema diseñado será inestable.]

Ejemplo 7-4

Considere la planta definida por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)}$$

Suponga que el período de muestreo T es de 1 segundo. Se desea diseñar un sistema de control tal que el sistema en lazo cerrado sea:

$$\frac{Y_m(z)}{R_m(z)} = \frac{0.62z - 0.3}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

A esta función de transferencia pulso se le llamará función de transferencia pulso del modelo, o bien, G_{modelo}, y

$$G_{\text{modelo}} = \frac{Y_m(z)}{R_m(z)} = \frac{0.62z - 0.3}{z^2 - 1.2z + 0.52} \tag{7-14}$$

Se supone que se utiliza la configuración del sistema dada en la figura 7-9. Observe que para la planta dada

$$A(z) = z^2 - 1.3679z + 0.3679$$

$$B(z) = 0.3679z + 0.2642$$

Por lo tanto,

$$a_1 = -1.3679, \qquad a_2 = 0.3679$$

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 0.3679, \qquad b_2 = 0.2642$$

Claramente, el numerador $B(z)$ es un polinomio estable.

Como la función de transferencia pulso de la planta es de segundo orden (o $n = 2$), se escoge a $H_1(z)$ como un polinomio estable de primer grado [de grado $(n - 1)$]. Por ejemplo, se puede escoger a $H_1(z)$ como:

$$H_1(z) = z + 0.5$$

[La selección de $H_1(z)$ es, en cierto sentido arbitraria, siempre que sea un polinomio éstable.] Ahora se define

$$H(z) = B(z)H_1(z) = (0.3679z + 0.2642)(z + 0.5)$$

Se escoge a

$$F(z) = z$$

[$F(z)$ puede ser cualquier polinomio estable de grado $(n - 1)$.] Entonces

$$\begin{aligned} D(z) &= F(z)H(z) = F(z)B(z)H_1(z) = z(0.3679z + 0.2642)(z + 0.5) \\ &= 0.3679z^3 + 0.4482z^2 + 0.1321z \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_0 = 0.3679, \qquad d_1 = 0.4482, \qquad d_2 = 0.1321, \qquad d_3 = 0$$

Ahora se necesita resolver la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)B(z)H_1(z)$$

o bien

$$\alpha(z)(z^2 - 1.3679z + 0.3679) + \beta(z)(0.3679z + 0.2642) = 0.3679z^3 + 0.4482z^2 + 0.1321z$$

donde $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son polinomios en z de primer grado. Entonces la matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ de 4×4 para este problema es:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 & 0.2642 & 0 \\ -1.3679 & 0.3679 & 0.3679 & 0.2642 \\ 1 & -1.3679 & 0 & 0.3679 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, al utilizar MATLAB, $\mathbf{E}^{-1}$ se puede obtener como se muestra a continuación.

```
E =

    0.3679         0    0.2642         0
   -1.3679    0.3679    0.3679    0.2642
    1.0000   -1.3679         0    0.3679
         0    1.0000         0         0

inv(E)

ans =

    0.5359   -0.3849    0.2764    0.5197
         0         0         0    1.0000
    3.0387    0.5359   -0.3849   -0.7236
   -1.4567    1.0461    1.9669    2.3056
```

Se definen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1321 \\ 0.4482 \\ 0.3679 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz $\mathbf{M}$ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.2642 \\ 0.3679 \\ -0.3679 \\ 1.8680 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 = 0.3679z + 0.2642$$

$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1 = 1.8680z - 0.3679$$

Al usar estos polinomios $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, $Y(z)/V(z)$ se escribe como:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z)B(z)}{F(z)B(z)H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{z + 0.5}$$

Ya que $V(z)/R(z)$ es

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{modelo}} H_1(z) = \frac{(0.62z - 0.3)(z + 0.5)}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

la función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.62z - 0.3}{z^2 - 1.2z + 0.52} = G_{\text{modelo}}$$

El sistema de control mediante la igualación a un modelo diseñado tiene el diagrama de bloques que se presenta en la figura 7-10*a*). Este diagrama de bloques se puede simplificar a los mostrados en las figuras 7-10*b*) y *c*).

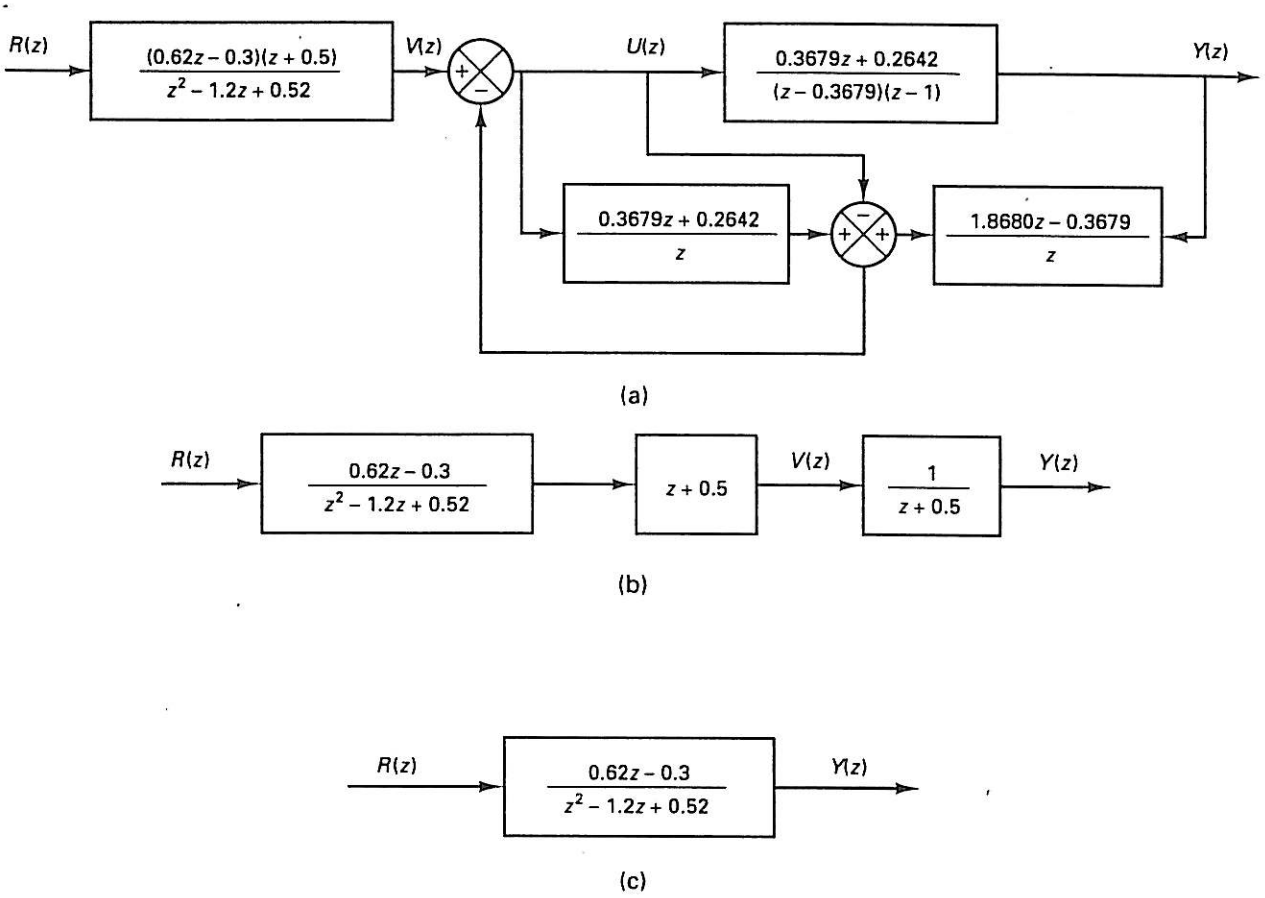


Figura 7-10 *a*) Diagrama de bloques del sistema de control mediante la igualación a un modelo; *b*) y *c*) diagramas de bloques simplificados.

La respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema modelo se muestra en las figuras 7-11 y 7-12, respectivamente. La respuesta al escalón unitario presenta aproximadamente un 30% de sobrepaso, y el error al seguir la entrada rampa unitaria es de alrededor de 0.55.

Comentarios. Es importante observar que este enfoque es diferente al de multiplicar el filtro siguiente (función de transferencia pulso)

$$\frac{(z - 0.3679)(z - 1)}{z^2 - 1.2z + 0.52} \frac{0.62z - 0.3}{0.3679z + 0.2642}$$

por la planta. Aunque, de forma matemática, el producto sea

$$\frac{(z - 0.3679)(z - 1)}{z^2 - 1.2z + 0.52} \frac{0.62z - 0.3}{0.3679z + 0.2642} \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)} = \frac{0.62z - 0.3}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

y el sistema resultante tiene la función de transferencia pulso del modelo, en este caso, la cancelación se realiza entre un polo críticamente estable en $z = 1$ y un cero en $z = 1$,

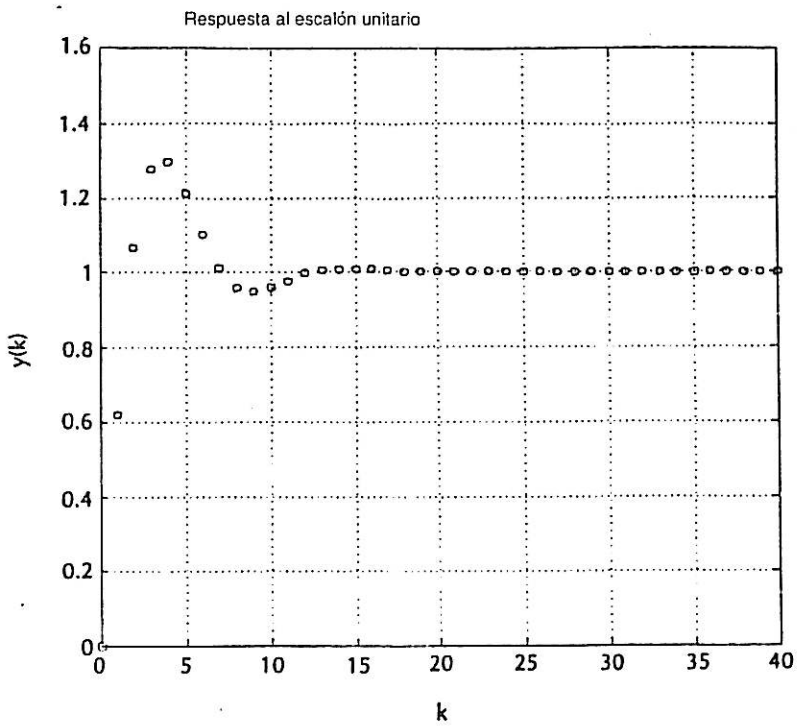


Figura 7-11 Respuesta al escalón unitario del modelo G_{modelo} dado por la ecuación (7-14).

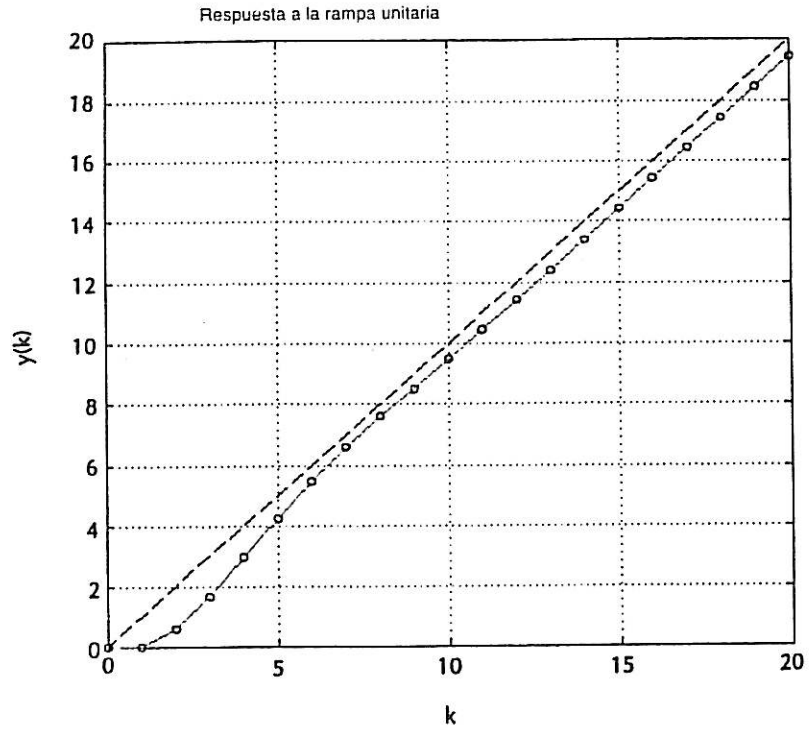


Figura 7-12 Respuesta a la rampa unitaria del modelo G_{modelo} dado por la ecuación (7-14).

y el sistema se vuelve inestable. [Recuerde que nunca debe cancelar un polo inestable (o críticamente estable) con un cero.] En el presente enfoque de ecuaciones polinomiales, no ocurren cancelaciones entre polos inestables (o críticamente estables) y ceros durante el proceso de diseño y, por lo tanto, el sistema resultante siempre es estable.

Si no se desea que exista error en estado estable al seguir la entrada rampa, entonces se requiere cambiar el modelo. Por ejemplo, si se utiliza la función de transferencia pulso siguiente como la función de transferencia pulso del modelo revisado

$$G'_{\text{modelo}} = \frac{0.8z - 0.48}{z^2 - 1.2z + 0.52} \tag{7-15}$$

entonces el error en estado estable al seguir la entrada rampa se hace cero. Sin embargo, el sobrepaso máximo en la respuesta al escalón unitario es de alrededor de 45%. La respuesta al escalón unitario y la respuesta a la rampa unitaria se presentan en las figuras 7-13 y 7-14, respectivamente.

Observe que al cambiar el modelo no se cambia el diagrama de bloques entre $Y(z)$ y $V(z)$, porque $Y(z)/V(z)$ es independiente de la función de transferencia pulso del modelo. Además, si se desea cambiar el modelo, sólo se necesita cambiar la función de transferencia pulso del primer bloque desde G_{modelo} a G'_{modelo}.

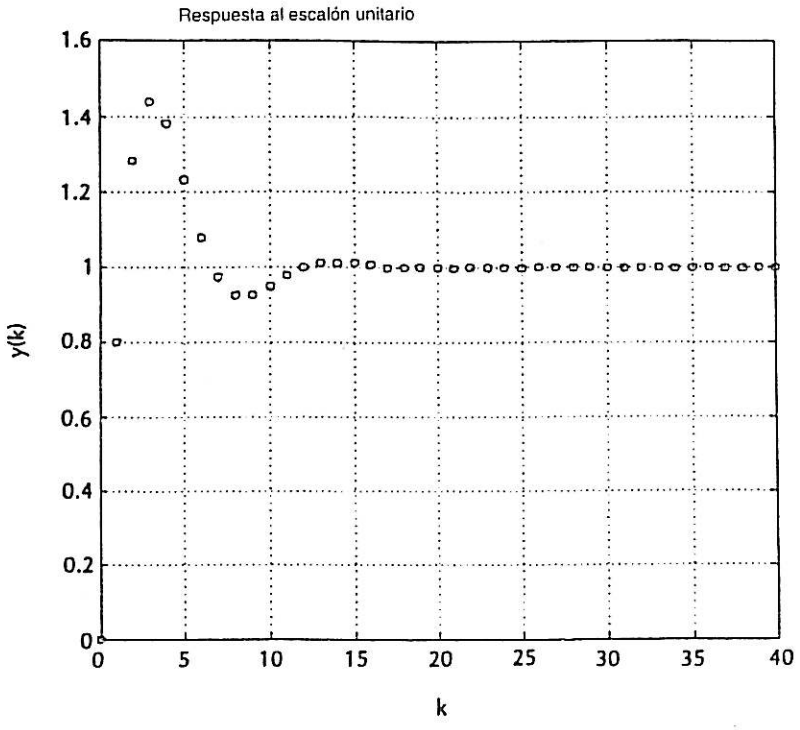


Figura 7-13 Respuesta al escalón unitario del modelo G'_{modelo} dado por la ecuación (7-15).

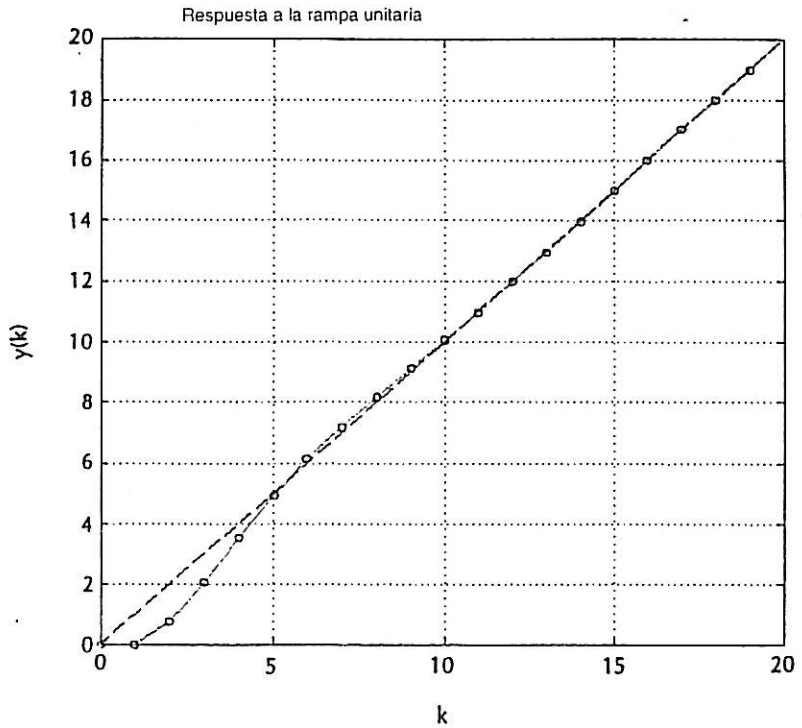


Figura 7-14 Respuesta a la rampa unitaria del modelo G'_{modelo} dado por la ecuación (7-15).

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-7-1

Considere los polinomios

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$
$$B(z) = b_0 z^2 + b_1 z + b_2$$

La matriz de Sylvester **E** se define como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

Muestre que la matriz **E** es no singular si y sólo si no existe cancelación entre los polinomios $A(z)$ y $B(z)$.

Solución Se supone que las raíces de $A(z) = 0$ son λ_1 y λ_2 y los de $B(z) = 0$ son λ_3 y λ_4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(z) &= z^2 + a_1 z + a_2 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \\ &= z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z + \lambda_1 \lambda_2 \\ B(z) &= b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = b_0(z - \lambda_3)(z - \lambda_4) \\ &= b_0 z^2 - b_0(\lambda_3 + \lambda_4)z + b_0 \lambda_3 \lambda_4 \end{aligned}$$

De donde,

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \qquad a_2 = \lambda_1\lambda_2$$
$$b_1 = -b_0(\lambda_3 + \lambda_4), \qquad b_2 = b_0\lambda_3\lambda_4$$

La matriz **E** se escribe en términos de λ como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 & b_0\lambda_3\lambda_4 & 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 & -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) & b_0\lambda_3\lambda_4 \\ 1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & b_0 & -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz **E** se puede calcular al utilizar la expansión de Laplace en menores.

$$\begin{aligned} |E| = {} & \begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 - b_0 & (\lambda_3 + \lambda_4) \\ 0 & b_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) & b_0\lambda_3\lambda_4 \\ 0 & b_0 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) & b_0\lambda_3\lambda_4 \\ b_0 & -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \\ 1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0\lambda_3\lambda_4 & 0 \\ 0 & b_0 \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0\lambda_3\lambda_4 & 0 \\ b_0 & -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0\lambda_3\lambda_4 & 0 \\ -b_0(\lambda_3 + \lambda_4) & b_0\lambda_3\lambda_4 \end{vmatrix} \\ = {} & \lambda_1^2\lambda_2^2 b_0^2 - (\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2)b_0^2(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_1\lambda_2 b_0^2(\lambda_3^2 + 2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_4^2) - \lambda_1\lambda_2 b_0^2\lambda_3\lambda_4 \\ & + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)b_0^2\lambda_3\lambda_4 - b_0^2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)\lambda_3\lambda_4 + b_0^2\lambda_3^2\lambda_4^2 \\ = {} & b_0^2(\lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2^2\lambda_4 \\ & + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4^2 + \lambda_1^2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\ & + \lambda_2^2\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3^2\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3^2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3\lambda_4^2 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2) \end{aligned}$$

Al reacomodar los términos del segundo miembro de esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}| = {} & b_0^2(\lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2\lambda_4 + \lambda_2^2\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 \\ & + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3^2\lambda_4 - \lambda_1^2\lambda_2\lambda_4 \\ & + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4^2 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4^2 + \lambda_1^2\lambda_3\lambda_4 \\ & - \lambda_1\lambda_3^2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3\lambda_4^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2) \\ = {} & b_0^2(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)(\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4) \\ = {} & b_0^2(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) \end{aligned}$$

El determinante $|\mathbf{E}|$ no es cero si al menos $\lambda_1 = \lambda_3$ o $\lambda_1 = \lambda_4$ o $\lambda_2 = \lambda_3$ o $\lambda_2 = \lambda_4$. Por lo tanto, **E** no es singular si y sólo si no ocurre cancelación entre $A(z)$ y $B(z)$. Esto es, si $A(z)$ y $B(z)$ son polinomios coprimos, entonces $|\mathbf{E}|$ no es cero y $\mathbf{E}^{-1}$ existe.

Problema A-7-2

Suponga que en los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ no ocurre cancelación y que están dados por

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$
$$B(z) = b_0 z^2 + b_1 z + b_2$$

Entonces la matriz de Sylvester **E** está dada por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

Se definen

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1$$
$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1$$
$$D(z) = d_0 z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3$$

Muestre que si

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z)$$

entonces α_0, α_1, β_0, y β_1 se pueden determinar al calcular

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Solución Primero se debe notar que

$$\begin{aligned} \alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) &= (\alpha_0 z + \alpha_1)(z^2 + a_1 z + a_2) + (\beta_0 z + \beta_1)(b_0 z^2 + b_1 z + b_2) \\ &= (\alpha_0 + \beta_0 b_0)z^3 + (\alpha_1 + \alpha_0 a_1 + \beta_1 b_0 + \beta_0 b_1)z^2 \\ &\quad + (\alpha_1 a_1 + \alpha_0 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_0 b_2)z + \alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2 \\ &= D(z) = d_0 z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3 \end{aligned}$$

De donde,

$$d_0 = \alpha_0 + \beta_0 b_0$$
$$d_1 = \alpha_1 + \alpha_0 a_1 + \beta_1 b_0 + \beta_0 b_1$$
$$d_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_0 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_0 b_2$$
$$d_3 = \alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2$$

Ahora se calcula **EM.** Ya que

$$\mathbf{EM} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2 \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_0 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_0 b_2 \\ \alpha_1 + \alpha_0 a_1 + \beta_1 b_0 + \beta_1 b_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 b_0 \end{bmatrix}$$

al comparar cada elemento del segundo miembro de esta última ecuación con d_3, d_2, d_1, y d_0, respectivamente, se tiene

$$\mathbf{EM} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

De donde,

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$$

o los coeficientes de los polinomios $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se pueden determinar al multiplicar $\mathbf{E}^{-1}$ por $\mathbf{D}$.

Problema A-7-3

En el capítulo 6 se diseñaron sistemas de regulación y sistemas de control al utilizar un esquema de realimentación del estado observado. En sistemas de una entrada y una salida, la salida siempre es medible. Por lo tanto, en dichos sistemas se requieren observadores de orden mínimo, en lugar de observadores de orden completo.

Considere el sistema de regulación diseñado mediante el enfoque de ubicación de polos combinado con el observador de orden mínimo. Las ecuaciones de la planta son

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n, $u(k)$ es un escalar, y $y(k)$ es también un escalar. Se supone que la planta es de estado completamente controlable y completamente observable. Las ecuaciones de la planta se pueden rescribir como

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{G}_{ba} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_a \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix}$$

donde $y(k) = x_a(k)$ es la variable de estado medible y $\mathbf{x}_b(k)$ está formado por las variables de estado no medibles.

La ecuación para el regulador observador (controlador) se pueden obtener de las ecuaciones (6-148), (6-149) y (6-159), reescritas

$$\tilde{\mathbf{x}}_b(k) - \mathbf{K}_e y(k) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \tag{7-16}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(k+1) = {} & (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k) \\ & + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{aa}]y(k) \\ & + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e H_a)u(k) \end{aligned} \tag{7-17}$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(k) \tag{7-18}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de ganancia de la realimentación del estado y $\mathbf{K}_e$ es la matriz de ganancia del observador. Se define

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ es un vector de dimensión n y $\tilde{\mathbf{x}}_b(k)$ es un vector de dimensión $(n-1)$ que consiste de las $(n-1)$ variables de estado observadas. También se define

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad \mathbf{k}_b]$$

Entonces la ecuación (7-18) es

$$u(k) = -[k_1 \quad \mathbf{k}_b] \begin{bmatrix} y(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \end{bmatrix} = -k_1 y(k) - \mathbf{k}_b \tilde{\mathbf{x}}_b(k) \tag{7-19}$$

Muestre que las ecuaciones del regulador (o controlador) pueden estar dadas por:

$$G_D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$$

donde

$$\alpha(z) = \mathbf{k}_b \mathbf{W}(z)\mathbf{Q} + F(z)$$

$$\beta(z) = (k_1 + \mathbf{k}_b \mathbf{K}_e)F(z) + \mathbf{k}_b \mathbf{W}(z)\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e G_{aa}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e H_a$$

$F(z) = |z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}|$ = ecuación característica para el observador de orden mínimo (polinomio estable de grado $n - 1$)

$$\mathbf{W}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})^{-1} F(z)$$

También muestre que el diagrama de bloques para el sistema de regulación puede estar dado como el que se muestra en la figura 7-15.

Solución Al tomar la transformada z de la ecuación (7-17), suponiendo condiciones iniciales cero, se obtiene

$$\begin{aligned} z\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) + [(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{G}_{ba} - \mathbf{K}_e G_{aa}]Y(z) + (\mathbf{H}_b - \mathbf{K}_e H_a)U(z) \\ &= (\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) + \mathbf{P}Y(z) + \mathbf{Q}U(z) \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = \mathbf{P}Y(z) + \mathbf{Q}U(z)$$

Resolviendo esta última ecuación para $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z)$, se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})^{-1}[\mathbf{P}Y(z) + \mathbf{Q}U(z)] \qquad (7\text{–}20)\ 7\text{-}20)$$

Ya que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab})^{-1} = \frac{\mathbf{W}(z)}{|z\mathbf{I} - \mathbf{G}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{G}_{ab}|} = \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}$$

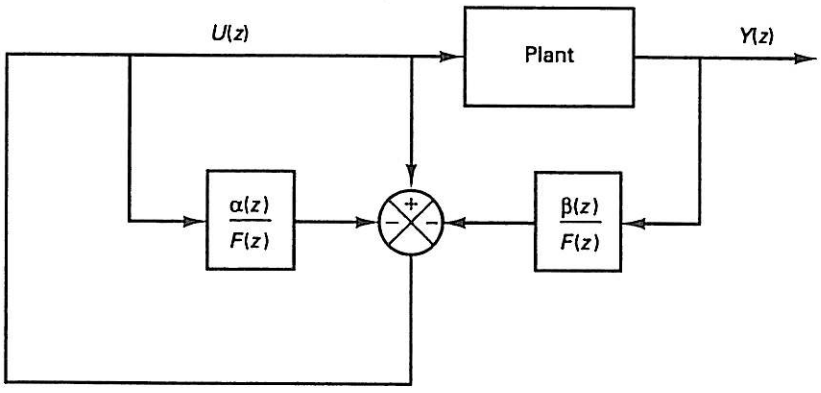


Figura 7-15 Diagrama de bloques del sistema de regulación.

la ecuación (7-20) se escribe como sigue:

$$\bar{\eta}(z) = \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}[\mathbf{P}Y(z) + \mathbf{Q}U(z)] \tag{7-21}$$

Al sustituir la ecuación (7-16) en la ecuación (7-19), se obtiene

$$u(k) = -k_1 y(k) - \mathbf{k}_b[\mathbf{K}_e y(k) + \bar{\eta}(k)]$$

La transformada z de esta última ecuación da

$$U(z) = -k_1 Y(z) - \mathbf{k}_b[\mathbf{K}_e Y(z) + \bar{\eta}(z)] \tag{7-22}$$

Al sustituir la ecuación (7-21) en la ecuación (7-22) da

$$\begin{aligned} U(z) &= -k_1 Y(z) - \mathbf{k}_b \mathbf{K}_e Y(z) - \mathbf{k}_b \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}[\mathbf{P}Y(z) + \mathbf{Q}U(z)] \\ &= -\mathbf{k}_b \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}\mathbf{Q}U(z) - \left[k_1 + \mathbf{k}_b \mathbf{K}_e + \mathbf{k}_b \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}\mathbf{P}\right]Y(z) \\ &= -\left[\frac{\mathbf{k}_b \mathbf{W}(z)\mathbf{Q} + F(z)}{F(z)} - 1\right]U(z) \\ &\quad -\left[k_1 + \mathbf{k}_b \mathbf{K}_e + \mathbf{k}_b \frac{\mathbf{W}(z)}{F(z)}\mathbf{P}\right]Y(z) \end{aligned} \tag{7-23}$$

Al utilizar $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ definidos en el enunciado del problema, la ecuación (7-23) se puede escribir como:

$$U(z) = -\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) + U(z) - \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z) \tag{7-24}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\alpha(z)}{F(z)}U(z) = -\frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z)$$

o bien

$$-\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \tag{7-25}$$

[Observe que $F(z)$ es un polinomio estable. Por lo tanto, las dos $F(z)$ se pueden cancelar.] La ecuación (7-25) es la ecuación del regulador (controlador). El diagrama de bloques que representa a la ecuación (7-24) se vuelve el de la figura 7-15. (Este corresponde a un sistema regulador.) Si este diagrama de bloques se incorpora al sistema de control, se obtiene el diagrama de bloques de la figura 7-5.

Problema A-7-4

En referencia al sistema de ejemplo discutido en la sección 7-3 (el sistema de regulación diseñado en el ejemplo 7-6) y al problema A-7-3, verifique que

$$\alpha(z) = k_b W(z)Q + F(z) = z + 0.32$$

$$\beta(z) = (k_1 + k_b K_e)F(z) + k_b W(z)P = 24(z - 0.6667)$$

Solución En referencia al ejemplo 6-11, se tiene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

De donde,

$$G_{aa} = 1, \qquad G_{ab} = 0.2, \qquad G_{ba} = 0, \qquad G_{bb} = 1,$$
$$H_a = 0.02, \qquad H_b = 0.2$$

Para la parte de ubicación de polos, la ecuación característica deseada fue

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^2 - 1.2z + 0.52 = 0$$

La ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ para la ecuación característica deseada se obtuvo como

$$\mathbf{K} = [8 \quad 3.2]$$

Por lo tanto,

$$k_1 = 8, \qquad k_b = 3.2$$

Para la parte del observador de orden mínimo, la ecuación característica del observador fue

$$\phi(z) = z = 0$$

La ganancia del observador K_e se obtuvo como

$$K_e = 5$$

De donde, P, Q, $F(z)$, y $W(z)$ se obtuvieron como sigue:

$$\begin{aligned} P &= (G_{bb} - K_e G_{ab})K_e + G_{ba} - K_e G_{aa} \\ &= (1 - 5 \times 0.2) \times 5 + 0 - 5 \times 1 = -5 \\ Q &= H_b - K_e H_a = 0.2 - 5 \times 0.02 = 0.1 \\ F(z) &= z \\ W(z) &= (z - G_{bb} + K_e G_{ab})^{-1} F(z) = (z - 1 + 5 \times 0.2)^{-1} z = 1 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= k_b W(z)Q + F(z) = 3.2 \times 1 \times 0.1 + z \\ &= z + 0.32 \\ \beta(z) &= (k_1 + k_b K_e)F(z) + k_b W(z)P \\ &= (8 + 3.2 \times 5)z + 3.2 \times 1 \times (-5) \\ &= 24z - 16 = 24(z - 0.6667) \end{aligned}$$

Problema A-7-5

Muestre que el diagrama de bloques de la figura 7-5 se puede modificar al que se muestra en la figura 7-16.

Solución El diagrama de bloques de la figura 7-5 se puede modificar al de la figura 7-17. Ya que la función de transferencia pulso del lazo menor es

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha(z)}{F(z)} - 1} = \frac{F(z)}{\alpha(z)}$$

al eliminar el lazo menor se obtiene el diagrama de bloques de la figura 7-16.

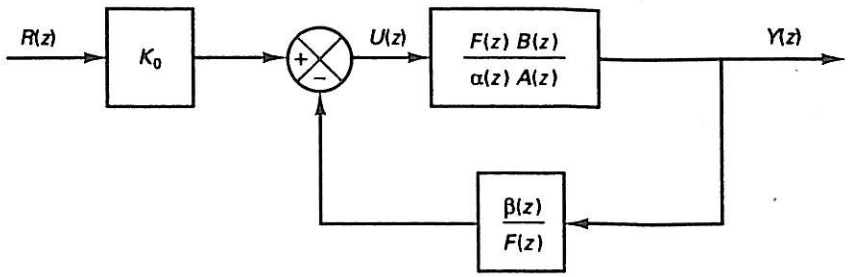


Figura 7-16 Diagrama de bloques modificado.

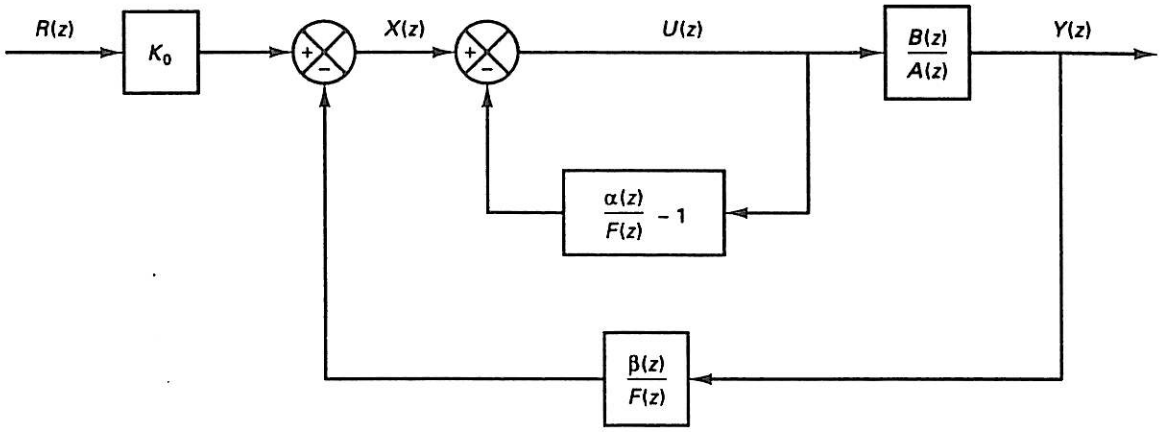


Figura 7-17 Diagrama de bloques de la figura 7-5 modificado para tener un lazo menor.

Problema A-7-6

Considere una planta definida por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + z + 0.16}$$

Utilizando el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñe un sistema de control para esta planta basado en el diagrama de bloques mostrado en la figura 7-5. Suponga que la ecuación característica deseada es

$$H(z) = (z - 0.6 - j0.4)(z - 0.6 + j0.4)$$
$$= z^2 - 1.2z + 0.52$$

y que $F(z)$ (el polinomio del observador de orden mínimo) es

$$F(z) = z$$

Solución En referencia a la figura 7-5, $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinan de la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z) = D(z)$$

donde

$$A(z) = z^2 + z + 0.16$$
$$B(z) = 1$$
$$D(z) = z^3 - 1.2z^2 + 0.52z$$

La matriz de Sylvester **E** para este caso es

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz **E** se puede obtener como

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0.16 & 0.16 \\ 0 & 1 & -1 & 0.84 \end{bmatrix}$$

Observe que $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son polinomios de grado $n - 1 = 2 - 1 = 1$, o bien,

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1$$

$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1$$

Se definen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -1.2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Entonces el vector **M** se determina a partir de $\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$ como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 1 \\ 0.352 \\ 2.56 \end{bmatrix}$$

De donde $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinan como

$$\alpha(z) = z - 2.2$$

$$\beta(z) = 2.56z + 0.352$$

En referencia a la ecuación (7-12), el sistema diseñado tiene la función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ siguiente:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)} = K_0 \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

A continuación se necesita determinar la ganancia K_0 de la figura 7-5. Se requiere que la salida en estado estable $y(\infty)$ a una entrada escalón unitario sea uno, o

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z} \frac{K_0}{z^2 - 1.2z + 0.52} \frac{z}{z - 1} = 1$$

de donde se obtiene

$$K_0 = 0.32$$

Por lo tanto, la función de transferencia pulso del sistema diseñado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.32}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Un diagrama de bloques para el sistema diseñado se presenta en la figura 7-18. La respuesta al escalón unitario del sistema diseñado se muestra en la figura 7-19.

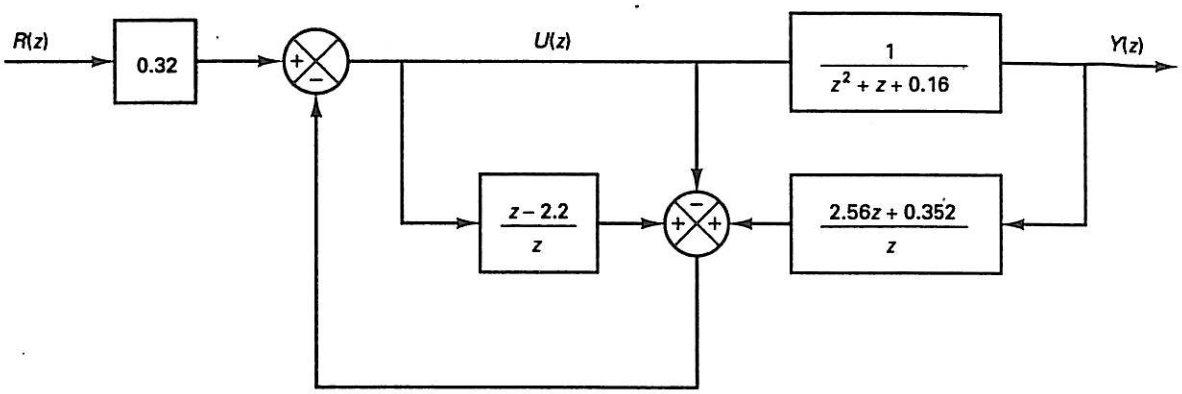


Figura 7-18 Diagrama de bloques del sistema diseñado en el problema A-7-6.

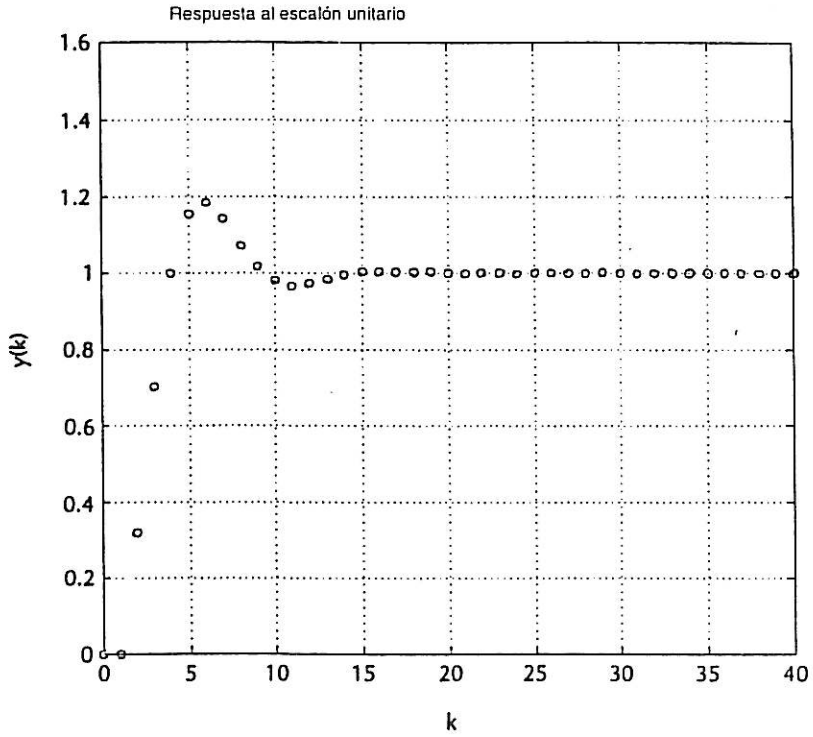


Figura 7-19 Respuesta al escalón unitario del sistema diseñado en el problema A-7-6.

Problema A-7-7

En el problema A-6-17 se consideró el diseño de un sistema regulador donde la planta estaba definida por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{7-26}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{7-27}$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

Se utilizó el enfoque de ubicación de polos para determinar la matriz de ganancia $\mathbf{K}$ de realimentación del estado tal que el sistema de regulación presente una respuesta del tipo de oscilaciones muertas para cualquier estado inicial. Se usó un observador de orden mínimo tal que la respuesta al error de observación fuera del tipo de oscilaciones muertas.

Con el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñe un sistema de control equivalente para esta planta cuya configuración del diagrama de bloques sea la misma que la que se presenta en la figura 7-4. Obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema diseñado. El período de muestreo T del sistema es de 0.2 segundos.

Solución En referencia al problema A-6-17, la ecuación característica deseada fue

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = z^3 = 0$$

Se define a

$$H(z) = z^3$$

La ecuación característica del error de observación fue

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_{bb} + \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{G}}_{ab}| = z^2 = 0$$

Por lo tanto, se define a

$$F(z) = z^2$$

A continuación se define la función de transferencia pulso $G_p(z)$ de la planta

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} \\ &= [0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0.5 & 0.2 & z - 1.1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 1 \quad 0]\frac{1}{z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5}\begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z}{z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5} = \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned}$$

donde

$$A(z) = z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5$$

$$B(z) = z$$

En consecuencia,

$$a_1 = -1.1, \quad a_2 = 0.2, \quad a_3 = 0.5$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$$

En referencia a la figura 7-4, el diagrama de bloques para el presente sistema se puede dibujar como se muestra en la figura 7-20.

El polinomio característico para el sistema completo (sistema con realimentación del estado observado) es

$$D(z) = H(z)F(z) = z^3 \cdot z^2 = z^5$$

Por lo tanto,

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = 0$$

Del diagrama bloques de la figura 7-20, la ecuación característica para el sistema es

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = 0$$

En consecuencia, en el enfoque de ecuaciones polinomiales se tiene

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$$

o bien

$$\alpha(z)(z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5) + \beta(z)z = z^5$$

Para determinar la función de transferencia pulso $\beta(z)/\alpha(z)$ del controlador, se resuelve esta ecuación Diofantina.

Para el presente problema, $n = 3$ y la matriz de Sylvester **E** de $2n \times 2n$ es de 6×6 como sigue:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1.1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E}^{-1}$ se puede obtener fácilmente mediante MATLAB, como se muestra a continuación.

```
E =

    0.5000         0         0         0         0         0
    0.2000    0.5000         0    1.0000         0         0
   -1.1000    0.2000    0.5000         0    1.0000         0
    1.0000   -1.1000    0.2000         0         0    1.0000
         0    1.0000   -1.1000         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0         0

inv(E)

ans =

    2.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0         0    1.0000    1.1000
         0         0         0         0         0    1.0000
   -0.4000    1.0000    0.0000         0   -0.5000   -0.5500
    2.2000         0    1.0000         0   -0.2000   -0.7200
   -2.0000         0         0    1.0000    1.1000    1.0100
```

Para determinar $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, primero se define

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

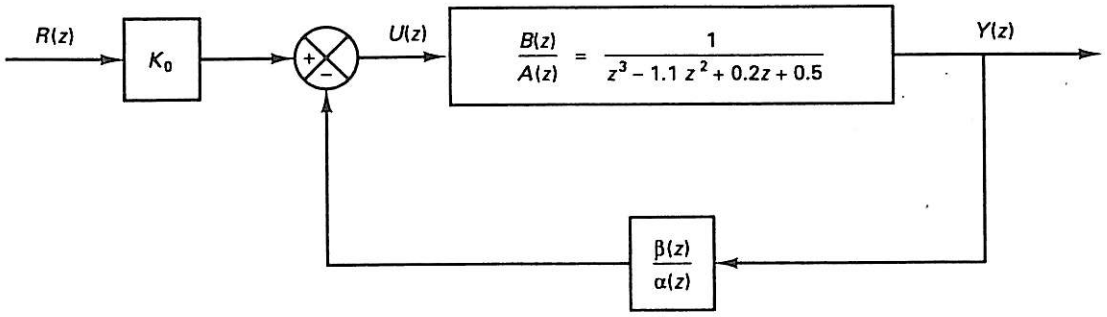


Figura 7-20 Diagrama de bloques del sistema de control considerado en el problema A-7-7.

y entonces **M** se determina como

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$$

la cual se puede calcular fácilmente con MATLAB como sigue:

```
D = [0;0;0;0;0;1];
M = (inv(E))*D

M =

         0
    1.1000
    1.0000
   -0.5500
   -0.7200
    1.0100
```

Ahora se determinan $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ como sigue:

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 1.1z$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 1.01z^2 - 0.72z - 0.55$$

Por lo tanto, el controlador diseñado es

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{1.01z^2 - 0.72z - 0.55}{z^2 + 1.1z}$$

Observe que esta función de transferencia pulso es la misma que la de la ecuación (6-283), la función de transferencia pulso del controlador observador obtenido en el problema A-6-17.

En referencia a la figura 7-20, la función de transferencia pulso en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 \dfrac{B(z)}{A(z)}}{1 + \dfrac{\beta(z)}{\alpha(z)}\dfrac{B(z)}{A(z)}} = \frac{K_0\,\alpha(z)B(z)}{\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z)}$$

$$= \frac{K_0\,\alpha(z)B(z)}{H(z)F(z)} = \frac{K_0(z^2 + 1.1z)z}{z^5} = \frac{K_0(z + 1.1)}{z^3}$$

Observe que la cancelación de z^2 ocurre entre $\alpha(z)\beta(z)$ y $H(z)F(z)$ y el sistema es de tercer orden. [El sistema podría haber sido de orden $(2n-1)$ (o de quinto orden) si no hubiera cancelación.]

Para determinar la ganancia K_0, se impone la condición de que la salida en estado estable $y(\infty)$ a la entrada escalón unitario sea igual a uno, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0(z+1.1)}{z^3} \frac{z}{z-1} = 2.1K_0 = 1$$

Por lo tanto,

$$K_0 = 0.4762$$

y la función de transferencia pulso en lazo cerrado es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.4762(z+1.1)}{z^3} = \frac{0.4762z + 0.5238}{z^3}$$

El sistema es de tercer orden. La respuesta del sistema diseñado al escalón unitario se muestra en la figura 7-21. Observe que en la respuesta al escalón unitario la salida alcanza la unidad en tres períodos de muestreo.

La respuesta del sistema diseñado a la rampa unitaria se presenta en la figura 7-22. El error al seguir la entrada rampa unitaria se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} E(z) = R(z) - Y(z) &= \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right] R(z) \\ &= \left(1 - \frac{0.4762z + 0.5238}{z^3}\right) R(z) \\ &= \frac{(z-1)(z^2 + z + 0.5238)}{z^3} R(z) \end{aligned}$$

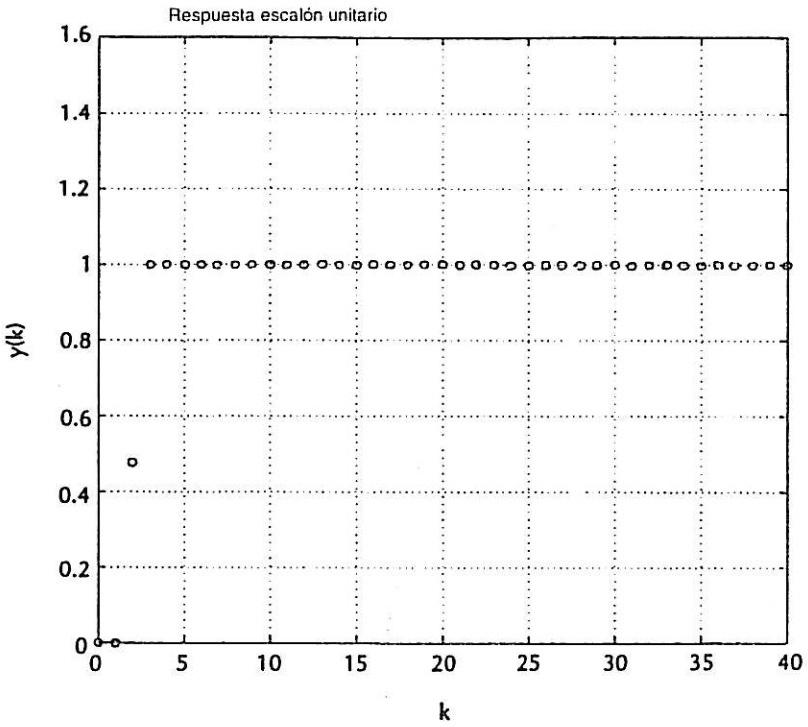


Figura 7-21 Respuesta al escalón unitario del sistema diseñado en el problema A-7-7.

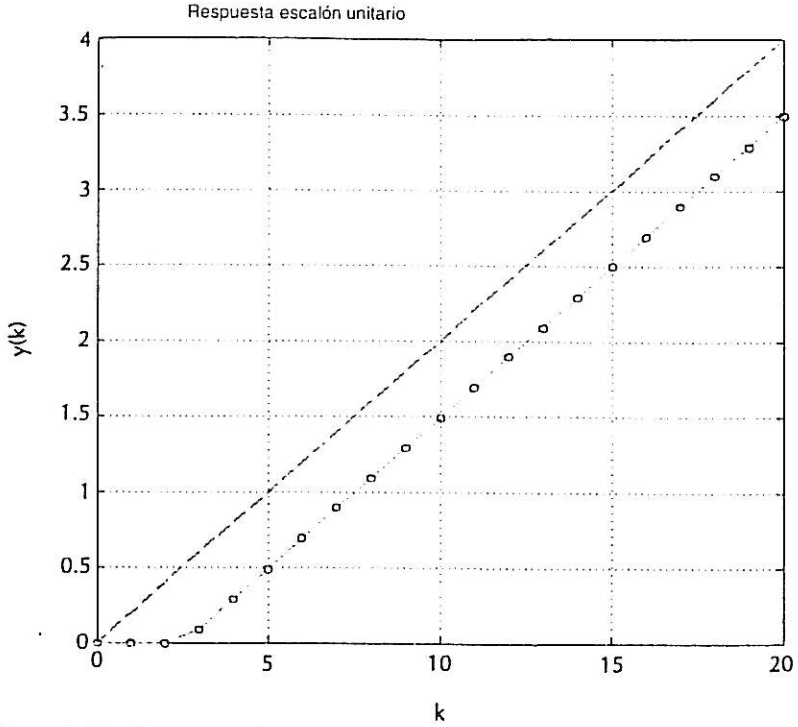


Figura 7-22 Respuesta a la rampa unitaria del sistema diseñado en el problema A-7-7.

La entrada rampa unitaria $R(z)$ está dada por

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.2z}{(z - 1)^2}$$

En consecuencia,

$$\lim_{k \to \infty} e(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z} \frac{(z - 1)(z^2 + z + 0.5238)}{z^3} \frac{0.2z}{(z - 1)^2}$$

$$= 0.5048$$

Por lo tanto, el error al seguir la entrada rampa unitaria es 0.5048, como se puede observar en la figura 7-22.

Problema A-7-8

En referencia al problema A-7-7, considere la misma planta dada por las ecuaciones (7-26) y (7-27). (También refiérase al problema A-6-17.) Suponga que los polinomios $H(z)$ y $F(z)$ son los mismos que los utilizados en el problema A-7-7.

Al emplear el enfoque polinomial, diseñe un sistema de control para la planta cuyo diagrama de bloques sea el mismo que el de la figura 7-5. Entonces obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema diseñado. El período de muestreo T del sistema es 0.2 segundos.

Solución Para este problema

$$H(z) = z^3, \qquad F(z) = z^2$$

En referencia al problema A-7-7, la función de transferencia pulso $G_p(z)$ de la planta es

$$G_p(z) = \frac{z}{z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

El diagrama de bloques para el presente sistema se muestra en la figura 7-23. La ecuación Diofantina para este problema es

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = H(z)F(z)$$

o bien

$$\alpha(z)(z^3 - 1.1z^2 + 0.2z + 0.5) + \beta(z)z = z^5$$

Esta ecuación Diofantina se resolvió en el problema A-7-7 y el resultado fue

$$\alpha(z) = z^2 + 1.1z$$

$$\beta(z) = 1.01z^2 - 0.72z - 0.55$$

Por lo tanto, en referencia a la ecuación (7-12), la función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ está dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 B(z)}{H(z)}$$

o bien

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0 z}{z^3} = \frac{K_0}{z^2}$$

Para determinar la ganancia K_0, se impone la condición de que la salida en estado estable $y(\infty)$ a la entrada escalón unitario sea igual a uno, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0}{z^2} \frac{z}{z-1} = K_0 = 1$$

En consecuencia,

$$K_0 = 1$$

Por lo tanto, $Y(z)/R(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^2}$$

El sistema diseñado es de segundo orden. La respuesta al escalón unitario del sistema diseñado se muestra en la figura 7-24. Observe que en la respuesta al escalón unitario la salida alcanza la unidad en dos períodos de muestreo.

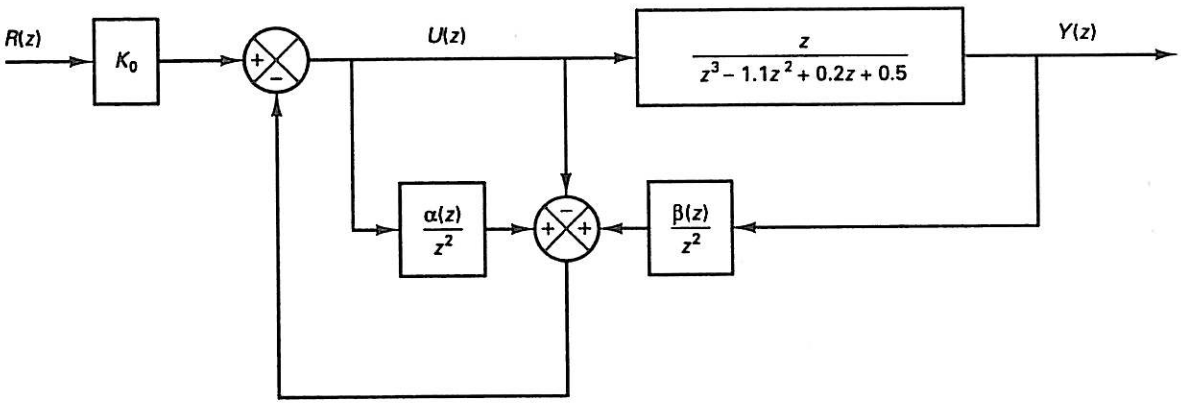


Figura 7-23 Diagrama de bloques del sistema de control considerado en el problema A-7-8.

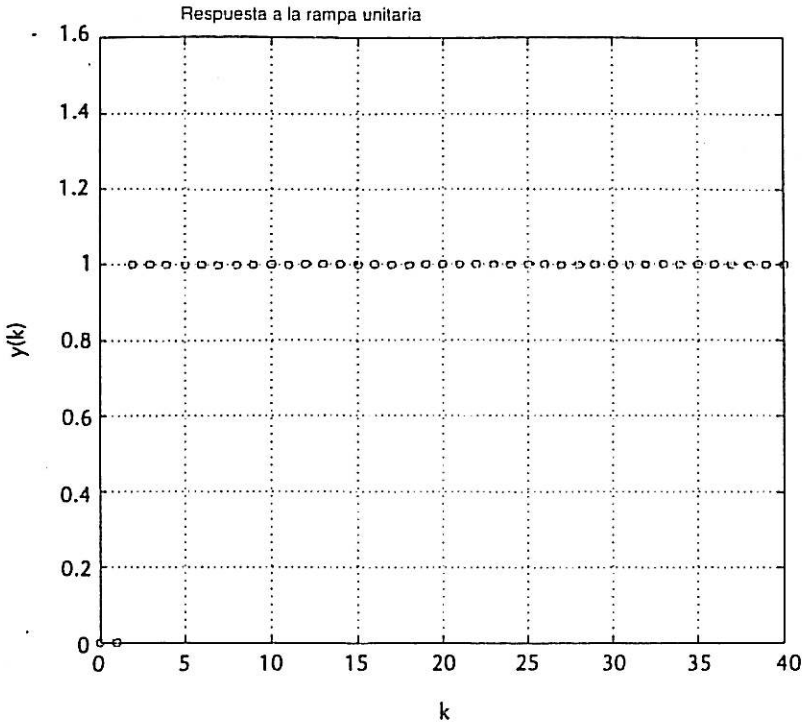


Figura 7-24 Respuesta al escalón unitario del sistema diseñado en el problema A-7-8.

La respuesta a la rampa unitaria se presenta en la figura 7-25. El error al seguir a la entrada rampa unitaria se puede calcular como sigue:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = \left[1 - \frac{Y(z)}{R(z)}\right]R(z)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)R(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2}R(z)$$

La entrada rampa unitaria $R(z)$ es

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.2z}{(z-1)^2}$$

En consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{(z-1)(z+1)}{z^2} \frac{0.2z}{(z-1)^2} = 0.4$$

Por lo tanto, el error al seguir a la rampa unitaria es 0.4, como se puede observar en la figura 7-25.

Al comparar los sistemas diseñados en los problemas A-7-7 y A-7-8, el último sistema que utiliza la configuración del diagrama de bloques de la figura 7-5 presenta un desempeño superior.

Problema A-7-9

Considere una planta definida por

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^3 - z^2 + 0.01z + 0.12}$$

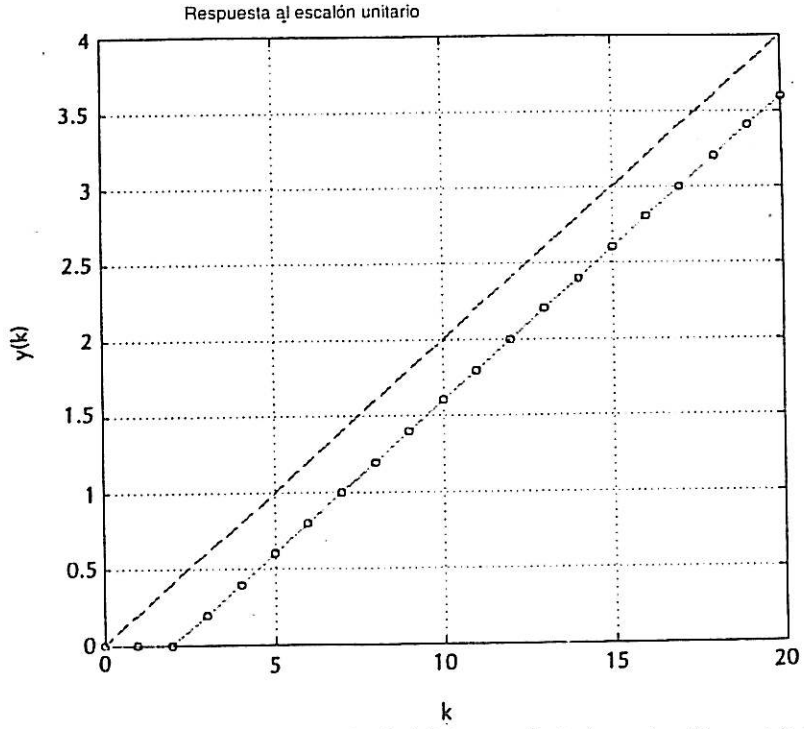


Figura 7-25 Respuesta a la rampa unitaria del sistema diseñado en el problema A-7-8.

El período de muestreo T es de un segundo. Suponga que en el presente problema es importante tener error de seguimiento cero a una entrada rampa unitaria.

Se quiere diseñar un controlador tal que el sistema de control tenga un comportamiento como el del sistema modelo cuya función de transferencia es

$$G_{\text{modelo}} = \frac{0.64z - 0.512}{(z^2 - 1.2z + 0.52)(z - 0.6)}$$

$$= \frac{0.64z - 0.512}{z^3 - 1.8z^2 + 1.24z - 0.312} \tag{7-28}$$

(El período de muestreo para este sistema también es un segundo.) Las respuestas al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema modelo G_{modelo} se presentan en la figura 7-26 y 7-27, respectivamente. (El error en estado estacionario al seguir una rampa unitaria es cero, y el sobrepaso máximo en la respuesta al escalón unitario es de alrededor de 70%.)

Solución Se va a suponer que el diagrama de bloques del sistema es el mismo que el de la figura 7-9. Para la planta dada,

$$A(z) = z^3 - z^2 + 0.01z + 0.12$$

$$B(z) = z + 0.5$$

Por lo tanto,

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 0.01, \quad a_3 = 0.12$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0.5$$

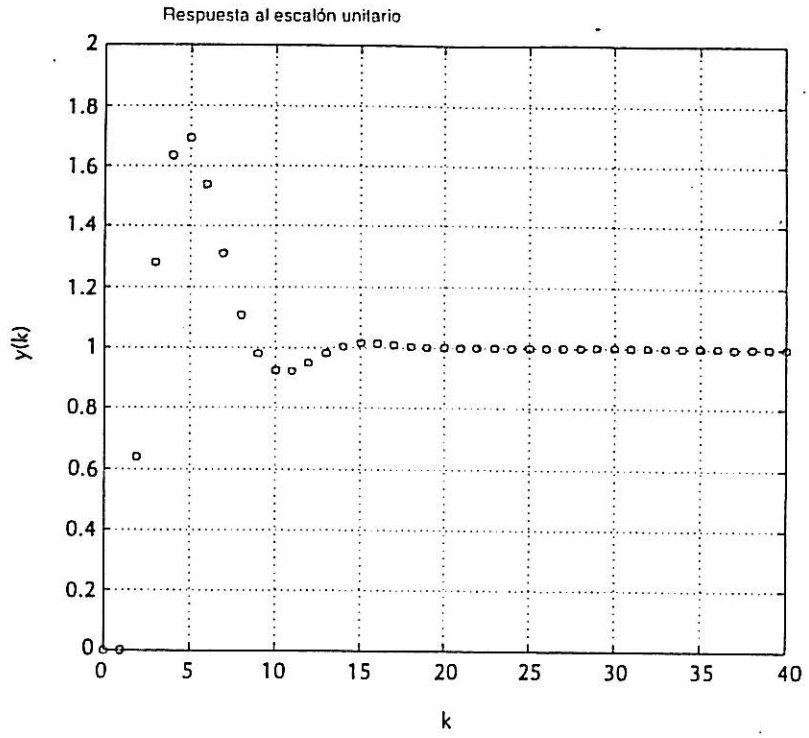


Figura 7-26 Respuesta al escalón unitario del sistema modelo G_{modelo} dado por la ecuación (7-28).

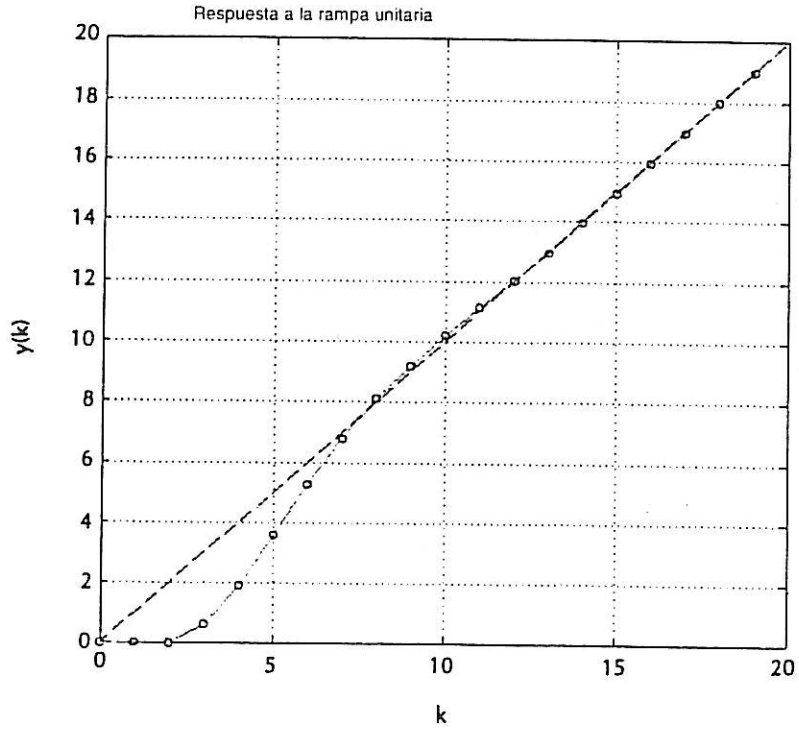


Figura 7-27 Respuesta a la rampa unitaria del sistema modelo G_{modelo} dado por la ecuación (7-28).

Es claro que no hay factores comunes entre $A(z)$ y $B(z)$. En este problema se puede seleccionar $H_1(z)$ como

$$H_1(z) = z^2 - 1.2z + 0.52$$

Aquí se selecciona $H_1(z)$ para cancelar una parte del denominador de G_{modelo}. [Pero esto no es necesario. El requisito sobre $H_1(z)$ es que debe ser un polinomio estable de grado $n-1$ (en este problema $n = 3$). Existe una infinidad de selecciones posibles para $H_1(z)$.] Se define

$$\begin{aligned} H(z) &= B(z)H_1(z) \\ &= (z + 0.5)(z^2 - 1.2z + 0.52) \\ &= z^3 - 0.7z^2 - 0.08z + 0.26 \end{aligned}$$

Ahora se escoge a $F(z)$ como

$$F(z) = z^2$$

[$F(z)$ debe ser un polinomio estable de grado $n - 1$. En este caso, existe un sinnúmero de opciones.] Entonces $D(z)$ es como sigue:

$$\begin{aligned} D(z) &= F(z)H(z) = F(z)B(z)H_1(z) \\ &= z^5 - 0.7z^4 - 0.08z^3 + 0.26z^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &d_0 = 1, \quad d_1 = -0.7, \quad d_2 = -0.08, \\ &d_3 = 0.26, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = 0 \end{aligned}$$

Ahora se necesita resolver la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)B(z)H_1(z)$$

o bien

$$\alpha(z)(z^3 - z^2 + 0.01z + 0.12) + \beta(z)(z + 0.5) = z^5 - 0.7z^4 - 0.08z^3 + 0.26z^2$$

La matriz Sylvester de $\mathbf{E}$ de 6×6 para este problema es

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0.01 & 0.12 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.01 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mediante el uso de MATLAB, $\mathbf{E}^{-1}$ se puede obtener como sigue.

```
E =

    0.1200         0         0    0.5000         0         0
    0.0100    0.1200         0    1.0000    0.5000         0
   -1.0000    0.0100    0.1200         0    1.0000    0.5000
    1.0000   -1.0000    0.0100         0         0    1.0000
         0    1.0000   -1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0         0

inv(E)

ans =

   -3.8462    1.9231   -0.9615    0.4808    0.2596    0.3702
         0         0         0         0    1.0000    1.0000
         0         0         0         0         0    1.0000
    2.9231   -0.4615    0.2308   -0.1154   -0.0623   -0.0888
   -5.7692    2.8846   -0.4423    0.2212   -0.1206   -0.0697
    3.8462   -1.9231    0.9615    0.5192    0.7404    0.6198
```

Se definen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.26 \\ -0.08 \\ -0.7 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Entonces el vector **M** se puede obtener de

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$$

Los cálculos en MATLAB de esta ecuación se muestran a continuación.

```
D = [0;0;0.26;-0.08;-0.7;1];
M = (inv(E))*D
M =
   -0.1000
    0.3000
    1.0000
    0.0240
   -0.1180
    0.3100
```

Del vector **M** se obtiene los valores de las α y de las β. $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinan como

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = z^2 + 0.3z - 0.1$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2 = 0.31z^2 - 0.118z + 0.024$$

Al usar estos polinomios $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, $Y(z)/V(z)$ es:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{F(z)B(z)}{F(z)B(z)H_1(z)} = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Como $V(z)/R(z)$ es

$$\frac{V(z)}{R(z)} = G_{\text{modelo}} H_1(z) = \frac{(0.64z - 0.512)(z^2 - 1.2z + 0.52)}{(z^2 - 1.2z + 0.52)(z - 0.6)}$$

$$= \frac{0.64z - 0.512}{z - 0.6}$$

La función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ es

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.52} \frac{0.64z - 0.512}{z - 0.6} = G_{\text{modelo}}$$

El sistema de control mediante la igualación a un modelo diseñado tiene el diagrama de bloque que se presenta en la figura 7-28*a*). Este diagrama de bloques se puede simplificar como se muestran en las figuras 7-28*b*) y *c*).

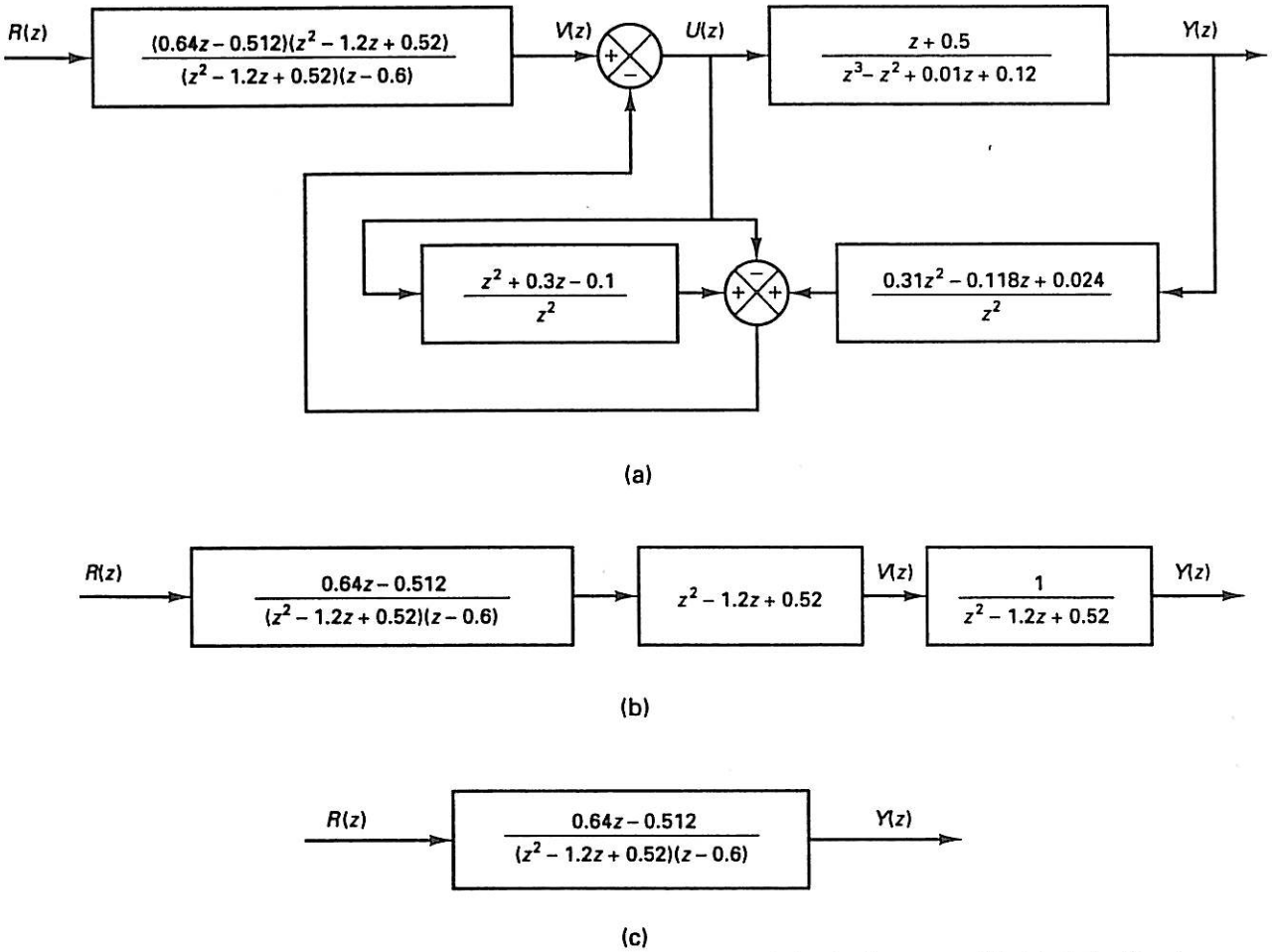


Figura 7-28 *a*) Diagrama de bloques del sistema de control mediante la igualación a un modelo diseñado; *b*) y *c*) diagramas de bloques simplificados.

Como se estableció antes, $G_{\text{modelo}}\,H_1(z)$ debe ser físicamente realizable. El grado del polinomio numerador de $G_{\text{modelo}}\,H_1(z)$ debe ser igual o menor que el grado del polinomio denominador de $G_{\text{modelo}}\,H_1(z)$. Esto significa que para

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\text{polinomio en } z \text{ de grado } m}{\text{polinomio en } z \text{ de grado } n}$$

donde $A(z)$ y $B(z)$ no tienen factores en común, y

$$G_{\text{modelo}} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{\text{polinomio en } z \text{ de grado } m'}{\text{polinomio en } z \text{ de grado } n'}$$

se debe tener

$$n' - m' \geq n - m$$

Si esta condición no se cumple, lo mejor es modificar G_{modelo} para que esta condición se cumpla y se pueda aplicar el presente enfoque.

PROBLEMAS

Problema B-7-1

Considere los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ definidos por

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) = z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z + \lambda_1\lambda_2$$

$$B(z) = b_1 z + b_2 = b(z - \lambda_3) = bz - b\lambda_3$$

donde $b = b_1$. La matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ se define como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Muestre que el determinante de $\mathbf{E}$ se puede obtener por

$$|\mathbf{E}| = b^2(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$$

Problema B-7-2

Considere la ecuación Diofantina siguiente:

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = 1$$

donde

$$A(z) = z^2 - 0.7z + 0.1$$

$$B(z) = z^2 + 0.2z - 0.24$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 z + \alpha_1$$

$$\beta(z) = \beta_0 z + \beta_1$$

Resuelva esta ecuación Diofantina para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ y determine los coeficientes α_0, α_1, β_0 y β_1.

Problema B-7-3

Considere la planta $Y(z)/U(z)$, donde

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Suponga que $A(z)$ es un polinomio mónico en z de grado n y que $B(z)$ es un polinomio en z de grado m. Suponga también que no hay factores comunes entre $A(z)$ y $B(z)$; esto es, la planta es de estado completamente controlable y completamente observable.

Considere la siguiente ecuación Diofantina:

$$\gamma(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)[H(z) - A(z)]$$

donde $H(z)$ es el polinomio característico deseado para la parte de ubicación de polos y que $F(z)$ es el polinomio característico deseado para el observador de orden mínimo. [$H(z)$ es un polinomio mónico de grado m y $F(z)$ es un polinomio de grado $(n-1)$.]

Muestre que esta ecuación Diofantina se resuelve para $\beta(z)$ y $\gamma(z)$, entonces al utilizar

$$U(z) = -\frac{\gamma(z)}{F(z)}U(z) - \frac{\beta(z)}{F(z)}Y(z)$$

se completará el sistema de regulación con realimentación del estado observado.

Problema B-7-4

En el ejemplo 7-3 se diseñó un sistema de control tal que la ecuación característica para la parte de ubicación de polos era

$$H(z) = (z - 0.6 - j0.4)(z - 0.6 + j0.4) = z^2 - 1.2z + 0.52$$

y el polinomio característico deseado para el observador de orden mínimo era

$$F(z) = z$$

La ecuación Diofantina dada por la ecuación (7-13) se resolvió y $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ se determinaron como sigue:

$$\alpha(z) = z + 0.32$$

$$\beta(z) = 24z - 16$$

La constante K_0 se determinó como 8. La figura 7-6*a*) muestra el sistema diseñado.

Muestre que la señal de control $u(k)$ puede estar dada por

$$u(k) = -0.32u(k-1) - 24y(k) + 16y(k-1) + 8r(k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$u(0) = -24y(0) + 8r(0)$$

Dibuje una gráfica de $u(k)$ contra k cuando la entrada $r(k)$ es una secuencia de escalón unitario.

Problema B-7-5

Considere una planta definida por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.16 & 0.84 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

La función de transferencia pulso para la planta se puede escribir como

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Determine los polinomios $A(z)$ y $B(z)$.

Al emplear el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñe un sistema de control para la planta. Se desea que el diagrama de bloques del sistema diseñado sea el mismo que el de la figura 7-4. Al resolver la ecuación Diofantina

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = F(z)H(z)$$

suponga que $H(z)$ y $F(z)$ son, respectivamente, como sigue

$$H(z) = z^3, \qquad F(z) = z^2$$

Obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema de control diseñado. El período de muestreo T es de 1 segundo.

Problema B-7-6

Considere la misma planta que la del problema B-7-5. Al emplear el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñe un sistema de control para la planta. Utilice el diagrama de bloques de la figura 7-5. Suponga los siguientes $H(z)$ y $F(z)$:

$$H(z) = z^3, \qquad F(z) = z^2$$

Obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema de control diseñado. Suponga que el período de muestreo es 1 segundo.

Problema B-7-7

Considere la planta definida por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Diseñe un sistema de control para la planta. Para la parte de ubicación de polos, se desea tener tres polos de lazo cerrado en el origen, es decir,

$$H(z) = z^3$$

y para la ecuación característica del observador de orden mínimo, se desea tener

$$F(z) = z^2$$

Utilice el enfoque de ecuaciones polinomiales para el diseño.

Problema B-7-8

Considere la planta definida por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.6z + 0.5}{(z-1)^2}$$

Al usar el enfoque de ecuaciones polinomiales, para diseñar un sistema de control tal que el sistema se comporte como el modelo G_{modelo} siguiente:

$$G_{\text{modelo}} = \frac{2z - 1}{z^2}$$

Obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema diseñado (que es el mismo que el modelo G_{modelo}). El período de muestreo T es 1 segundo.

Problema B-7-9

Considere la planta definida por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)}$$

Al utilizar el enfoque de ecuaciones polinomiales, diseñe un sistema de control tal que el sistema se comporte como el modelo G_{modelo} siguiente:

$$G_{\text{modelo}} = \frac{0.32}{z^2 - 1.2z + 0.52}$$

Obtenga la respuesta al escalón unitario y a la rampa unitaria del sistema de control (que es el mismo que el modelo G_{modelo}. El período de muestreo T es 0.2 segundos.

8

Sistemas de control óptimo cuadrático

8-1 INTRODUCCIÓN

Los problemas de control óptimo son de gran interés para los ingenieros de control. Un sistema de control óptimo —un sistema cuyo diseño "optima" (minimiza o maximiza, según sea el caso) el valor de una función seleccionada como el *índice de desempeño*— difiere de uno ideal en que el primero es más alcanzable en presencia de restricciones físicas, mientras que el último bien puede ser un objetivo inalcanzable.

Índices de desempeño. Al diseñar un sistema de control óptimo o un sistema regulador óptimo, se necesita encontrar una regla para determinar la decisión de control presente, sujeta a ciertas restricciones, para minimizar alguna medida de la desviación de un comportamiento ideal. Dicha medida es provista, generalmente, por el índice de desempeño seleccionado que es una función cuyo valor se considera una indicación de qué tanto se parece el desempeño del sistema real al desempeño deseado. En la mayoría de los casos, el comportamiento del sistema se hace óptimo al escoger el vector de control $\mathbf{u}(k)$ de tal forma que el índice de desempeño se minimice (o maximice, dependiendo de la naturaleza del índice de desempeño seleccionado). La selección de un índice de desempeño apropiado es importante porque, en alto grado, determina la naturaleza del sistema de control óptimo resultante. Esto es, que el sistema resultante sea lineal, no lineal, estacionario, o variante en el tiempo, dependerá de la forma del índice de desempeño. Por lo tanto, el ingeniero de control formula este índice en base a los requisitos que el sistema debe cumplir y lo toma en cuenta para determinar la naturaleza del sistema resultante. Los requisitos de diseño por lo regular no sólo incluyen especificaciones de desempeño, sino también, para asegurar que sea físicamente realizable, restringen la forma del control a utilizar.

El proceso de optimación no sólo debe proveer leyes de control óptimo y configuraciones de los parámetros, sino también debe predecir la degradación en el desempeño debido a cualquier desvío del valor mínimo (o máximo) de la función del índice de desempeño que resulta cuando se aplican leyes de control no óptimas.

El escoger el índice de desempeño más apropiado para un problema dado es muy difícil, especialmente en sistemas complejos. El uso de la teoría de optimación en el diseño de sistemas ha sido problemático debido al conflicto entre la factibilidad analítica y la utilidad práctica al seleccionar el índice de desempeño. Es preferible que el criterio para un control óptimo se origine desde un punto de vista práctico y no matemático. En general, sin embargo, la selección de un índice de desempeño implica un compromiso entre una evaluación útil del desempeño del sistema y un problema matemático.

Formulación de los problemas de optimización. El problema de optimización de un sistema de control se puede formular si se tiene la siguiente información:

1. Ecuaciones del sistema
2. Clase de vectores de control permitidos
3. Restricciones en el problema
4. Índice de desempeño
5. Parámetros del sistema

La solución de un problema de control óptimo consiste en determinar el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ dentro de la clase de vectores de control permitidos. Este vector $\mathbf{u}(k)$ depende de

1. La naturaleza del índice de desempeño
2. La naturaleza de las restricciones
3. El estado inicial o salida inicial
4. El estado deseado o salida deseada

Excepto en algunos casos, el problema de control óptimo puede ser muy complicado para obtener una solución analítica por lo que se tiene que obtener una solución por computadora.

Cuestiones concernientes a la existencia de las soluciones a los problemas de control óptimo. Se ha establecido que el problema de control óptimo, dada una condición inicial $\mathbf{x}(0)$, consiste en encontrar un vector de control permitido $\mathbf{u}(k)$ que transfiera al estado a la región deseada del espacio de estados y para el cual el índice de desempeño se minimiza.

Es importante señalar que a veces una combinación particular de planta, estado deseado, índice de desempeño y restricciones, hacen que un control óptimo sea imposible. Esto es cuestión de requerir un desempeño más allá de las capacidades físicas del sistema.

Las cuestiones que tienen que ver con la existencia de un vector de control óptimo son importantes, ya que sirven para informar al diseñador si un control óptimo es posible o no para un sistema determinado y dado un conjunto de restricciones. Dos de las cuestiones más importantes son aquellas acerca de la controlabilidad y observabilidad, que fueron presentadas en el capítulo 6.

Comentarios acerca de los sistemas de control óptimo. El sistema cuyo diseño minimiza (o maximiza) el índice de desempeño seleccionado es, por definición, óptimo. Es evidente que el índice de desempeño, en realidad, determina la configuración del sistema. Es muy importante apuntar que un sistema de control que es óptimo bajo un índice de desempeño es, en general, no óptimo bajo otro índice de desempeño. Además, la realización en hardware de una ley de control óptimo en particular puede ser algo difícil y costosa. Así, puede ser inútil dedicar demasiados recursos para implantar un controlador óptimo que es el mejor en solamente algún sentido individual limitado. A menudo, un sistema de control se diseña para realizar una sola tarea que se especifica completamente de antemano. En vez de esto, se diseña para realizar una tarea seleccionada en forma aleatoria a partir de un repertorio de tareas posibles. Entonces, en los sistemas prácticos, puede ser mejor buscar una ley de control óptimo aproximada que no esté atada rígidamente a un solo índice de desempeño.

Estrictamente hablando, se debe tratar que un sistema de control óptimo obtenido en forma matemática dé, en la mayoría de los casos, el desempeño mas alto posible bajo el índice de desempeño dado y es más una herramienta de medición que un objetivo práctico. Además, antes de decidir si se construye un sistema de control óptimo o algo inferior más simple, se debe evaluar con cuidado el grado en el que el desempeño del sistema de control óptimo complejo excede al del subóptimo simple. Sólo si se puede justificar, no se debe construir un sistema de control óptimo extremadamente complicado y costoso.

Una vez que el grado de desempeño máximo se encuentra mediante el uso de la teoría de control óptimo, se debe hacer un esfuerzo para diseñar un sistema simple que se acerque al óptimo. Con esto en mente, se construye un sistema físico prototipo, se prueba, y se modifica hasta que se obtiene un sistema satisfactorio que tenga características de desempeño cercanas a las del sistema de control óptimo que se ha trabajado en teoría.

Los problemas de control óptimo que se pueden resolver en forma analítica, dan una buena visión de las estructuras y algoritmos óptimos que se pueden aplicar a casos prácticos. Un ejemplo de un problema de control óptimo con solución analítica es el problema de control óptimo de sistemas lineales basados en índices de desempeño cuadrático. Los índices de desempeño cuadrático han sido muy utilizados en sistemas de control práctico como una medida del desempeño del sistema.

Control óptimo cuadrático. Se considera un sistema de control definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-r)

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

En el problema de control óptimo cuadrático se desea determinar una ley para el vector de control $\mathbf{u}(k)$ tal que un índice de desempeño cuadrático se minimice.

Un ejemplo de un índice de desempeño cuadrático es

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]$$

donde las matrices **S** y **Q** son matrices Hermíticas definidas positivas o semidefinidas positivas y **R** es una matriz Hermítica definida positiva. El primer término del lado derecho de esta última ecuación toma en cuenta la importancia del estado final. El primer término dentro de los corchetes de la sumatoria toma en cuenta la importancia relativa del error durante el proceso de control, y el segundo término toma en cuenta el gasto de energía de la señal de control. Se supone que el vector de control $\mathbf{u}(k)$ no está restringido.

En la sección 8-2 se demostrará que la ley de control óptimo está dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{K}(k)$ es una matriz de $r \times n$ variante en el tiempo. Si $N = \infty$, entonces $\mathbf{K}(k)$ es una matriz constante de $r \times n$. El diseño de sistemas de control basado en dichos índices de desempeño cuadrático depende de obtener la matriz $\mathbf{K}(k)$.

La característica principal de una ley de control óptimo basada en un índice de desempeño cuadrático es que es una función lineal del vector de estados $\mathbf{x}(k)$. Dicha realimentación del estado requiere que todos los estados estén disponibles para realimentación. Por lo tanto es ventajoso representar al sistema en términos de las variables de estado medibles. Si no todas las variables de estado se pueden medir, se requiere estimar u observar las variables de estado no medibles. Entonces se utilizan las variables de estado estimadas u observadas para generar las señales de control óptimo.

La ventaja de utilizar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será asintóticamente estable, excepto para algunos casos muy especiales. (Véase los problemas A-8-6 y A-8-7.)

Existen diferentes enfoques para resolver los problemas de control óptimo cuadrático. En este capítulo se presenta un enfoque utilizado en general basado en la técnica de minimización empleando multiplicadores de Lagrange. Para el problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario, se presenta el enfoque de Liapunov. En la sección 8-3 se mostrará que existe una relación entre las funciones de Liapunov y los índices de desempeño cuadrático.

Observe que cuando un sistema de control óptimo se diseña en el espacio de estados es importante verificar las características de respuesta en frecuencia. Algunas veces, se necesita una compensación específica para efectos de ruido. Entonces llega a ser necesario modificar la configuración óptima y aceptar una configuración subóptima, o puede llegar a ser necesario modificar el índice de desempeño.

Resumen del capítulo. La sección 8-1 presentó material introductorio. La sección 8-2 trata el problema de control óptimo cuadrático básico y su solución. La sección 8-3 se ocupa del problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario. Aquí se incluye el enfoque de Liapunov para resolver el problema de control óptimo cuadrático. La sección 8-4 discute el control óptimo cuadrático de un sistema de seguimiento.

8-2 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO

Los problemas de control óptimo cuadrático se pueden resolver mediante muchos enfoques diferentes. En esta sección se resolverá el problema de control óptimo cuadrático básico mediante el método convencional de minimización empleando los multiplicadores de Lagrange.

Problema de control óptimo cuadrático. El problema de control óptimo cuadrático se puede enunciar como sigue. Dado un sistema de control lineal de tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \tag{8-1}$$

donde se supone que es de estado completamente controlable y donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)
$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-r)
$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$
$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

encuentre la secuencia de control óptima $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \ldots, \mathbf{u}(N-1)$ que minimiza un índice de desempeño cuadrático. Un ejemplo de índice de desempeño cuadrático para un proceso de tiempo finito ($0 \leq k \leq N$) es

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{8-2}$$

donde

$\mathbf{Q}$ = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de $n \times n$
$\mathbf{R}$ = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva de $r \times r$
$\mathbf{S}$ = matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de $n \times n$

Las matrices $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ se seleccionan para valorar la importancia relativa de la contribución en el desempeño debida al vector de estado $\mathbf{x}(k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$), al vector de control $\mathbf{u}(k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$), y al estado final $\mathbf{x}(N)$, respectivamente.

El estado inicial del sistema está en un valor arbitrario $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$. El estado final $\mathbf{x}(N)$ puede ser fijo, en cuyo caso el término $\frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$ se elimina del índice de desempeño de la ecuación (8-2) y en su lugar se impone la condición terminal $\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f$, donde $\mathbf{x}_f$ es el estado terminal fijo. Si el estado terminal $\mathbf{x}(N)$ no es fijo, entonces el primer término en la ecuación (8-2) representa el peso de la contribución en el desempeño debida al estado final. Observe que en el problema de minimización, la inclusión del término $\frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$ en el índice de desempeño $\mathbf{J}$ implica que se desea que el estado final $\mathbf{x}(N)$ esté tan cerca del origen como sea posible.

Solución mediante el método convencional empleando multiplicadores de Lagrange. El problema de control óptimo cuadrático es un problema de minimización que involucra una función de varias variables. Por lo tanto, se puede resolver por el método de minimización convencional. El problema de minimización sujeto a restricciones se puede resolver al añadir dichas restricciones a la función a minimizar mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

En el problema de minimización presente, se minimiza J que está dado por la ecuación (8-2), repetida como:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{8-3}$$

cuando está sujeta a restricciones especificadas por la ecuación (8-1),

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{8-4}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, y donde la condición inicial del vector de estado se especifica como

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \tag{8-5}$$

Ahora, al emplear un conjunto de multiplicadores de Lagrange $\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(N)$, se define un nuevo índice de desempeño L como:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{&[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^*(k+1)[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)] \\ &+ [\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)]^*\boldsymbol{\lambda}(k+1)\} \end{aligned} \tag{8-6}$$

La razón para escribir los términos que involucran el multiplicador de Lagrange en la forma en que se muestra en la ecuación (8-6) es para asegurar que $L = L^*$. (L es una cantidad escalar real.) Observe que

$$\boldsymbol{\lambda}^*(0)[\mathbf{c} - \mathbf{x}(0)] + [\mathbf{c} - \mathbf{x}(0)]^*\boldsymbol{\lambda}(0)$$

se puede sumar al índice de desempeño L. Sin embargo, no se hará esto, para simplificar la presentación. Es bien sabido el hecho de que minimizar la función L definida por la ecuación (8-6) es equivalente a minimizar a J definida por la ecuación (8-3) cuando está sujeta a las mismas restricciones definidas por la ecuación (8-4).

Para minimizar la función L, se necesita diferenciar L respecto a cada uno de los componentes de los vectores $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ y $\lambda(k)$ e igualar los resultados a cero. Sin embargo, desde el punto de vista computacional, es conveniente diferenciar a L respecto a $\bar{x}_i(k)$, $\bar{u}_i(k)$, y $\bar{\lambda}_i(k)$, donde $\bar{x}_i(k)$, $\bar{u}_i(k)$ y $\bar{\lambda}_i(k)$ son los complejos conjugados de $x_i(k)$, $u_i(k)$, y $\lambda_i(k)$, respectivamente. (Observe que la señal y su complejo conjugado contienen la misma información matemática.) Por lo tanto, se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, N$$

Estas ecuaciones son condiciones necesarias para que L tenga un mínimo. Observe que las expresiones simplificadas para las derivadas parciales anteriores son

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{8-7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8-8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k)} = \mathbf{0}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{8-9}$$

En referencia al Apéndice A (véanse los problemas A-7 y A-8) para la diferenciación parcial de formas cuadráticas complejas y bilineales con respecto a variables vectores, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

Entonces, las ecuaciones (8-7), (8-8) y (8-9) se pueden obtener como:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1) - \boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{0}, \quad k = 1,2,\ldots,N-1 \tag{8-10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{x}}(N)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{S}\mathbf{x}(N) - \boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{0}, \tag{8-11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{R}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1) = \mathbf{0}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{8-12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k)} = \mathbf{0}: \quad \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \quad k = 1,2,\ldots,N \tag{8-13}$$

La ecuación (8-13) es simplemente, la ecuación de estados del sistema. La ecuación (8-11) especifica el valor final del multiplicador de Lagrange. Observe que el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$ se llama a menudo *covector* o *vector adjunto*.

Ahora se simplificarán las ecuaciones obtenidas. De la ecuación (8-10) se tiene

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1), \qquad k = 1,2,3,\ldots,N-1 \tag{8-14}$$

con la condición final $\boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$. Al resolver la ecuación (8-12) para $\mathbf{u}(k)$ y al observar que $\mathbf{R}^{-1}$ existe, se obtiene

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1 \tag{8-15}$$

La ecuación (8-13) se puede rescribir como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1 \tag{8-16}$$

que es simplemente la ecuación de estado. Al sustituir la ecuación (8-15) en la ecuación (8-16) resulta en

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{8-17}$$

con la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$.

Para obtener la solución al problema de minimización, se necesitan resolver las ecuaciones (8-14) y (8-17) en forma simultánea. Observe que para el sistema de ecuaciones, la ecuación (8-16), la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ está especificada, mientras que para la ecuación del multiplicador de Lagrange, la ecuación (8-14), la condición final $\boldsymbol{\lambda}(N)$ está especificada. Por lo tanto, el problema se convierte en un problema con dos puntos de valores en la frontera.

Si el problema de dos puntos de valores en la frontera se resuelve, entonces el valor óptimo para el vector de estado y para el vector de multiplicadores de Lagrange se pueden determinar y el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede obtener en la forma de lazo abierto. Sin embargo, si se emplea la ecuación de Riccati, el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede obtener en la forma de lazo cerrado o realimentado:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{K}(k)$ es la matriz de realimentación de $r \times n$.

A continuación, se obtendrá el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ en la forma de lazo cerrado obteniendo, primero, la ecuación de Riccati. Al suponer que $\boldsymbol{\lambda}(k)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \tag{8-18}$$

donde $\mathbf{P}(k)$ es una matriz Hermítica de $n \times n$ (o una matriz simétrica real de $n \times n$). Al sustituir la ecuación (8-18) en la ecuación (8-14) resulta en

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{8-19}$$

y al sustituir la ecuación (8-18) en la ecuación (8-17) da

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{8-20}$$

Observe que la ecuación (8-19) y (8-20) no involucra a $\boldsymbol{\lambda}(k)$ y, por lo tanto, se ha eliminado $\boldsymbol{\lambda}(k)$. El proceso empleado aquí se llama *transformación de Riccati*. Dicha transformación es de una importancia extrema para resolver el problema de valores en la frontera con dos puntos.

De la ecuación (8-20) se tiene

$$[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-21}$$

Para sistemas de estado completamente controlable, se puede demostrar que $\mathbf{P}(k+1)$ es definida positiva o semidefinida positiva. Para una matriz $\mathbf{P}(k+1)$ al menos semidefinida positiva se tiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{I}_n + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)| &= |\mathbf{I}_r + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}| = |\mathbf{I}_r + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \\ &= |\mathbf{R}^{-1}|\,|\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \neq 0\end{aligned}$$

donde se utilizó la relación

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{A}\mathbf{B}| = -|\mathbf{I}_r + \mathbf{B}\mathbf{A}|, \qquad \mathbf{A} = \text{matriz de } n \times n,\ \mathbf{B} = \text{matriz de } r \times n$$

(Véase el apéndice A.) Así, la inversa de $\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$ existe. En consecuencia, la ecuación (8-21) se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-22}$$

Al sustituir la ecuación (8-22) en la ecuación (8-19), se obtiene

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

o bien

$$\{\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\}\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$$

Esta última ecuación se debe cumplir para toda $\mathbf{x}(k)$. Por lo tanto, se debe tener

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \tag{8-23}$$

La ecuación (8-23) se puede modificar. Al utilizar el lema de inversión de matrices

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

y al hacer las sustituciones

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1} &= \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1) \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (8-23) se puede modificar a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \\ &\quad - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\end{aligned} \tag{8-24}$$

La ecuación (8-24) o su equivalente [tal como la ecuación (8-23)] se denomina ecuación de Riccati. En referencia a la ecuación (8-11) y (8-18), al observar que $k = N$ se tiene

$$\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N) = \boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$$

o bien

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{8-25}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (8-23) y (8-24) se pueden resolver hacia atrás desde $k = N$ hasta $k = 0$. Esto es, se pueden obtener $\mathbf{P}(N)$, $\mathbf{P}(N-1), \ldots, \mathbf{P}(0)$ al comenzar desde $\mathbf{P}(N)$, el cual es conocido.

En referencia a las ecuaciones (8-14) y (8-18), el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$, dado por la ecuación (8-15), se escribe como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(k) - \mathbf{Q}\mathbf{x}(k)] \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{8-26}$$

donde

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] \tag{8-27}$$

La ecuación (8-26) proporciona la forma en lazo cerrado, o forma realimentada, para el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$. Observe que el vector de control óptimo es proporcional al vector de estado.

Note que el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede escribir de varias formas. En referencia a las ecuaciones (8-18) y (8-22), $\mathbf{u}(k)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{8-28}$$

donde

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G} \tag{8-29}$$

Una forma ligeramente diferente del vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede dar como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{8-30}$$

donde

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \tag{8-31}$$

La equivalencia entre las expresiones para el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ que están dadas por las ecuaciones (8-26), (8-28) y (8-30), se puede mostrar fácilmente; véase el problema A-8-1.

Las ecuaciones (8-26), (8-28) y (8-30) indican claramente que la ley de control óptimo requiere la realimentación del vector de estado a través de la ganancia variable en el tiempo $\mathbf{K}(k)$. La figura 8-1 muestra el esquema de control óptimo del sistema regulador basado en el índice de desempeño cuadrático. Es importante apuntar que la ganancia variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$ se puede calcular antes de que el proceso comience, una vez que la matriz de estados del sistema $\mathbf{G}$, la matriz de control $\mathbf{H}$, y las matrices de peso $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ estén dadas. En consecuencia, $\mathbf{K}(k)$ se puede precalcular fuera de línea y almacenarse para su uso posterior. Observe que el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ no entra en los cálculos para $\mathbf{K}(k)$. El vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ en cada etapa se puede determinar inmediatamente al premultiplicar el vector de estado $\mathbf{x}(k)$ por $-\mathbf{K}(k)$.

Observe que una propiedad de la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}(k)$ es que casi es constante, excepto cerca del fin del proceso en $k = N$. (Véase el ejemplo 8-1 y el problema A-8-3.)

Evaluación del índice de desempeño mínimo. A continuación se evaluará el valor mínimo del índice de desempeño:

$$\min J = \min\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]\right\}$$

Al premultiplicar ambos lados de la ecuación (8-19) por $\mathbf{x}^*(k)$, se tiene

$$\mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k)\mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$$

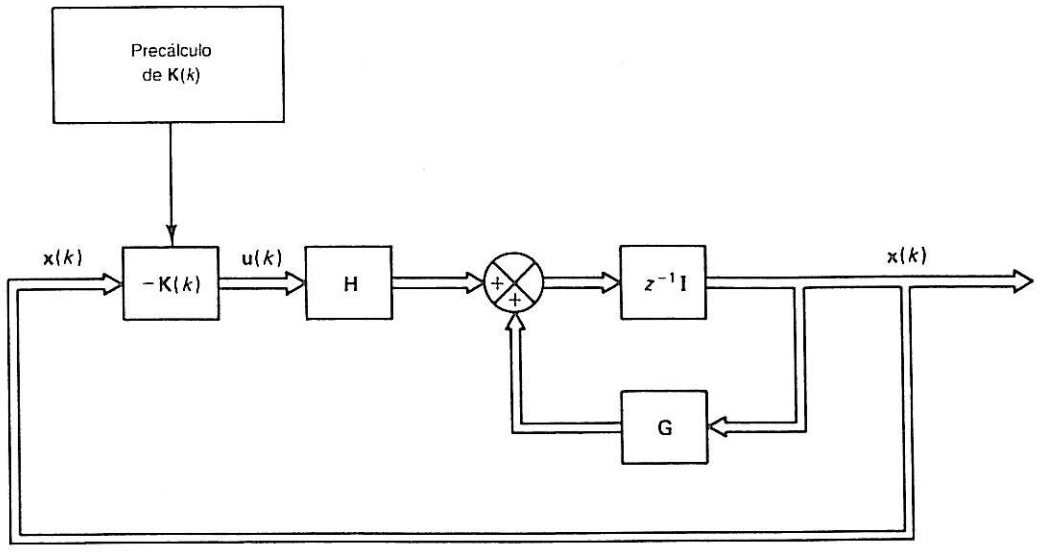


Figura 8-1 Sistema regulador óptimo basado en un índice de desempeño cuadrático.

Al sustituir la ecuación (8-21) en esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\\ &= \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) &- \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\\ &- \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned} \tag{8-32}$$

También, de las ecuaciones (8-15) y (8-18) se tiene

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) &= [-\mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}]\mathbf{R}[-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)]\\ &= \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)\end{aligned} \tag{8-33}$$

Al sumar las ecuaciones (8-32) y (8-33), se tiene

$$\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) = \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \tag{8-34}$$

Al sustituir la ecuación (8-34) en la ecuación (8-3), se tiene

$$\begin{aligned}J_{\min} &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1)]\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}[\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(1)\mathbf{P}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{x}^*(1)\mathbf{P}(1)\mathbf{x}(1)\\ &\quad - \mathbf{x}^*(2)\mathbf{P}(2)\mathbf{x}(2) + \cdots + \mathbf{x}^*(N-1)\mathbf{P}(N-1)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}^*(N)\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N)]\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) - \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N)\end{aligned} \tag{8-35}$$

Observe que de la ecuación (8-25) se tiene $\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}$. En consecuencia, la ecuación (8-35) es

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) \tag{8-36}$$

Así, el valor mínimo del índice de desempeño J está dado por la ecuación (8-36). Éste es función del $\mathbf{P}(0)$ y del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Ejemplo 8-1

Considere el sistema de control de tiempo discreto definido por

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k), \qquad x(0) = 1$$

Determine la ley de control óptimo que minimiza el índice de desempeño siguiente:

$$J = \frac{1}{2}[x(10)]^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}[x^2(k) + u^2(k)]$$

Observe que en este ejemplo $S = 1$, $Q = 1$ y $R = 1$. También determine el valor mínimo del índice de desempeño J.

En referencia a la ecuación (8-23), $P(k)$ se obtiene como sigue:

$$P(k) = 1 + (0.3679)P(k + 1)[1 + (0.6321)(1)(0.6321)P(k + 1)]^{-1}(0.3679)$$

que se puede simplificar a

$$P(k) = 1 + 0.1354P(k + 1)[1 + 0.3996P(k + 1)]^{-1}$$

La condición de frontera para $P(k)$ está especificada por la ecuación (8-25), y en este ejemplo

$$P(N) = P(10) = S = 1$$

Ahora se calcula $P(k)$ de atrás hacia adelante desde $k = 9$ hasta $k = 0$:

$$P(9) = 1 + 0.1354 \times 1(1 + 0.3996 \times 1)^{-1} = 1.0967$$

$$P(8) = 1 + 0.1354 \times 1.0967(1 + 0.3996 \times 1.0967)^{-1} = 1.1032$$

$$P(7) = 1 + 0.1354 \times 1.1032(1 + 0.3996 \times 1.1032)^{-1} = 1.1036$$

$$P(6) = 1 + 0.1354 \times 1.1036(1 + 0.3996 \times 1.1037)^{-1} = 1.1037$$

$$P(k) = 1.1037, \qquad k = 5, 4, 3, 2, 1, 0$$

Observe que los valores de $P(k)$ se aproximan rápidamente al valor en estado estacionario. El valor en estado estacionario P_{ss} se puede obtener de

$$P_{ss} = 1 + 0.1354P_{ss}(1 + 0.3996P_{ss})^{-1}$$

o bien

$$0.3996P_{ss}^2 + 0.4650P_{ss} - 1 = 0$$

Al resolver esta última ecuación para P_{ss}, se tiene

$$P_{ss} = 1.1037 \qquad \text{o} \qquad -2.2674$$

Como $P(k)$ debe ser positiva, se encuentra que el valor en estado estacionario de $P(k)$ es 1.1037.

La ganancia de realimentación $K(k)$ se puede calcular de la ecuación (8-27):

$$K(k) = (1)(0.6321)(0.3679)^{-1}[P(k) - 1] = 1.7181[P(k) - 1]$$

Al sustituir los valores de $P(k)$ obtenidos, se obtiene

$$K(10) = 1.7181(1 - 1) = 0$$

$$K(9) = 1.7181(1.0967 - 1) = 0.1662$$

$$K(8) = 1.7181(1.1032 - 1) = 0.1773$$

$$K(7) = 1.7181(1.1036 - 1) = 0.1781$$

$$K(6) = K(5) = \cdots = K(0) = 0.1781$$

La ley de control óptimo está dada por

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

Ya que

$$x(k + 1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k) = [0.3679 - 0.6321K(k)]x(k)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x(1) &= [0.3679 - 0.6321K(0)]x(0) \\ &= (0.3679 - 0.6321 \times 0.1781) \times 1 = 0.2553 \\ x(2) &= (0.3679 - 0.6321 \times 0.1781) \times 0.2553 = 0.0652 \\ x(3) &= (0.3679 - 0.6321 \times 0.1781) \times 0.0652 = 0.0166 \\ x(4) &= (0.3679 - 0.6321 \times 0.1781) \times 0.0166 = 0.00424 \end{aligned}$$

Los valores de $x(k)$ para $k = 5, 6, \ldots, 10$ se aproxima a cero rápidamente.

Ahora, la secuencia de control óptimo $u(k)$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} u(0) &= -K(0)x(0) = -0.1781 \times 1 = -0.1781 \\ u(1) &= -K(1)x(1) = -0.1781 \times 0.2553 = -0.0455 \\ u(2) &= -K(2)x(2) = -0.1781 \times 0.0652 = -0.0116 \\ u(3) &= -K(3)x(3) = -0.1781 \times 0.0166 = -0.00296 \\ u(4) &= -K(4)x(4) = -0.1781 \times 0.00424 = -0.000756 \\ u(k) &\doteq 0, \qquad k = 5, 6, \ldots, 10 \end{aligned}$$

Las gráficas de los valores de $P(k)$, $K(k)$, $x(k)$ y $u(k)$ se dibujan en la figura 8-2. Observe que los valores de $P(k)$ y $K(k)$ son constantes excepto para las etapas finales.

Por último, el valor mínimo del índice de desempeño J se obtiene a partir de la ecuación (8-36):

$$J_{\min} = \frac{1}{2}x^*(0)P(0)x(0) = \frac{1}{2}(1 \times 1.1037 \times 1) = 0.5518$$

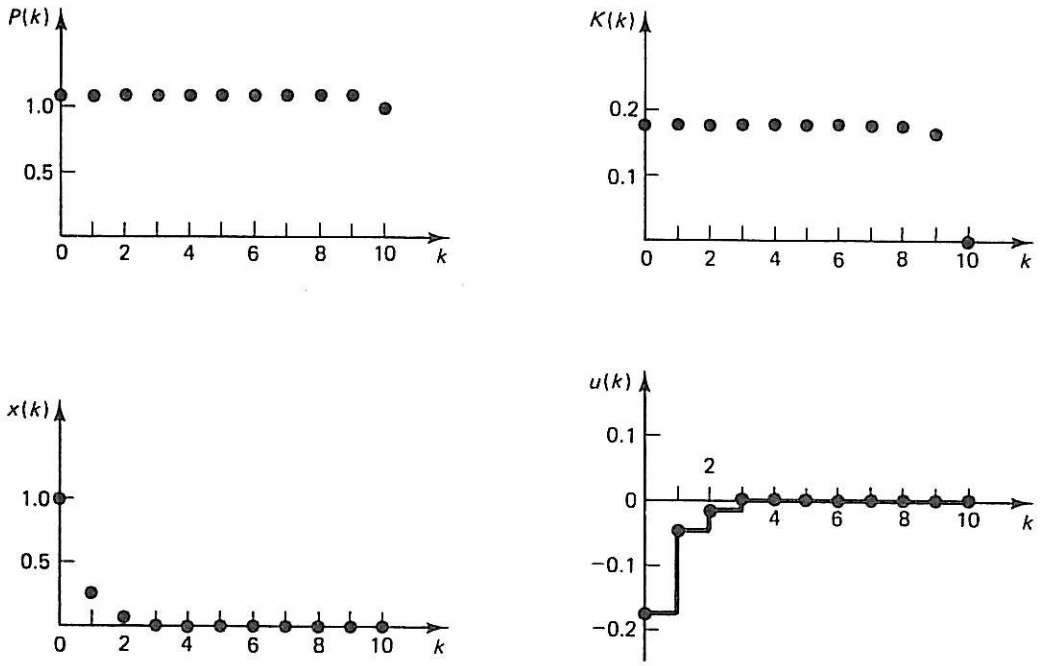


Figura 8-2 Gráficas de $P(k)$ contra k, $x(k)$ contra k, y $u(k)$ contra k $K(k)$ contra k para el sistema considerado en el ejemplo 8-1.

Enfoque de MATLAB a la solución de este problema ejemplo. Un programa de MATLAB se puede escribir fácilmente para resolver este problema ejemplo. El programa 8-1 de MATLAB muestra un posible programa. [En este programa se utilizó la ecuación (8-24) para el cálculo de P(k).]

Programa de MATLAB 8-1

```
G = 0.3679; H = 0.6321; Q = 1; R = 1; s = 1; x0 = 1;
N = 11; p(N) = S; x(1) = 1; Pnext = S;

for i = N-1: -1: 1,
  P = Q + G'*Pnext*G - G'*Pnext*H*inv(R+H'*Pnext*H)*H'*Pnext*G;
  p(i) = P; Pnext = P;
end
for i N: -1:1,
  K = inv(R)*H'*inv(G')*(p(i) - Q);
  k(i) = K;
end
for i = 1:N-1,
  xnext = (G-H*k(i))*x(i);
  x(i + 1) = xnext;
end
for i = 1:N,
  u(i) = -k(i)*x(i);
end
```

Para imprimir los valores de P0, P1, . . . , P10 [que corresponden a p(1), p(2), . . . , p(11)], K0, K1, . . . , K10 [que corresponden a k(1), k(2), . . . , k(11)], x0, x1, . . . , x10 [que corresponde a x(1), x(2), . . . , x(11)], y u0, u1, . . . , u10 [que corresponden a u(0), u(1), . . . , u(10)u(9), u(2). . . , u(11)], se introduce el comando de impresión como sigue.

```
% ***** Impresión de P, K, x y u *****

M = [p'  k'  x'  u']

M =

    1.1037    0.1781    1.0000   -0.1781
    1.1037    0.1781    0.2553   -0.0455
    1.1037    0.1781    0.0652   -0.0116
    1.1037    0.1781    0.0166   -0.0030
    1.1037    0.1781    0.0042   -0.0008
    1.1037    0.1781    0.0011   -0.0002
    1.1037    0.1781    0.0003   -0.0000
    1.1036    0.1781    0.0001   -0.0000
    1.1032    0.1773    0.0000   -0.0000
    1.0967    0.1662    0.0000   -0.0000
    1.0000         0    0.0000         0
```

La primera columna de la matriz, M proporciona desde arriba hacia abajo los valores de P0, P1, . . . , P10. De la misma manera, la segunda, tercera y cuarta columnas proporcionan los valores de K0, K1, . . . ,K10; x0, x1, . . . , x10; y u0, u1, . . . , u10; respectvamente.

Problema de control óptimo cuadrático discreto. A continuación se considera el control óptimo cuadrático de un sistema de control discreto. Considere el sistema de control en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{8-37}$$

donde

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \qquad kT \leq t < (k+1)T$$

y el índice de desempeño a minimizar es

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [\mathbf{x}^*(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^*(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]\,dt \tag{8-38}$$

Se supone que el sistema de control de tiempo continuo está aproximado por su equivalente discreto. La ecuación del sistema discretizado es

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT)$$

y el índice de desempeño discretizado cuando $t_f = NT$ se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(NT)\mathbf{S}\mathbf{x}^*(NT) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^*(kT)\mathbf{Q}_1\,\mathbf{x}(kT) + 2\mathbf{x}^*(kT)\mathbf{M}_1\,\mathbf{u}(kT) + \mathbf{u}^*(kT)\mathbf{R}_1\,\mathbf{u}(kT)] \end{aligned} \tag{8-39}$$

Se observa que el término integral en la ecuación (8-38) no se reemplaza por

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^*(kT)\mathbf{Q}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{u}^*(kT)\mathbf{R}\mathbf{u}(kT)]$$

pero se modifica para incluir un término cruzado que involucra a $\mathbf{x}(kT)$ y $\mathbf{u}(kT)$. También se modifican las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$. A continuación, se considerará el problema de control óptimo discreto mediante el empleo de un ejemplo simple.

Considere el sistema de tiempo continuo definido por

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \tag{8-40}$$

donde a y b son constantes y

$$u(t) = u(kT), \qquad kT \leq t < (k+1)T$$

El índice de desempeño a minimizar es

$$J = \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\int_0^{NT} [Qx^2(t) + Ru^2(t)]\,dt \tag{8-41}$$

Se va a discretizar la ecuación del sistema y el índice de desempeño y se enunciará el problema de control óptimo cuadrático discreto.

La ecuación (8-40) se puede discretizar como

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

donde

$$G(T) = e^{aT}$$

$$H(T) = \int_0^T e^{aT} b\, d\tau = \frac{b}{a}(e^{aT} - 1)$$

o bien

$$x((k+1)T) = e^{aT}x(kT) + \frac{b}{a}(e^{aT} - 1)u(kT) \tag{8-42}$$

El índice de desempeño J dado por la ecuación (8-41) se puede discretizar. Primero, J se rescribe así

$$J_1 = \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T} [Qx^2(t) + Ru^2(t)]\, dt$$

Al observar que la solución $x(t)$ para $kT \le t < (k+1)T$ se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau \\ &= \xi(t - kT)x(kT) + \eta(t - kT)u(kT) \end{aligned}$$

donde

$$\xi(t - kT) = e^{a(t-kT)}$$

$$\eta(t - kT) = \int_{kT}^{t} \xi(t - \tau)b\, d\tau = \frac{b}{a}[e^{a(t-kT)} - 1]$$

el índice de desempeño J_1 se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T} \{Q[\xi(t - kT)x(kT) + \eta(t - kT)u(kT)]^2 \\ &\quad + Ru^2(kT)\}\, dt \\ &= \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T} [Q\xi^2(t - kT)x^2(kT) \\ &\quad + 2Q\xi(t - kT)\eta(t - kT)x(kT)u(kT) \\ &\quad + Q\eta^2(t - kT)u^2(kT) + Ru^2(kT)]\, dt \\ &= \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [Q_1x^2(kT) + 2M_1x(kT)u(kT) + R_1u^2(kT)] \end{aligned} \tag{8-43}$$

donde

$$Q_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} Q\xi^2(t - kT)\,dt$$

$$M_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} Q\xi(t - kT)\eta(t - kT)\,dt$$

$$R_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} [Q\eta^2(t - kT) + R]\,dt$$

Observe que Q_1, M_1 y R_1 se pueden simplificar como sigue:

$$Q_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} Qe^{2a(t-kT)}\,dt = \frac{Q}{2a}(e^{2aT} - 1) \tag{8-44}$$

$$M_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} Qe^{a(t-kT)}\frac{b}{a}[e^{a(t-kT)} - 1]\,dt = \frac{bQ}{2a^2}(e^{aT} - 1)^2 \tag{8-45}$$

$$R_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} \left[Q\left\{\frac{b}{a}[e^{a(t-kT)} - 1]\right\}^2 + R\right] dt$$

$$= \frac{b^2 Q}{2a^3}[(e^{aT} - 3)(e^{aT} - 1) + 2aT] + RT \tag{8-46}$$

En resumen, el problema de control óptimo cuadrático discreto se puede enunciar como sigue, dada la ecuación de un sistema discretizado

$$x((k + 1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

donde

$$G(T) = e^{aT} \qquad \text{y} \qquad H(T) = \frac{b}{a}(e^{aT} - 1)$$

encuentre la secuencia de control óptima $u(0), u(T), \ldots, u((N-1)T)$ tal que el índice de desempeño siguiente se minimice:

$$J_1 = \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[Q_1 x^2(kT) + 2M_1 x(kT)u(kT) + R_1 u^2(kT)]$$

Tal índice de desempeño que incluye un término cruzado que involucra los términos $x(kT)$ y $u(kT)$ puede ser modificado a otra forma que no los incluya, y la solución del problema de control óptimo discreto se puede obtener de una manera similar a la del problema de control óptimo cuadrático presentada anteriormente en esta sección. Esta cuestión se presenta a continuación.

Índice de desempeño que incluye un término cruzado que involucra a $\mathbf{x}(k)$ **y** $\mathbf{u}(k)$**.** Ahora se considera el problema de control óptimo cuadrático en donde el sistema es como el dado por la ecuación (8-1), el cual fue

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

y el índice de desempeño está dado por

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{8-47}$$

donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ son matrices Hermíticas definidas positivas o semidefinidas positivas de $n \times n$, $\mathbf{R}$ es una matriz Hermítica definida positiva de $r \times r$, y $\mathbf{M}$ es una matriz de $n \times r$ tal que la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

es positiva definida. Esto significa que

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}^*(k) \quad \mathbf{u}^*(k)]&\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

es definida positiva. Observe que el índice de desempeño J dado por la ecuación (8-47) incluye un término cruzado que involucra a $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$.

Para obtener el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$, se define a

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^* \tag{8-48}$$

y al eliminar $\mathbf{Q}$ del índice de desempeño J. Entonces, la ecuación (8-47) es

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\mathbf{x}^*(k)[\hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{M}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k) \\ &\quad + 2\mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)\} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) \\ &\quad + 2\mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\mathbf{x}^*(k)\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) \\ &\quad + [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{u}^*(k)]\mathbf{R}[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)]\} \end{aligned} \tag{8-49}$$

Se define

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) \tag{8-50}$$

Entonces la ecuación (8-49) se puede escribir como sigue:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{v}(k)] \tag{8-51}$$

Observe que la ecuación (8-51) ya no involucra el término cruzado. Efectivamente se ha eliminado el término cruzado que involucra a $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$.

Al sustituir la ecuación (8-50) en la ecuación del sistema, la ecuación (8-1), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[\mathbf{v}(k) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k)] \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{v}(k) \\ &= \hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{v}(k) \end{aligned} \tag{8-52}$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^* \tag{8-53}$$

Observe que el control óptimo cuadrático del sistema dado por la ecuación (8-1) con el índice de desempeño dado por la ecuación (8-47) es equivalente al control óptimo cuadrático del sistema dado por la ecuación (8-52) con el índice de desempeño dado por la ecuación (8-51). Por lo tanto, el vector de control óptimo $\mathbf{v}(k)$ que minimiza el índice de desempeño dado por la ecuación (8-51) se puede dar como sigue. En referencia a las ecuaciones (8-26), (8-28) y (8-30), se tiene

$$\mathbf{v}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\hat{\mathbf{G}}^*)^{-1}[\hat{\mathbf{P}}(k) - \hat{\mathbf{Q}}]\mathbf{x}(k) \tag{8-54}$$

o

$$\mathbf{v}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\hat{\mathbf{P}}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) \tag{8-55}$$

o sea

$$\mathbf{v}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) \tag{8-56}$$

donde $\hat{\mathbf{P}}(k)$ es una versión modificada de la ecuación (8-23), es decir,

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{G}}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)]^{-1}\hat{\mathbf{G}}, \qquad \hat{\mathbf{P}}(N) = \mathbf{S} \tag{8-57}$$

Entonces, el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede dar como

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{v}(k) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) \tag{8-58}$$

donde $\mathbf{v}(k)$ está dada por la ecuación (8-54), (8-55) y (8-56). Cualquiera que sea la expresión que se use para $\mathbf{v}(k)$, la ecuación (8-58) se puede reducir a la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{G} + \mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k) \tag{8-59}$$

(Para detalles, véase el problema A-8-2.)

Ejemplo 8-2

Considere el sistema de control continuo

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \qquad x(0) = 1 \tag{8-60}$$

donde

$$u(t) = u(kT), \qquad kT \le t < (k+1)T$$

y el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}x^2(NT) + \frac{1}{2}\int_0^{NT}[x^2(t) + u^2(t)]\,dt \tag{8-61}$$

donde $T = 1$ segundo y $N = 10$. Discretice la ecuación del sistema y el índice de desempeño. Entonces determine la secuencia de control óptimo $u(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$; ésta será la secuencia de control para la cual el índice de desempeño es mínima. También, obtenga el valor mínimo de J.

En referencia a las ecuaciones (8-40) y (8-42), la ecuación del sistema discretizado es

$$x((k+1)T) = e^{aT}x(kT) + \frac{b}{a}(e^{aT} - 1)u(kT)$$

donde $a = -1$, $b = 1$ y $T = 1$. Por lo tanto, la ecuación del sistema se convierte en

$$x(k + 1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k), \qquad x(0) = 1 \tag{8-62}$$

La discretización del índice de desempeño es

$$J_1 = \frac{1}{2}x^2(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[Q_1 x^2(k) + 2M_1 x(k)u(k) + R_1 u^2(k)] \tag{8-63}$$

donde Q_1, M_1 y R_1 se obtienen al sustituir $Q = 1$ y $R = 1$ en las ecuaciones (8-44), (8-45) y (8-46), respectivamente, como sigue:

$$Q_1 = \frac{1}{2a}(e^{2aT} - 1) = \frac{1}{-2}(e^{-2} - 1) = 0.4323$$

$$M_1 = \frac{b}{2a^2}(e^{aT} - 1)^2 = \frac{1}{2}(e^{-1} - 1)^2 = 0.1998$$

$$R_1 = \frac{b^2}{2a^3}[(e^{aT} - 3)(e^{aT} - 1) + 2aT] + T$$

$$= \frac{1}{2(-1)^3}[(e^{-1} - 3)(e^{-1} - 1) - 2] + 1 = 1.1681$$

Así, el índice de desempeño dado por la ecuación (8-63) se puede escribir como sigue:

$$J_1 = \frac{1}{2}x^2(10) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}[0.4323x^2(k) + 0.3996x(k)u(k) + 1.1681u^2(k)] \tag{8-64}$$

Por lo tanto, este problema se convierte como sigue. Dada la ecuación del sistema, ecuación (8-62), encuentre la secuencia de control óptimo $u(k)$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ tal que el índice de desempeño dado por la ecuación (8-64) sea mínimo.

Ahora al comparar las ecuaciones (8-47) y (8-64), se tiene

$$S = 1, \qquad Q = 0.4323, \qquad M = 0.1998, \qquad R = 1.1681$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} Q & M \\ M^* & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4323 & 0.1998 \\ 0.1998 & 1.1681 \end{bmatrix}$$

es positiva definida. El siguiente paso es modificar J_1 dada por la ecuación (8-64) a la forma dada por la ecuación (8-51), ya que $\bar{Q} = Q - MR^{-1}M^* = 0.3981$,

$$J_1 = \frac{1}{2}x^2(10) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}[0.3981x^2(k) + 1.1681v^2(k)] \tag{8-65}$$

La señal de control óptimo $u(k)$ se puede encontrar de la ecuación (8-58):

$$u(k) = v(k) - R^{-1}M^*x(k)$$

la cual se puede escribir en la forma dada por la ecuación (8-59):

$$u(k) = -[R + H^*\hat{P}(k + 1)H]^{-1}[H^*\hat{P}(k + 1)G + M^*]x(k) \tag{8-66}$$

donde

$$G = 0.3679 \qquad \text{y} \qquad H = 0.6321$$

La ecuación (8-66) se puede reescribir como sigue:

$$u(k) = -[1.1681 + 0.3996\hat{P}(k+1)]^{-1}[0.2325\hat{P}(k+1) + 0.1998]x(k)$$

$$= -\frac{0.2325\hat{P}(k+1) + 0.1998}{1.1681 + 0.3996\hat{P}(k+1)}x(k) = -K(k)x(k) \tag{8-67}$$

donde

$$K(k) = \frac{0.2325\hat{P}(k+1) + 0.1998}{1.1681 + 0.3996\hat{P}(k+1)} \tag{8-68}$$

Observe que $\hat{P}(k)$ está dada por la ecuación (8-57), o bien,

$$\hat{P}(k) = \hat{Q} + \hat{G}^*\hat{P}(k+1)[1 + HR^{-1}H^*\hat{P}(k+1)]^{-1}\hat{G} \tag{8-69}$$

donde $\hat{P}(N) = \hat{P}(10) = 1$ y

$$\hat{Q} = Q - MR^{-1}M^* = 0.3981$$

$$\hat{G} = G - HR^{-1}M^* = 0.3679 - 0.1081 = 0.2598$$

La ecuación (8-69) se puede simplificar en la siguiente forma:

$$\hat{P}(k) = 0.3981 + \frac{0.06750\hat{P}(k+1)}{1 + 0.3421\hat{P}(k+1)} \tag{8-70}$$

Ahora se calculará $\hat{P}(k)$ con la condición de frontera $\hat{P}(10) = 1$. Al utilizar la ecuación (8-70), se encuentra $\hat{P}(k)$ hacia atrás desde $k = 9$ hasta $k = 0$. Los resultados se presentan en la tabla 8-1. Al utilizar los valores de $\hat{P}(k)$ así obtenidos, se calcula $K(k)$ a partir de la ecuación (8-68). Los resultados también se presentan en la tabla 8-1. Ahora se calcula $x(k)$. Al sustituir la ecuación (8-67) en la ecuación (8-62) y al eliminar $u(k)$ de estas dos ecuaciones, se obtiene

$$x(k+1) = \frac{0.3035}{1.1681 + 0.3996\hat{P}(k+1)}x(k), \qquad x(0) = 1 \tag{8-71}$$

Tabla 8-1 VALORES DE $\hat{P}(k)$, $K(k)$, $x(k)$, Y $u(k)$ PARA EL SISTEMA CONSIDERADO EN EL EJEMPLO 8-2

k	$\hat{P}(k)$	$K(k)$	$x(k)$	$u(k)$
0	0.4230	0.2230	1.0000	−0.2230
1	0.4230	0.2230	0.2270	−0.05062
2	0.4230	0.2230	0.05152	−0.01149
3	0.4230	0.2230	0.01169	−0.002607
4	0.4230	0.2230	0.002653	−0.0005916
5	0.4230	0.2230	0.000602	−0.0001342
6	0.4230	0.2230	0.0001366	−0.0000304
7	0.4231	0.2231	≒0	≒0
8	0.4243	0.2257	≒0	≒0
9	0.4484	0.2758	≒0	≒0

Al comenzar con $x(0) = 1$, los valores de $x(k)$ se pueden calcular a partir de la ecuación (8-71) al utilizar los valores de (k) ya obtenidos. Los resultados se muestran en la tabla 8-1. Una vez que se obtienen los valores de $K(k)$ y $x(k)$, la señal de control óptimo $u(k)$ se puede obtener de la ecuación (8-67), o bien

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

Estos resultados también se muestran en la tabla 8-1.

Finalmente, en referencia a la ecuación (8-36), el valor mínimo de J_1 se puede obtener como sigue:

$$J_{1,\min} = \frac{1}{2}\hat{P}(0)x^2(0) = \frac{1}{2} \times 0.4230 \times 1^2 = 0.2115$$

Comentarios. El enfoque presentado aquí es útil para resolver un problema de control óptimo cuadrático de tiempo finito de un sistema de tiempo continuo mediante simulación en computadora. A menos que el índice de desempeño cuadrático de tiempo continuo dado se especifique claramente por alguna razón, es mejor definir un índice de desempeño cuadrático de tiempo discreto una vez que las ecuaciones del sistema se han discretizado. (Véase la sección 8-4.)

Observe que en la mayoría de los casos las matrices **S**, **Q** y **R** en el índice de desempeño no son fijas, pero en "cierto sentido" son matrices definidas positivas escogidas en forma arbitraria; la minimización de un índice de desempeño arbitrario no tiene mucho sentido. Como se apuntó antes, la razón principal por la que el esquema de control óptimo cuadrático sea útil y se utilice con frecuencia es que produce un sistema de control asintóticamente estable, excepto en algunos casos académicos. (Véanse los problemas A-8-6 y A-8-7.)

8-3 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO EN ESTADO ESTACIONARIO

Se ha visto que cuando el proceso de control es finito (cuando N es finita), la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}(k)$ se convierte en una matriz variante en el tiempo.

Ahora se considera el problema de control óptimo cuadrático cuando el proceso continúa sin limitaciones, o donde $N = \infty$ (esto es, cuando el proceso es uno de etapas infinitas). Como N se aproxima a infinito, la solución de control óptimo se convierte en una solución de estado estacionario, y la matriz de ganancia variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$ se convierte en una matriz de ganancia constante. Dicha matriz de ganancia constante $\mathbf{K}(k)$ se llama matriz de ganancia en estado estacionario y se escribe como $\mathbf{K}$.

A continuación, se considerará el control óptimo cuadrático en estado estacionario de un sistema regulador. La ecuación de la planta está dada por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{8-72}$$

Para $N = \infty$, el índice de desempeño se puede modificar a

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{8-73}$$

El término $\frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N)$, que aparece en la ecuación (8-2), no está incluido en esta representación de J. Esto se debe a que, si el sistema regulador óptimo es estable de tal forma que el valor de J converge a una constante, $\mathbf{x}(\infty)$ se hace cero y $\frac{1}{2}\mathbf{x}^*(\infty)\mathbf{S}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$.

Ahora la matriz en estado estacionario $\mathbf{P}(k)$ se define como $\mathbf{P}$. Con referencia en la ecuación (8-23), la matriz $\mathbf{P}$ se puede determinar como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G} \\ &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*)^{-1}\mathbf{G}\end{aligned} \tag{8-74}$$

Es claro que la matriz $\mathbf{P}$ es determinada por la matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$. Una expresión ligeramente diferente para $\mathbf{P}$ se puede obtener de la ecuación (8-24):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{8-75}$$

La matriz de ganancia en estado estacionario $\mathbf{K}$ se puede obtener en términos de $\mathbf{P}$ como sigue: De la ecuación (8-27),

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \tag{8-76}$$

De la ecuación (8-29),

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*)^{-1}\mathbf{G} \tag{8-77}$$

Todavía es posible otra expresión para $\mathbf{K}$. De la ecuación (8-31),

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{8-78}$$

La ley de control óptimo para la operación en estado estacionario está dada por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Si por ejemplo, la ecuación (8-78) se sustituye en esta última ecuación, se obtiene

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-79}$$

y el sistema de control se convierte en un sistema regulador óptimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}]\mathbf{x}(k) \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{8-80}$$

donde se ha utilizado el lema de inversión de matrices,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$$

con $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}$. (Remítase al apéndice A.)

El índice de desempeño J asociando la ley de control óptimo en estado estacionario se puede obtener de la ecuación (8-36) al sustituir $\mathbf{P}$ por $\mathbf{P}(0)$:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{8-81}$$

En mucho sistemas prácticos, en lugar de utilizar una matriz de ganancia variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$, se aproxima dicha matriz mediante la matriz constante $\mathbf{K}$. Las desviaciones del desempeño óptimo debidas a la aproximación aparecerán sólo cerca del fin del proceso de control.

Ecuación de Riccati en estado estacionario. Al implantar el controlador óptimo en estado estacionario (o invariante en el tiempo), se requiere la solución en estado estacionario de la ecuación de Riccati. Existen varias formas para obtener dicha solución.

Una forma es resolver la ecuación de Riccati en estado estacionario dada por la ecuación (8-75),

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}$$

es comenzar con la ecuación de Riccati en estado no estacionario, que fue dada en la ecuación (8-24):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k) = {} & \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \\ & - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\end{aligned} \tag{8-82}$$

Al invertir la dirección del tiempo, se puede modificar la ecuación (8-82) a

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k)\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k)\mathbf{G} \tag{8-83}$$

y comenzar la solución con $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$, e iterar la ecuación hasta obtener una solución en estado estacionario. Al calcular la solución numérica, es importante notar que la matriz $\mathbf{P}$ es una matriz Hermítica o real simétrica y es definida positiva.

A continuación, primero se presentará un enfoque de MATLAB para resolver el problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario. Después se estudiará otro enfoque basado en el método de Liapunov.

Enfoque de MATLAB para resolver el problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario. Ahora se considera un problema de ejemplo del control óptimo cuadrático en estado estacionario de un sistema regulador que se resuelve con MATLAB.

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El índice de desempeño J está dado por

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u'(k)Ru(k)]$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

La ley de control que minimiza a J puede estar dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Determine la matriz de ganancia en estado estacionario $\mathbf{K}$.

El programa 8-2 de MATLAB resuelve este problema. Observe que MATLAB lleva a cabo la solución iterativa de

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}'\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G}$$

Programa de MATLAB 8-2

```
% ------Control óptimo cuadrático en estado estacionario-------

% ***** Se resuelve la ecuación de Riccati en estado estacionario y se
encuentra la matriz de ganancia de realimentación óptima K*****

% *****Matrices G, H, Q y R *****

G = [0.2   0;0   0.4];
H = [1;1];
Q = [1   0;0   0.5];
R = [1];

% ***** Se comienza con la solución de la ecuación de Riccati en estado
estacionario
% cuando P = [0   0;0   0] *****

P = [0   0;0   0];
P = Q + G´*P*G - G´*P*H*inv(R + H´*P*H*)*H´*P*G;

% ***** La solución P se revisa cada 10 o 20 pasos de iteración.
% La iteración se detiene cuando P permanece constante. *****

para i = 1:10,
P = Q + G´*P*G - G´*P*H*inv(R + H´*P*H)*H´*P*G;
end
P

P =

          1.0252          -0.0189
         -0.0189           0.5724

para i = 1:10,
P = Q + G´*P*G - G´*P*H*inv(R + H´*P*H)*H´*P*G;
end
P

P =

          1.0252          - 0.0189
         -0.0189           0.5724

% ***** La matriz P permanece constante. Por lo tanto, se ha alcanzado
el estado estacionario. La matriz P en estado estacionario es *****

P

P =

          1.0252          - 0.0189
         -0.0189           0.5724
```

```
% ***** La matriz de ganancia de realimentación óptima K se obtiene de *****
K = inv(R + H'*P*H)*H'*P*G
K =
        0.0786    0      .0865
```

con la condición límite

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hasta que la solución alcance el estado estacionario. Entonces el programa 8-2 de MATLAB calcula la matriz de ganancia de realimentación óptima **K** empleando la ecuación siguiente:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{G}$$

Enfoque de Liapunov para resolver el problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario. A continuación se presentará el enfoque de Liapunov para resolver el problema de optimación de parámetros y el problema del regulador óptimo cuadrático en estado estacionario. Como se verá, existe una relación directa entre las funciones de Liapunov y los índices de desempeño cuadrático.

Se considera el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-84}$$

donde la matriz **G** involucra uno o más parámetros ajustables y cuyos valores propios están dentro del círculo unitario, o el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable. Se supone que se desea minimizar el índice de desempeño siguiente mediante el ajuste de un parámetro (o parámetros):

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) \tag{8-85}$$

donde **Q** es una matriz Hermítica (o real simétrica) definida o semidefinida positiva. Ahora se mostrará que una función de Liapunov se puede utilizar para resolver este problema.

Para el sistema de la ecuación (8-84), una función de Liapunov puede estar dada por

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$$

donde **P** es una matriz Hermética definida positiva y

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\ &= \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Si se hace que

$$\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) = -[\mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)] \tag{8-86}$$

Observe que la ecuación (8-86) se puede rescribir como:

$$\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) = -\{[\mathbf{G}\mathbf{x}(k)]^*\mathbf{P}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)\}$$
$$= -\mathbf{x}^*(k)[\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}]\mathbf{x}(k)$$

Por el segundo método de Liapunov, se sabe que para una matriz dada $\mathbf{Q}$ existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva, y como la matriz $\mathbf{G}$ es estable, entonces

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{8-87}$$

En consecuencia, se puede determinar $\mathbf{P}$ a partir de esta ecuación.

El índice de desempeño J se puede evaluar como sigue:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1)]$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{8-88}$$

donde $\mathbf{P}$ es una función del parámetro(s)ajustable(s). Al obtener la ecuación (8-88) se utilizó la condición que $\mathbf{x}(\infty) \to \mathbf{0}$, ya que todos los valores propios de $\mathbf{G}$ están dentro del círculo unitario. Por lo tanto, el índice de desempeño J se puede obtener en términos del estado inicial $\mathbf{x}(0)$ y de la matriz $\mathbf{P}$, la cual está relacionada con las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{Q}$ mediante la ecuación (8-87). La minimización del índice de desempeño J se puede realizar al minimizar $\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$ con respecto al parámetro en cuestión.

Es importante notar que el valor óptimo del parámetro depende, en general, de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$. Sin embargo, si $\mathbf{x}(0)$ involucra sólo un componente no cero, por ejemplo, si $x_1(0) \neq 0$ y las otras condiciones iniciales son cero, entonces el valor óptimo del parámetro no depende del valor numérico de $x_1(0)$.

Enfoque de Liapunov para resolver el problema de control óptimo cuadrático en estado estacionario. Ahora se considera el problema de control óptimo donde, dada la ecuación de la planta

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{8-89}$$

se desea determinar la matriz $\mathbf{K}$ de la ley de control óptima

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \tag{8-90}$$

tal que el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{8-91}$$

se minimice, donde $\mathbf{Q}$ es una matriz Hermítica (o real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva y $\mathbf{R}$ es una matriz Hermítica (o real simétrica) definida positiva.

Al sustituir la ecuación (8-90) en la ecuación (8-89), se obtiene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \tag{8-92}$$

Al sustituir la ecuación (8-90) en la ecuación (8-91) da

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k)\mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x}(k)]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \tag{8-93}$$

En el análisis siguiente, se supone que la matriz $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ es estable, es decir, los valores propios de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ están dentro del círculo unitario.(Si el sistema es completamente controlable y observable, se puede probar que $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ es una matriz estable. Refiérase al problema B-8-6.) Entonces, existe una función de Liapunov que es definida positiva y cuya derivada es definida negativa. Siguiendo la discusión dada al resolver el problema de optimación de parámetros, se tiene

$$\mathbf{x}^*(k)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) = -[\mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)] \tag{8-94}$$

En referencia a la ecuación (8-92), la ecuación (8-94) se puede modificar a

$$\mathbf{x}^*(k)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) = -[(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k)]^*\mathbf{P}[(\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k)] + \mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$$

$$= -\mathbf{x}^*(k)[(\mathbf{G} - \mathbf{HK})^*\mathbf{P}(\mathbf{G} - \mathbf{HK}) - \mathbf{P}]\mathbf{x}(k) \tag{8-95}$$

Al comparar los dos lados de la ecuación (8-95) y al notar que esta ecuación permanece verdadera para cualquier $\mathbf{x}(k)$, se requiere que

$$\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K} = -(\mathbf{G} - \mathbf{HK})^*\mathbf{P}(\mathbf{G} - \mathbf{HK}) + \mathbf{P} \tag{8-96}$$

Observe que mediante el segundo método de Liapunov, para una matriz estable $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$, existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva que satisface la ecuación (8-96).

La ecuación (8-96) se puede modificar como sigue:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K} + (\mathbf{G}^* - \mathbf{K}^*\mathbf{H}^*)\mathbf{P}(\mathbf{G} - \mathbf{HK}) - \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

o bien

$$\mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} + \mathbf{K}^*(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})\mathbf{K} - (\mathbf{K}^*\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{K}) = \mathbf{0}$$

Esta última ecuación se puede modificar como sigue:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} + [(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{1/2}\mathbf{K} - (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1/2}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}]^* \cdot [(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{1/2}\mathbf{K}$$

$$- (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1/2}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}] - \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{8-97}$$

La matriz $\mathbf{K}$ que minimiza a J se puede obtener al minimizar la parte izquierda de la ecuación (8-97) con respecto a $\mathbf{K}$. (Véase el problema A-8-5.) Ya que

$$[(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{1/2}\mathbf{K} - (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1/2}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}]^*[(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{1/2}\mathbf{K}$$

$$- (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1/2}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}]$$

no es negativa, el mínimo ocurre cuando es cero, o cuando

$$(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{1/2}\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1/2}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{8-98}$$

Al sustituir la ecuación (8-98) en la ecuación (8-97) se obtiene

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G} \tag{8-99}$$

La matriz **P** debe satisfacer la ecuación (8-99), la cual es la misma que la ecuación (8-75). La ecuación (8-99) se puede modificar y obtener

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}]\mathbf{G} \tag{8-100}$$

Mediante el uso del lema de inversión de matrices

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}$$

la ecuación (8-100) se puede modificar a

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G} \tag{8-101}$$

La matriz **P** se puede determinar de la ecuación (8-101).

Por último, el valor mínimo de J se puede obtener como sigue. En referencia a las ecuaciones (8-93) y (8-94) y al notar que $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$, el valor mínimo del índice de desempeño J se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

Ejemplo 8-3

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $-0.25 \le a < 0$. Se desea determinar el valor óptimo de a tal que minimice el índice de desempeño siguiente:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

De la ecuación (8-88), el índice de desempeño J en términos del parámetro a está dado por

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

donde **P** involucra el parámetro a. Ahora se determina **P** de la ecuación (8-87)

$$\mathbf{G}^*\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual se puede simplificar a

$$\begin{bmatrix} 2ap_{12} + a^2p_{22} & p_{11} + (a-2)p_{12} - ap_{22} \\ p_{11} + (a-2)p_{12} - ap_{22} & p_{11} - 2p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación resulta en las tres ecuaciones siguientes:

$$2ap_{12} + a^2p_{22} = -1$$
$$p_{11} + (a-2)p_{12} - ap_{22} = 0$$
$$p_{11} - 2p_{12} = -1$$

Al resolver estas tres ecuaciones para los p_{ij}, se obtiene

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1 + 0.5a^2}{a(1 + 0.5a)} & \dfrac{0.5(a-1)}{a(1 + 0.5a)} \\ \dfrac{0.5(a-1)}{a(1 + 0.5a)} & -\dfrac{1.5}{a(1 + 0.5a)} \end{bmatrix}$$

Ya que $-0.25 \leq a < 0$, $\mathbf{P}$ es definida positiva.

El índice de desempeño J se convierte en

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}p_{11}$$
$$= -\frac{1 + 0.5a^2}{2a(1 + 0.5a)}$$

El mínimo de J ocurre en el punto final $a = -0.25$. Por lo tanto, el valor mínimo de J se encuentra como

$$J_{\min} = -\frac{1 + 0.5(-0.25)^2}{2(-0.25)(1 - 0.5 \times 0.25)} = 2.3571$$

Ejemplo 8-4

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[u(k)], \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u^*(k)Ru(k)]$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = 1$. De la ecuación (8-98), la ley de control óptimo que minimiza el índice de desempeño J está dada por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -(\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

donde la matriz $\mathbf{P}$ se puede obtener de la ecuación (8-101):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G} \tag{8-102}$$

Se determina la matriz $\mathbf{P}$ para el presente sistema.

Observe que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es no singular, se puede modificar la ecuación (8-102) a

$$(\mathbf{P} - \mathbf{Q})\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}) = \mathbf{G}^*\mathbf{P} \tag{8-103}$$

La matriz **P** en este problema es una matriz real simétrica. En consecuencia, la ecuación (8-103) se puede escribir como:

$$\left\{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1][1 \quad 0]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} p_{12}(1 + p_{11}) & p_{12}^2 + p_{11} - 1 - p_{12} \\ (p_{22} - 1)(1 + p_{11}) & (p_{22} - 1)p_{12} + p_{12} - p_{22} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} + p_{12} & p_{12} + p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación produce cuatro ecuaciones escalares. Observe sin embargo, que sólo tres de ellas son linealmente independientes. Las cuatro ecuaciones escalares son:

$$p_{12}(1 + p_{11}) = p_{11} + p_{12}$$

$$p_{12}^2 + p_{11} - 1 - p_{12} = p_{12} + p_{22}$$

$$(p_{22} - 1)(1 + p_{11}) = p_{11}$$

$$(p_{22} - 1)p_{12} + p_{12} - p_{22} + 1 = p_{12}$$

De la primera de estas cuatro ecuaciones, se obtiene

$$p_{12} = 1 \tag{8-104}$$

y de la segunda de estas cuatro ecuaciones

$$p_{22} = p_{11} - 2 \tag{8-105}$$

Entonces, de la tercera de las cuatro ecuaciones se tiene

$$p_{11}^2 - 3p_{11} - 3 = 0 \tag{8-106}$$

[Al sustituir las ecuaciones (8-104) y (8-105) en la última de estas cuatro ecuaciones, se encuentra que ésta siempre se satisface.] Al resolver la ecuación (8-106), se encuentra que

$$p_{11} = 3.7913 \quad \text{o} \quad -0.7913$$

ya que la matriz **P** debe ser definida positiva, se escoge que $p_{11} = 3.7913$. Entonces

$$p_{22} = p_{11} - 2 = 3.7913 - 2 = 1.7913$$

En consecuencia, la matriz **P** es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.7913 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.7913 \end{bmatrix}$$

8-4 CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO DE UN SISTEMA DE SEGUIMIENTO

En esta sección se discutirá el control óptimo cuadrático de un sistema de seguimiento. La planta considerada es el péndulo invertido mostrado en la figura 8-3. Se diseñará un esquema de control para este sistema de control de péndulo invertido.

El péndulo invertido es inestable ya que puede caer en cualquier momento y hacia cualquier dirección a menos de que se le aplique una fuerza de control. Solamente se considera el problema en dos dimensiones en el cual el péndulo sólo se mueve en el plano de la página. Se supone que la masa

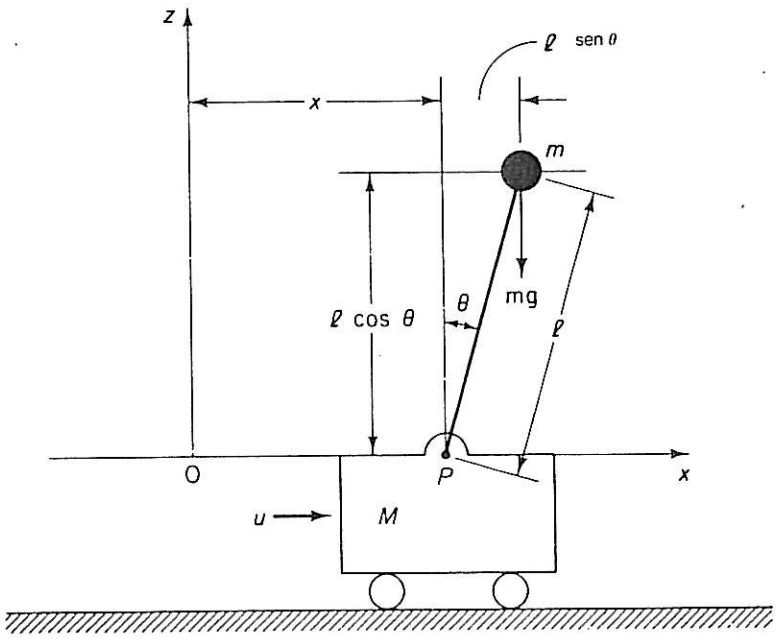


Figura 8-3 Sistema de péndulo invertido.

del péndulo se concentra al final de la varilla, como se presenta en la figura. (La varilla no tiene masa.) La fuerza de control u se aplica al carro.

Es preferible mantener el péndulo invertido en posición vertical tanto como sea posible y mantener el control de la posición del carro, por ejemplo, mover el carro en forma de escalón. Para controlar la posición del carro, se necesita construir un sistema de seguimiento tipo 1. El sistema del péndulo invertido montado sobre un carro no tiene un integrador. Por ello, se alimenta la señal de posición y (la cual indica la posición del carro) de regreso a la entrada y se inserta un integrador en la trayectoria directa, como se muestra en la figura 8-4. (Observe que son posibles otras configuraciones.) Se escoge el periodo de muestreo T como 0.1 segundos.

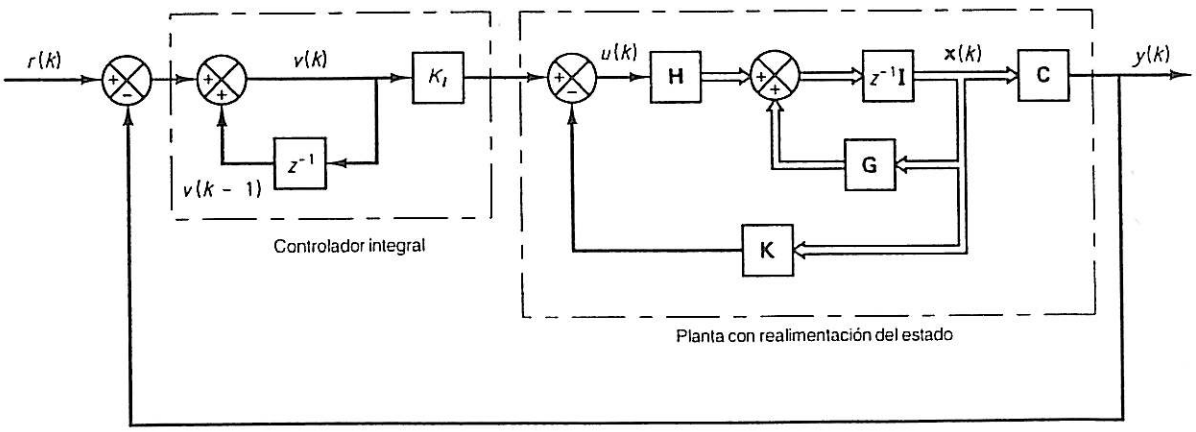


Figura 8-4 Diagrama de bloques del sistema de seguimiento.

El sistema de control a diseñar incluirá realimentación del estado y un integrador en el lazo cerrado. Las variables de diseño son la constante K_I y la matriz de ganancia de realimentación **K**. Por lo tanto, el diseñar el esquema de control significa determinar la constante K_I y la matriz **K**. Se resolverá este problema de diseño y se obtendrá la respuesta al escalón del sistema diseñado con ayuda de MATLAB.

Para resolver este problema de diseño, primero se definen las variables de estádo x_1, x_2, x_3 y x_4 como sigue:

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

En este sistema se quiere mantener el ángulo θ tan pequeño como sea posible cuando el carro es movido en forma de escalón. Se considera que el desplazamiento del carro es la salida del sistema. Así, la ecuación de salida es

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Se suponen los siguientes valores numéricos parar M, m y l.

$$M = 2 \text{ kg}, \qquad m = 0.1 \text{ kg}, \qquad l = 0.5 \text{ m}$$

Para diseñar el sistema de control, se utilizará el modelo discretizado. La ecuaciones de estado y de salida discretas para la planta se pueden obtener como se muestra a continuación. (Refiérase al problema A-8-10 para obtener estas ecuaciones.)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1 & 0.1 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad D = [0]$$

De la figura 8-4 la representación en el espacio de estado para el sistema de control completo está dada por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$
$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k)$$
$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)$$

donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

Ya que

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= -\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + v(k) - \mathbf{C}\mathbf{H}u(k) + r(k+1) \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1)$$

Se supone que la entrada r es una función escalón, es decir,

$$r(k) = r(k+1) = r$$

Entonces, cuando k se aproxima a infinito,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Se define

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(k) &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) \\ v_e(k) &= v(k) - v(\infty) \end{aligned}$$

Entonces la ecuación del error se convierte en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u_e(k)$$

Observe que

$$u_e(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(k) + K_I v_e(k) = -[\mathbf{K} \quad -K_I] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}$$

Ahora se define

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -K_I], \qquad w(k) = u_e(k)$$

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e}(k) \\ x_{2e}(k) \\ x_{3e}(k) \\ x_{4e}(k) \\ x_{5e}(k) \end{bmatrix}$$

donde $x_{5e}(k) = v_e(k)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k) \\ w(k) &= -\hat{\mathbf{K}}\xi(k) \end{aligned}$$

Hay que señalar que como el sistema es continuo, se debe considerar un índice de desempeño cuadrático también continuo. Sin embargo, la discretización de un índice de desempeño continuo genera un término cruzado que involucra a ξ y w.(Véase la sección 8-3.) Para simplificar el proceso de

diseño, es mejor definir un índice de desempeño cuadrático discreto. Por lo tanto, el problema se convierte en determinar la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ tal que minimice al siguiente índice de desempeño cuadrático:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\xi'\mathbf{Q}\xi + w'Rw]$$

donde $\mathbf{Q}$ y R se deben escoger en forma apropiada para que la respuesta del sistema sea aceptable. (El propósito de utilizar el índice de desempeño cuadrático es asegurar la estabilidad del sistema.)

Se escoge a $\mathbf{Q}$ y a R como sigue:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

El énfasis está en las variables de estado x_{3e} y x_{1e}. (Observe que se pueden utilizar diferentes valores de $\mathbf{Q}$ y R.) En el programa de MATLAB para resolver este problema, se utiliza la siguiente notación

$$\text{G1} = \hat{\mathbf{G}}, \qquad \text{H1} = \hat{\mathbf{H}}, \qquad \text{KK} = \hat{\mathbf{K}}$$

El programa 8-3 de MATLAB da la solución $\mathbf{P}$ para la ecuación de Riccati en estado estacionario, la matriz de realimentación $\mathbf{K}$, y la constante de ganancia integral K_I.

Programa de MATLAB 8-3

```
% ——— Diseño de un sistema de control de péndulo invertido
basado en la minimización de un índice de desempeño cuadrático ———

% ***** El siguiente programa resuelve la ecuación de Riccati en estado
estacionario y da la matriz de ganancia de realimentación óptima K *****

% ***** Matrices G, H, C y D *****

G = [1.1048   0.1035  0   0
     2.1316   1.1048  0   0
    -0.0025  -0.0001  1   0.1
    -0.0508  -0.0025  0     1];
H = [-0.0051
    -0.1035
     0.0025
     0.0501];
C = [0   0   1   0];
D = [0];

% ***** Matrices G1, H1, Q y R *****
```

```
G1 = [G zeros(4, 1); -C* G   1];
H1 = [H; -C* H];
Q = [10  0    0  0  0
      0  1    0  0  0
      0  0  100  0  0
      0  0    1  0  0
      0  0    0  0  1];
R = [1];

% ***** Se comienza a resolver la ecuación de Riccati en estado estacionario
% para P cuando P = diag(0, 4) *****

P = diag(0, 4);
P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1;

% ***** Se revisa la solución de P cada 20 iteraciones.
% La iteración se detiene cuando P permanece constante *****

para i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

1.0e + 003*

     9.6887     2.1677     3.4319     2.4341    -0.1741
     2.1677     0.4876     0.7743     0.5490    -0.0393
     3.4319     0.7743     2.2988     1.1788    -0.1312
     2.4341     0.5490     1.1788     0.7824    -0.0625
    -0.1741    -0.0393    -0.1312    -0.0625     0.0185

para i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

  1.0e + 004 *

     1.0707     0.2397     0.3996     0.2772    -0.0220
     0.2397     0.0539     0.0902     0.0625    -0.0050
     0.3996     0.0902     0.2617     0.1367    -0.0158
     0.2772     0.0625     0.1367     0.0895    -0.0078
    -0.0220    -0.0050    -0.0158    -0.0078     0.0021

para i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P
```

```
P =

  1.0e + 004*

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

para i = 1:20,
  P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P

P =

1.03 + 004*

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

% ***** La matriz P permanece constante. Por lo tanto, se ha alcanzado
el estado estacionario. La matriz P en estado estacionario es *****

P

P =

1.0e + 004*

    1.0724    0.2401    0.4006    0.2778   -0.0221
    0.2401    0.0540    0.0904    0.0627   -0.0050
    0.4006    0.0904    0.2623    0.1371   -0.0158
    0.2778    0.0627    0.1371    0.0897   -0.0078
   -0.0221   -0.0050   -0.0158   -0.0078    0.0021

% ***** La matriz de ganancia de realimentación óptima KK es *****

KK = inv(R + H1'*P*H1)*H1'*P*G1

KK =

   -64.9346   -14.4819   -10.8475   -9.2871    0.5189

K = [KK(1)  KK(2)  KK(3)  KK(4)]

K =

   -64.9346   -14.4819   -10.8475   -9.2871
```

```
KI = -KK(5)

KI =

    -0.5189
```

Por lo tanto, la matriz de realimentación $\mathbf{K}$ y la constante de ganancia integral K_I se determinan como sigue:

$$\mathbf{K} = [-64.9346 \quad -14.4819 \quad -10.8475 \quad -9.2871], \qquad K_I = -0.5189$$

El diseño matemático está completo.

Respuesta al escalón unitario del sistema diseñado. Para obtener la respuesta al escalón unitario, se procede como sigue: ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\
&= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_I v(k) \\
v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\
&= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\
&= (-\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + (1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I)v(k) + r
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{8-107}$$

$$y(k) = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + [0]r \tag{8-108}$$

donde $r = 1$. Para determinar la respuesta al escalón unitario $y(k)$ (la posición del carro), primero se define

$$\mathbf{GG} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HH} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = [\mathbf{C} \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$DD = [D] = [0]$$

y entonces las ecuaciones en el espacio de estado [ecuaciones (8-107) y (8-108)] se convierten a la función de transferencia pulso $Y(z)/R(z)$ mediante el uso del siguiente comando de MATLAB:

```
[num,den] = ss2tf(GG,HH,CC,DD)
```

Entonces se utiliza el comando *filter*:

```
y = filter(num,den,r)
```

donde r = entrada escalón unitario.

Para obtener la respuesta $x_1(k)$, se observa que

$$x_1(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix}$$

Se define

$$\mathbf{FF} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Entonces

$$x_1(k) = \mathbf{FF}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix} \tag{8-109}$$

Las ecuaciones en el espacio de estado [ecuaciones (8-107) y (8-109)] se convierten a la función de transferencia pulso $X_1(z)/R(z)$ mediante el comando

```
[núm 1, den 1] = ss2tf(GG, HH, FF, DD)
```

Entonces se utiliza el comando *filter*

```
x1 = filter(núm 1, den 1, r)
```

De forma similar, para obtener la respuesta de $x_2(k)$, se observa que

$$x_2(k) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ v(k)\end{bmatrix} \tag{8-110}$$

Se define

$$\mathbf{JJ} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Entonces las ecuaciones en el espacio de estado [ecuaciones (8-107) y (8-110)] se convierten a la función de transferencia pulso $X_2(z)/R(z)$ mediante el comando

```
[núm2,den2] = ss2tf(GG,HH,JJ,DD)
```

Entonces se utiliza el comando filter

```
x2 = filter(num2,den2,r)
```

De igual manera, al definir

$$\mathbf{LL} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$
$$\mathbf{MM} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

las respuestas $x_4(k)$ y $x_5(k) = v(k)$ se pueden obtener empleando los comandos

```
[núm 4, den 4] = ss2tf(GG, HH, LL, DD)
x4 = filter(num4,den4,r)
```

y

```
[num5,den5] = ss2tf(GG,HH,MM,DD)
x5 = filter(num5,den5,r)
```

El programa 8-4 de MATLAB proporciona $y(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_4(k)$ y $x_5(k)$ cuando la entrada es un escalón unitario ($r = 1$).

Programa de MATLAB 8-4

```
% ——— Respuesta al escalón del sistema diseñado ———

% ***** Este programa calcula la respuesta del sistema cuando está sujeto
a una entrada de un escalón unitario. Los valores que se usan para K y K1 se
calcularon en el programa de MATLAB 8-3. La respuesta se obtiene al usar
el método de convertir las ecuaciones de estado en tiempo discreto en
la forma de la función de transferencia de pulso. La respuesta se encuentra
con el comando 'filter' convencional *****

% ***** Matrices K, K1, GG, HH, CC, FF, JJ, LL, MM, DD *****

K = [-64.9346   -14.4819   -10.8475   -9.2871];
KI = -0.5189;
GG = [G-H*K   H*KI;-C*G + C*H*K   1-C*H*KI];
HH = [0; 0; 0; 0; 1];
CC = [0   0   1   0   0];
FF = [1   0   0   0   0];
JJ = [0   1   0   0   0];
LL = [0   0   0   1   0];
MM = [0   0   0   0   1];
DD = [0];

% ***** Para obtener y(k) las ecuaciones en el espacio de estado
se convierten a la función de transferencia pulso X3(z)/R(z) *****

[num, den] = ss2tf(GG, HH, CC, Dd);

% ***** Se introduce el comando para obtener la respuesta al escalón unitario *****

r = ones (1, 101);
axis ([0   100   -0.2   1.2]);
k = 0:100;
y = filter(num, den, r);
plot(k, y, 'o', k, y, '-')
grid
title('Position of Cart : y(k) = x3(k)')
xlabel('k')
ylabel('y(k) = x3(k)')

% ***** Para obtener x1(k) las ecuaciones en el espacio de estado se
convierten a la función de transferencia pulso X1(z)/R(z) *****

[num1, den1] = ss2tf(GG, HH, FF, DD);
```

```
% ***** Se introduce el comando para obtener la respuesta al escalón unitario *****
axis ([0   100   -0.1   0.2]);
x1 = filter(num 1, den 1, r);
plot (k, x1, 'o', k, x1, '-')
grid
title('Desplazamiento angular Theta: x1(k)')
xlabel('k')
ylabel('x1(k)')

% ***** Para obtener x2(k) las ecuaciones en el espacio de estado
se convierten a la función de transferencia pulso X2(z)/R(z) *****

[num 2, den 2] = ss2tf(GG, HH, JJ, Dd);

% ***** Se introduce el comando para obtener la respuesta al escalón unitario *****

axis([0   100   -0.5   0.5]);
x2 = filter(num 2, den 2, r);
plot (k, x2, 'o', k, x2, '-')
grid
title ('Velocidad angular Theta punto: x2(k)')
xlabel('k')
ylabel('x2(k)')

% ***** Para obtener x4(k) las ecuaciones en el espacio de estado
se convierten a la función de transferencia pulso X4(z)/R(z) *****

[num 4, den 4] = ss2tf(GG, HH, LL, DD);

% ***** Se introduce el comando para obtener la respuesta al escalón unitario *****

axis([0   100   -0.5   1]);
x4 = filter(num 4, den 4, r);
plot(k, x4, 'o', k, x4, '-')
grid
title ('Velocidad del carro: x4(k)')
xlabel ('k')
ylabel('x4(k)')

% ***** Para obtener x5(k) las ecuaciones en el espacio de estado s
e convierten a la función de transferencia pulso X5(z)/R(z) *****

[num 5, den 5] = s2tf(GG, HH, MM, DD);

% ***** Se introduce el comando para obtener la respuesta al escalón unitario *****

axis ([0   100   -5   30]);
x5 = filter(num 5, den 5, r);
plot(k, x5, 'o', k, x5, '-')
grid
title('Salida del integrador: x5(k) = v(k)')
xlabel('k')
ylabel('x5(k) = v(k)')
```

Con base en los cálculos de MATLAB, la posición del carro [$y(k)$ contra k] se puede obtener como se muestra en la figura 8-5. (Nótese que el movimiento inicial de carro es en la dirección negativa.) La figura 8-6 dibuja la gráfica del desplazamiento angular del péndulo, $x_1(k) = \theta(k)$, en función de

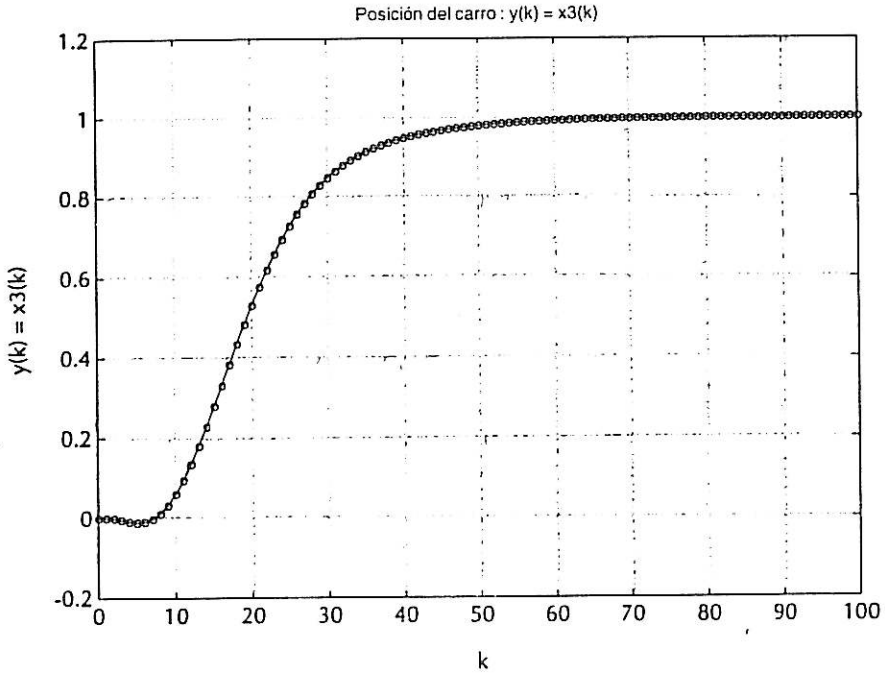


Figura 8-5 Gráfica de la posición del carro y y(k) contra k.

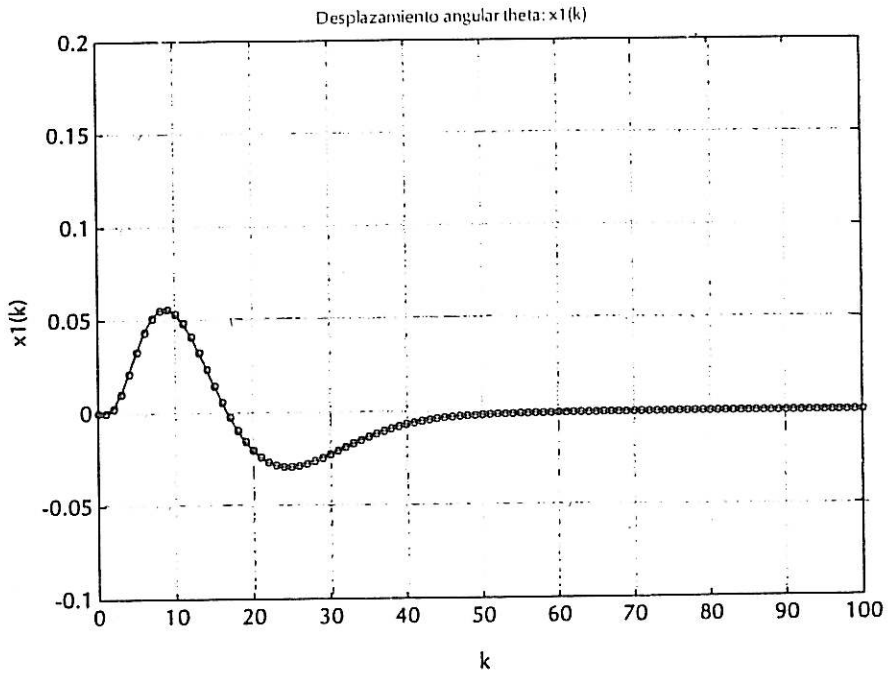


Figura 8-6 Gráfica del desplazamiento angular $x_1(k)$ contra k.

k. La figura 8-7 muestra la gráfica de la velocidad angular del péndulo, $x_2(k)$, en función de k. La figura 8-8 presenta la gráfica de la velocidad angular del carro, $x_4(k)$, en función de k. La salida del integrador, $v(k)$ contra k, se presenta en la figura 8-9.

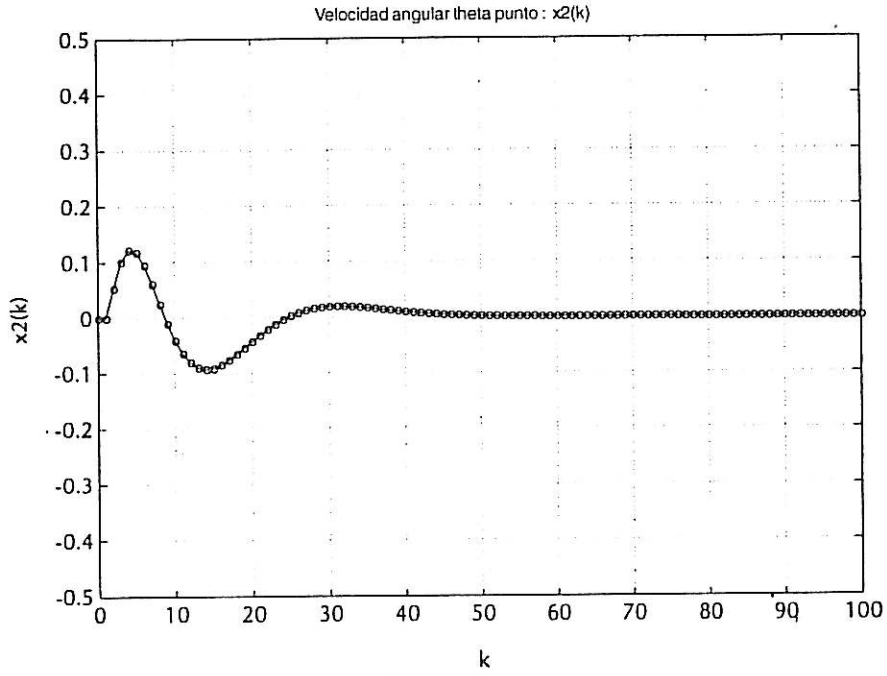


Figura 8-7 Gráfica de la velocidad angular $x_2(k)$ contra k.

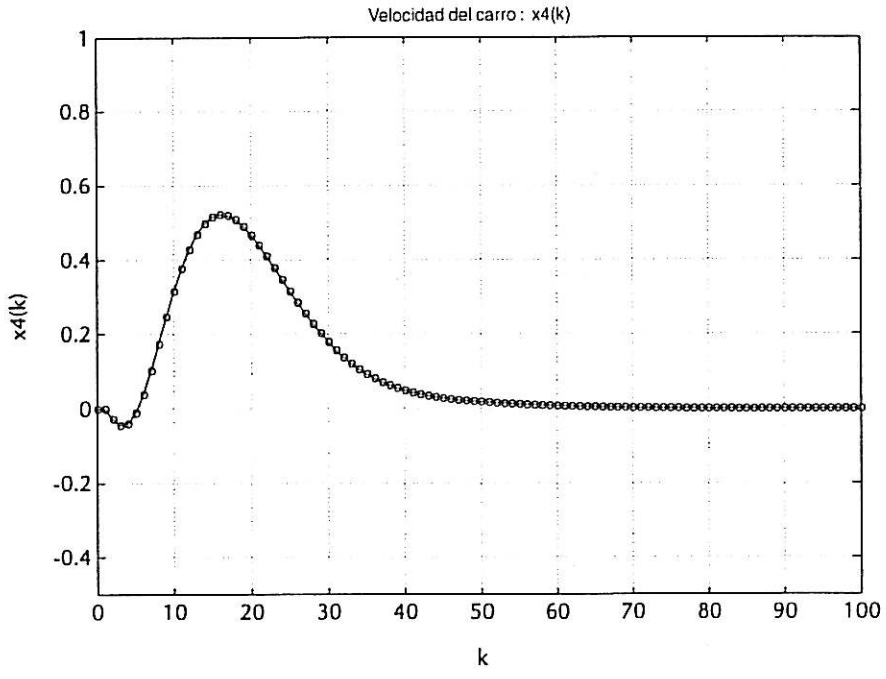


Figura 8-8 Gráfica de la velocidad del carro $x_4(k)$ contra k.

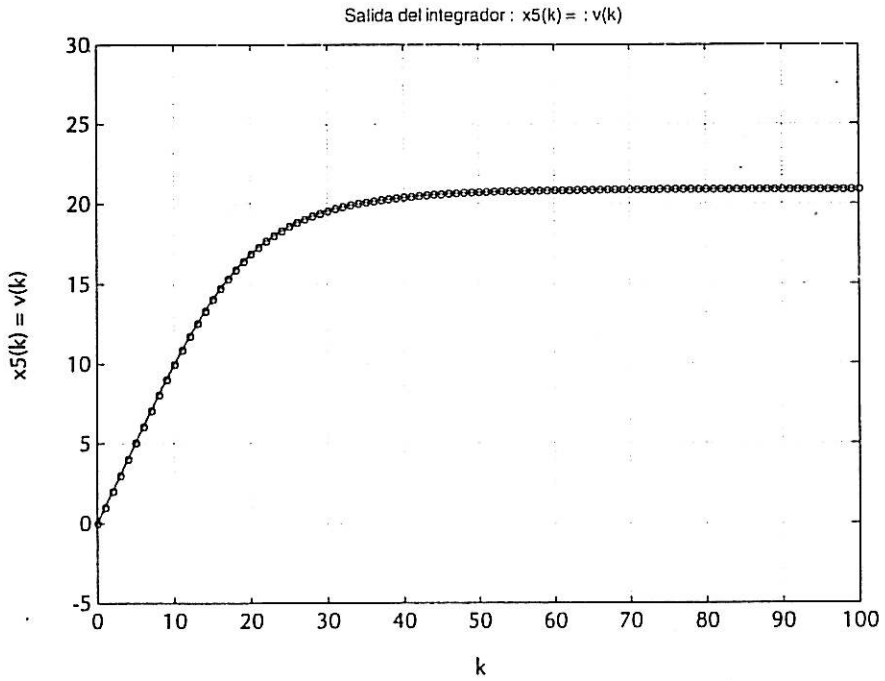


Figura 8-9 Gráfica de la salida del integrador $v(k)$ contra k.

Como en el sistema presente el periodo de muestreo T es 0.1 segundos, toma alrededor 6 segundos alcanzar el estado estacionario.

PROBLEMAS EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-8-1

Considere el sistema de control de tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-r)

$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

Se desea encontrar un vector de control óptimo tal que minimice el índice de desempeño siguiente:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]$$

donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ son matrices Hermíticas definidas positivas o semidefinidas positivas de $n \times n$ y $\mathbf{R}$ es una matriz Hermítica definida positiva de $r \times r$.

En la sección 8-2 se obtuvo el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ en la forma dada por la ecuación (8-26)

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) \tag{8-111}$$

donde $\mathbf{P}(k)$ está dada por las ecuaciones (8-23) y (8-25):

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}, \qquad \mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{8-112}$$

1. Muestre que el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se modifica a

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-113}$$

donde

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}, \qquad \mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{8-114}$$

2. Muestre que el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ también puede estar dado por

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{8-115}$$

donde

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}, \qquad \mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{8-116}$$

3. Muestre que las tres expresiones para $\mathbf{P}(k)$ dadas por las ecuaciones (8-112), (8-114) y (8-116) son equivalentes.

Solución

1. Primero se mostrará que las ecuaciones (8-111) y (8-113) son equivalentes. Con referencia a la ecuación (8-23)

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] &= (\mathbf{G}^*)^{-1}\mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \\ &= \mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \\ &= [\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

y se ha mostrado que las ecuaciones (8-111) y (8-113) son equivalentes.

2. Para mostrar que las ecuaciones (8-113) y (8-115) son equivalentes, observe que

$$\begin{aligned}&[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*] \\ &\quad = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{I} + \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*] \\ &\quad = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^* \\ &\quad = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1} = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$

y en consecuencia

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$
$$= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

De esta manera, se ha mostrado que las ecuaciones (8-113) y (8-115) son equivalentes.

3. A continuación, se probará que las ecuaciones (8-112) y (8-114) son equivalentes. Si se observa que

$$\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1} = [\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}$$

entonces la equivalencia entre las ecuaciones (8-112) y (8-114) es aparente.
Para mostrar que las ecuaciones (8-114) y (8-116) son equivalentes, observe que

$$[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]\{\mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\}$$
$$= \mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1) - \mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$
$$- \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$
$$= \mathbf{I} - \mathbf{H}\{-\mathbf{R}^{-1} + [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}$$
$$+ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$
$$= \mathbf{I} - \mathbf{H}\{[\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}][\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$
$$= \mathbf{I} - \mathbf{H}\{\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}][\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$
$$= \mathbf{I} - \mathbf{H}[\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}]\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{I}$$

Por lo tanto,

$$[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}$$
$$= \mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)$$

y se tiene

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\mathbf{G}$$
$$= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}$$

Por lo tanto, se ha mostrado que las ecuaciones (8-114) y (8-116) son equivalentes.

Problema A-8-2

Para el problema de control óptimo cuadrático donde el sistema está dado por la ecuación (8-1) y el índice de desempeño está dado por la ecuación (8-47), se encontró en la sección 8-2 que el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ puede estar dado por la ecuación

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{v}(k) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) \tag{8-117}$$

donde $\mathbf{v}(k)$ está dada por la ecuación (8-54), (8-55) y (8-56) como sigue:

$$\mathbf{v}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*(\hat{\mathbf{G}}^*)^{-1}[\hat{\mathbf{P}}(k) - \hat{\mathbf{Q}}]\mathbf{x}(k)$$

o

$$\mathbf{v}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*[\hat{\mathbf{P}}^{-1}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*]^{-1}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k)$$

o

$$\mathbf{v}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) \tag{8-118}$$

donde

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{G}}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)]^{-1}\hat{\mathbf{G}}, \qquad \hat{\mathbf{P}}(N) = \mathbf{S}$$

y

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^* \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*$$

Muestre que el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ se puede expresar como sigue:

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{G} + \mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k) \tag{8-119}$$

Solución La equivalencia entre los lados derechos de las tres expresiones de $\mathbf{v}(k)$ se demostró en el problema A-8-1. De donde, se puede obtener la ecuación (8-119) si se emplea, por ejemplo, la ecuación (8-118)

De las ecuaciones (8-117) y (8-118), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(k) &= \mathbf{v}(k) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) \\
&= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}(k) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*\mathbf{x}(k) \\
&= -\{[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)[\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*] \\
&\quad + [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k) \\
&= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{G} - \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^* \\
&\quad + \mathbf{M}^* + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k) \\
&= -[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{H}^*\hat{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{G} + \mathbf{M}^*]\mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

que es la ecuación (8-119)

Problema A-8-3

Considere el sistema de control de tiempo discreto definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine la secuencia de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ que minimiza el índice de desempeño siguiente

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(8)\mathbf{S}\mathbf{x}(8) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u^*(k)Ru(k)]$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1, \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución Con referencia a la ecuación (8-23), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{12}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{12}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La condición de frontera para $\mathbf{P}(k)$ está especificada por la ecuación (8-25) y está dado por

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{P}(8) = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula $\mathbf{P}(k)$ de atrás hacia adelante desde $\mathbf{P}(7)$ hasta $\mathbf{P}(0)$:

$$\mathbf{P}(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{24}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4286 & 0.8571 \\ 0.8571 & 1.7143 \end{bmatrix}$$

De forma similar, se pueden calcular $\mathbf{P}(5)$, $\mathbf{P}(4)$, . . . , $\mathbf{P}(0)$ como se presenta en la tabla 8-2.

A continuación se determinará la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}(k)$. Con referencia a la ecuación (8-27), la matriz $\mathbf{K}(k)$ puede estar dada por:

$$\mathbf{K}(k) = R^{-1}\mathbf{H}^*(\mathbf{G}^*)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]$$

$$= [1][1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} [\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]$$

TABLA 8-2 TABLA QUE MUESTRA $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ Y $u(k)$ PARA $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$, RESPECTIVAMENTE, PARA EL SISTEMA CONSIDERADO EN EL PROBLEMA A-8-3

k	$\mathbf{P}(k)$	$\mathbf{K}(k)$	$\mathbf{x}(k)$	$u(k)$
0	$\begin{bmatrix} 3.7913 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.7913 \end{bmatrix}$	[1.0000 0.7913]	$\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$	−1.0000
1	$\begin{bmatrix} 3.7911 & 0.9999 \\ 0.9999 & 1.7913 \end{bmatrix}$	[0.9999 0.7913]	$\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$	−0.7913
2	$\begin{bmatrix} 3.7905 & 0.9997 \\ 0.9997 & 1.7911 \end{bmatrix}$	[0.9997 0.7911]	$\begin{bmatrix} 0.2087 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$	−0.2087
3	$\begin{bmatrix} 3.7877 & 0.9986 \\ 0.9986 & 1.7905 \end{bmatrix}$	[0.9986 0.7905]	$\begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.2087 \end{bmatrix}$	−0.1651
4	$\begin{bmatrix} 3.7740 & 0.9932 \\ 0.9932 & 1.7877 \end{bmatrix}$	[0.9932 0.7877]	$\begin{bmatrix} 0.0437 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$	−0.0435
5	$\begin{bmatrix} 3.7097 & 0.9677 \\ 0.9677 & 1.7742 \end{bmatrix}$	[0.9677 0.7742]	$\begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0437 \end{bmatrix}$	−0.0342
6	$\begin{bmatrix} 3.4286 & 0.8571 \\ 0.8571 & 1.7143 \end{bmatrix}$	[0.8571 0.7143]	$\begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0003 \end{bmatrix}$	−0.0087
7	$\begin{bmatrix} 2.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 1.5000 \end{bmatrix}$	[0.5000 0.5000]	$\begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0099 \end{bmatrix}$	−0.0057
8	$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$	[0.0000 0.0000]	$\begin{bmatrix} 0.0057 \\ 0.0015 \end{bmatrix}$	0.0000

$$= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11}(k) - 1 & p_{12}(k) \\ p_{12}(k) & p_{22}(k) - 1 \end{bmatrix}$$

$$= [p_{12}(k) \quad p_{22}(k) - 1]$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{K}(8) = [p_{12}(8) \quad p_{22}(8) - 1] = [0.0000 \quad 0.0000]$$

$$\mathbf{K}(7) = [p_{12}(7) \quad p_{22}(7) - 1] = [0.5000 \quad 0.5000]$$

De forma similar, se pueden calcular $\mathbf{K}(6), \mathbf{K}(5), \ldots, \mathbf{K}(0)$ para dar los valores que se presentan en la tabla 8-2.

A continuación, se calculará $\mathbf{x}(k)$. Se escribe

$$\mathbf{K}(k) = [k_1(k) \quad k_2(k)]$$

Entonces

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$= [\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}(k)]\mathbf{x}(k)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - k_1(k) & 1 - k_2(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Ya que el estado inicial es

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(k)$, donde $k = 1, 2, \ldots, 8$, se puede obtener como sigue:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 1 - 0.7913 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 - 0.9999 & 1 - 0.7913 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2087 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

De igual manera, se pueden calcular $\mathbf{x}(3), \mathbf{x}(4), \ldots, \mathbf{x}(8)$. Estos resultados se muestran en la tabla 8-2.

Finalmente, la secuencia de control óptimo $u(k)$ se puede obtener de la ecuación (8-28):

$$u(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

Esto es,

$$u(0) = -\mathbf{K}(0)\mathbf{x}(0) = -[1 \quad 0.7913]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1.0000$$

$$u(1) = -\mathbf{K}(1)\mathbf{x}(1) = -[0.9999 \quad 0.7913]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -0.7913$$

De forma similar, se pueden calcular $u(2), u(3), \ldots, u(8)$ para dar los valores mostrados en la tabla 8-2.

Como se mencionó antes, la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}(k)$ es constante excepto para los últimos valores de k. Esto significa que si el número de etapas no es 8 sino 100 entonces $\mathbf{K}(0), \mathbf{K}(1), \ldots, \mathbf{K}(93)$ serán constantes y $\mathbf{K}(94), \mathbf{K}(95), \ldots, \mathbf{K}(100)$ variarán. Este hecho es importante, porque si el número de etapas N es suficientemente grande, entonces la matriz de ganancia de realimentación se convierte en una matriz constante y, por lo tanto, el diseñador es capaz de emplear una matriz de ganancia de realimentación constante para aproximar a la matriz de ganancia óptima variante en el tiempo.

El valor mínimo de J se obtiene de la ecuación (8-36) como sigue:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 3.7913 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.7913 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1.8956$$

Problema A-8-4

Con referencia al problema A-8-3, resuelva el problema con MATLAB. Escriba un programa en MATLAB para encontrar $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ y $u(k)$. Imprima $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ y $u(k)$.

Solución El programa 8-5 de MATLAB muestra una posibilidad para resolver el problema

Programa de MATLAB 8-5

```
% ——— Control óptimo cuadrático ———

% ***** Se resuelve la ecuación de Riccati y se encuentra la matriz
de ganancia de realimentación óptima K *****

% ***** Matrices G, H, S, Q y R *****

G = [1   1; 1   0];
H = [1; 0];
S = [1   0; 0   1];
Q = [1   0; 0   1];
R = [1];

% ***** x0 = [1; 0], N = 9, p11(N) = 1, p12(N) = 0,
% p22(N) = 1, x1(1) = 1, x2(1) = 0, Se introducen Pnext = S *****

x0 = [1; 0]; N = 9;
p11(N) = 1; p12(N) = 0; p22(N) = 1; x1(1) = 1; x2(1) = 0; Pnext = S;

% ***** Comienza la solución de la ecuación de Riccati *****

for i N - 1: -1 : 1,
  P = Q + G'*Pnext*inv(eye(2) + H*inv(R)*H'*Pnext)*G;
  p11(i) = P(1, 1); p12(i) = P(1, 2); p22(i) = P(2, 2); Pnext = P;
end

% ***** La matriz de ganancia de realimentación óptima K se obtiene de *****

for i = N: - 1: 1,
  K = inv(R)*H'*inv(G')*([p11(i)   p12(i); p12(i)   p22(i)] - Q);
  k1(i) = K(1); k2(i) = K(2);
end

% ***** El control u(k) se obtiene de *****

for 1 = 1: N - 1,
  xnext = (G - H*[k1(i)   k2(i)])*[x1(i); x2(i)];
  x1(i + 1) = xnext(1); x2(i '1) = xnext(2);
end
for i = 1: N,
  u(i) = -[k1(i)   k2(i)]*[x1(i); x2(i)];
end
```

Al emplear este programa, la matriz P, la matriz K, el vector x y el vector u se pueden obtener como se muestra a continuación

```
% ***** Impresión de P, K, x, y u *****

P = [p11;p12;p12;p22]

P =

Columns 1 through 7

    3.7913    3.7911    3.7905    3.7877    3.7740    3.7097    3.4286
    1.0000    0.9999    0.9997    0.9986    0.9932    0.9677    0.8571
    1.0000    0.9999    0.9997    0.9986    0.9932    0.9677    0.8571
    1.7913    1.7913    1.7911    1.7905    1.7877    1.7742    1.7143

Columns 8 through 9

    2.5000    1.0000
    0.5000         0
    0.5000         0
    1.5000    1.0000

K = [k1;k2]'

K =

    1.0000    0.7913
    0.9999    0.7913
    0.9997    0.7911
    0.9986    0.7905
    0.9932    0.7877
    0.9677    0.7742
    0.8571    0.7143
    0.5000    0.5000
         0         0

x = [x1;x2]

x =

Columns 1 through 7

    1.0000    0.0000    0.2087    0.0001    0.0437    0.0003    0.0099
         0    1.0000    0.0000    0.2087    0.0001    0.0437    0.0003
```

```
Columns 8 through 9

    0.0015    0.0057
    0.0099    0.0015

u = u'

u =

   -1.0000
   -0.7913
   -0.2087
   -0.1651
   -0.0435
   -0.0342
   -0.0087
   -0.0057
         0
```

En esta impresión, P0, P1, . . . , P8 están dados como vectores columna. La primer columna de la matriz P da P0, la segunda da P1, y así sucesivamente. En cada columna el primer renglón da p11, el segundo y tercero dan p12, y el cuarto p22. K0, K1, . . . , K8 están dados como vectores renglón en la matriz K. El primer renglón corresponde a K0 y el último a K8. x0, x1, . . . , x8 están dados como columnas de la matriz x. La primer columna corresponde a x0 y la última corresponde a x8. u0, u1, . . . , u8 están dados como el primero, segundo, . . . , noveno renglón del vector u.

Problema A-8-5

Considere el sistema de control escalar

$$x(k + 1) = gx(k) + hu(k) \tag{8-120}$$

y el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[qx^2(k) + ru^2(k)] \tag{8-121}$$

donde $q > 0$ y $r > 0$. En la sección 8-3 se mostró que la ley de control óptimo que minimiza el índice de desempeño J puede estar dada por

$$u(k) = -Kx(k) \tag{8-122}$$

Al sustituir la ecuación (8-122) en la ecuación (8-120), se obtiene,

$$x(k + 1) = (g - hK)x(k) \tag{8-123}$$

Al sustituir la ecuación (8-122) en la ecuación (8-121), se tiene

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(q + rK^2)x^2(k)$$

Al emplear el enfoque de Liapunov y con referencia a la ecuación (8-94), se establece que

$$(q + rK^2)x^2(k) = -[px^2(k + 1) - px^2(k)] \tag{8-124}$$

Al sustituir la ecuación (8-123) en la ecuación (8-124), se obtiene

$$(q + rK^2)x^2(k) = [-p(g - hK)^2 + p]x^2(k)$$

o

$$[q + rK^2 + p(g - hK)^2 - p]x^2(k) = 0$$

Esta última ecuación se debe mantener para cualquier $x(k)$, De donde, se requiere que

$$q + rK^2 + p(g - hK)^2 - p = 0 \tag{8-125}$$

Muestre que la ley de control óptimo se puede dar por

$$u(k) = -Kx(k) = -ghp(r + ph^2)^{-1}x(k)$$

o

$$K = ghp(r + ph^2)^{-1} \tag{8-126}$$

También muestre que p se puede determinar como una raíz positiva de la siguiente ecuación:

$$q - p + g^2rp(r + ph^2)^{-1} = 0 \tag{8-127}$$

Solución Con referencia a la ecuación (8-88), el índice de desempeño J se puede determinar como sigue:

$$J = \tfrac{1}{2}px^2(0)$$

Para minimizar el valor de J para un valor dado $x(0)$ con respecto a K, se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial K} = 0 \tag{8-128}$$

donde p está dado por la ecuación (8-125). Observe que en la ecuación (8-125) $q + rK^2 > 0$. De donde, $1 - (g - hK)^2 \neq 0$. Por lo tanto, p puede estar dada por:

$$p = \frac{q + rK^2}{1 - (g - hK)^2} \tag{8-129}$$

Al diferenciar a p respecto a K y al igualar el resultado a cero, se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial K} = \frac{2rK[1 - (g - hK)^2] - (q + rK^2)[2(g - hK)h]}{[1 - (g - hK)^2]^2} = 0$$

que da

$$rK[1 - (g - hK)^2] - (q + rK^2)(g - hK)h = 0$$

De donde, se obtiene

$$\frac{q + rK^2}{1 - (g - hK)^2} = \frac{rK}{h(g - hK)} \tag{8-130}$$

De las ecuaciones (8-129) y (8-130), se obtiene

$$p = \frac{rK}{h(g - hK)} \tag{8-131}$$

Al resolver la ecuación (8-131) para K y observando que $r + ph^2 > 0$, se tiene

$$K = \frac{ghp}{r + ph^2} = ghp(r + ph^2)^{-1} \tag{8-132}$$

que es la ecuación (8-126)

Al sustituir la ecuación (8-132) en la ecuación (8-125),

$$q + \frac{g^2h^2p^2r}{(r + ph^2)^2} + p\left(\frac{gr}{r + ph^2}\right)^2 - p = 0$$

que se puede simplificar a

$$q - p + g^2rp(r + ph^2)^{-1} = 0$$

que es la ecuación (8-127).

El mismo resultado se puede obtener en la forma siguiente. Primero observe que la ecuación (8-125) se puede modificar como sigue:

$$q + (r + ph^2)K^2 - 2ghpK + pg^2 - p = 0$$

o

$$q + pg^2 - p + \left(\sqrt{r + ph^2}K - \frac{ghp}{\sqrt{r + ph^2}}\right)^2 - \frac{g^2h^2p^2}{r + ph^2} = 0 \qquad (8\text{-}133)$$

Entonces, al considerar esta última ecuación como una función de K, el mínimo del lado izquierdo de esta ecuación con respecto a K ocurre cuando

$$\sqrt{r + ph^2}K - \frac{ghp}{\sqrt{1 + ph^2}} = 0$$

o

$$K = ghp(r + ph^2)^{-1} \qquad (8\text{-}134)$$

que es la ecuación (8-126).

Al sustituir la ecuación (8-134) en la ecuación (8-133), se obtiene

$$q + pg^2 - p - \frac{g^2h^2p^2}{r + ph^2} = 0$$

que se puede simplificar como sigue:

$$q - p + g^2rp(r + ph^2)^{-1} = 0$$

que es la ecuación (8-127).

Problema A-8-6

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

Muestre que este sistema no puede ser estabilizado mediante el esquema de realimentación del estado:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

cualquiera que sea el valor de la matriz $\mathbf{K}$.

Solución Se define a

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

Entonces

$$\mathbf{G} - \mathbf{HK} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -0.5 - k_1 & -0.5 - 0.5k_2 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación característica se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G} + \mathbf{HK}| = \begin{vmatrix} z + 0.5 + k_1 & 0.5 + 0.5k_2 \\ 0 & z - 1.5 \end{vmatrix}$$
$$= (z + 0.5 + k_1)(z - 1.5) = 0$$

Los polos de lazo cerrado están localizados en

$$z = -0.5 - k_1, \qquad z = 1.5$$

Ya que el polo en $z = 1.5$ está localizado fuera del círculo unitario, el sistema es inestable, cualquiera que sea el valor de la matriz **K**. Por lo tanto, la técnica de control óptimo cuadrático no se puede aplicar a este sistema. (La solución del problema del control óptimo cuadrático no existe.)

Problema A-8-7

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8-135}$$

y el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u^*(k)Ru(k)] \tag{8-136}$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

Determine la ley de control óptimo que minimiza el índice de desempeño. También determine el valor mínimo de J.

Solución De la ecuación (8-135) se tiene

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz **P** se puede determinar de la ecuación (8-101), o

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}R^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P})^{-1}\mathbf{G} \tag{8-137}$$

Como las matrices **Q**, **G**, **H** y R son reales, la matriz **P** es una matriz real simétrica. Al sustituir las matrices dadas **Q**, **G**, **H** y R en la ecuación (8-137), se obtiene

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al simplificar esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{1 + p_{11}} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_{12} & -p_{12} \\ 1 + p_{11} & 1 + p_{11} \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} p_{11}(1+p_{11}) & p_{12}(1+p_{11}) \\ p_{12}(1+p_{11}) & p_{22}(1+p_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) & -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) \\ -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) & -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11}) \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación es equivalente a las tres ecuaciones siguientes:

$$p_{11}(1+p_{11}) = 1 + p_{11} - p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11})$$
$$p_{12}(1+p_{11}) = -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11})$$
$$p_{22}(1+p_{11}) = -p_{12}^2 + p_{22}(1+p_{11})$$

Al resolver estas tres ecuaciones para p_{11}, p_{12} y p_{22}, se requiere que $p_{11} > 0$, se obtiene

$$p_{11} = 1, \quad p_{12} = 0, \quad p_{22} = 0$$

De donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8-138}$$

La ecuación (8-138) da la solución requerida de la ecuación de Riccati en estado estacionario.

Con referencia a la ecuación (8-79), se tiene

$$\begin{aligned} u(k) &= -(R + \mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ &= -(1+1)^{-1}[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \\ &= -2^{-1}[0 \quad 0]\mathbf{x}(k) = 0 \end{aligned} \tag{8-139}$$

La ecuación (8-139) da la ley de control óptimo.

El sistema en lazo cerrado se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \tag{8-140}$$

La ecuación (8-140) da la operación óptima en lazo cerrado del sistema. Los polos de lazo cerrado están en $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$. El sistema en lazo cerrado no es asintóticamente estable.

El valor mínimo de J se obtiene de la ecuación (8-81), como sigue:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}[1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Aunque el sistema no es asintóticamente estable, el índice de desempeño es finito y mínimo. De hecho, ya que $u(k) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, la ecuación del sistema se convierte en

$$x_1(k+1) = 0$$
$$x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$$

o

$$x_1(0) = 1, \quad x_1(k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$
$$x_2(0) = 1, \quad x_2(k) = 2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observe que el índice de desempeño es finito, porque involucra en $x_1(k)$, pero no involucra a $x_2(k)$.

Este problema de ejemplo ha mostrado que en un caso académico pero no práctico, el control óptimo cuadrático no produce un sistema asintóticamente estable.

Problema A-8-8

Si un sistema de control de tiempo discreto lineal de orden n de una entrada y una salida es de estado completamente controlable, se necesita al menos n periodos de muestreo para llevarlo desde un estado inicial arbitrario a un estado final deseado, considerando que el vector de control no está limitado. Por lo tanto, si se permite que N ($N > n$) periodos de muestreo, entonces se tendrá libertad adicional para satisfacer especificaciones adicionales.

La cantidad de energía de control que se necesita depende del intervalo de tiempo (número de periodos de muestreo) permitido para control. Si el número de periodos de muestreo permitido es n, el orden del sistema, entonces la secuencia de control de tiempo óptimo $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$ es única. Sin embargo, si se permiten N periodos de muestreo ($N > n$), entonces es posible más de una secuencia de control. Cada secuencia de control posible requiere una cierta cantidad de energía de control. En muchas aplicaciones industriales, si son posibles muchas secuencias de control, es preferible lograr las tareas de control empleando la cantidad mínima de energía.

En este problema, se trata de transferir el estado desde un estado inicial arbitrario al estado final deseado (que se supone es el origen del espacio de estado) en N periodos de muestreo y al mismo tiempo usar la mínima cantidad de energía de control.

Considere el sistema de control definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{8-141}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n) en el instante de muestreo k

$u(k)$ = señal de control (escalar) en el instante de muestreo k

$\mathbf{G}$ = matriz no singular de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times 1$

Determine la ley de control que llevará al estado del sistema desde un estado inicial arbitrario al origen en N periodos de muestreo (donde $N > n$) al usar la mínima cantidad de energía, donde la energía de control se mide con

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)$$

Suponga que el sistema es de estado completamente controlable.

Solución Con referencia a la ecuación (5-30), el estado $\mathbf{x}(N)$ de la ecuación (8-141) se puede escribir como

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{G}^N\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{N-1}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}^{N-2}\mathbf{H}u(1) + \cdots + \mathbf{G}\mathbf{H}u(N-2) + \mathbf{H}u(N-1)$$

Al sustituir $\mathbf{0}$ por $\mathbf{x}(N)$ en esta última ecuación

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u(0) - \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H}u(1) - \cdots - \mathbf{G}^{-N+1}\mathbf{H}u(N-2) - \mathbf{G}^{-N}\mathbf{H}u(N-1) \tag{8-142}$$

Se define

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{G}^{-i}\mathbf{H} \tag{8-143}$$

Entonces la ecuación (8-142) se convierte en

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{f}_1 u(0) - \mathbf{f}_2 u(1) - \cdots - \mathbf{f}_{N-1} u(N-2) - \mathbf{f}_N u(N-1) \tag{8-144}$$

Ya que el estado es completamente controlable, los vectores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ son linealmente independientes. (Los $N - n$ vectores restantes se pueden expresar como una combinación lineal de estos n vectores linealmente independientes.) La ecuación (8-144) se puede reescribir como

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{FU} \tag{8-145}$$

donde

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{f}_N], \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

Ahora se encontrará la secuencia de control que satisface la ecuación (8-145) y al mismo tiempo minimiza la energía de control total. Observe que la matriz $\mathbf{F}$ es de $n \times N$ y tiene rango n. Ya que $\mathbf{F}$ no es una matriz cuadrada, la inversa de $\mathbf{F}$ no está definida. Observe que como $N > n$ el número de señales de control desconocidas $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ en la ecuación (8-145) es mayor que el número n de ecuaciones escalares. Un conjunto de ecuaciones escalares en esta situación se dice que es *indeterminado* y posee un número indefinido de soluciones. Sin embargo, en este caso se tiene una limitante que hace que un conjunto de N variables desconocidas $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ produzcan una norma mínima:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) = \text{minimum}$$

Entonces, como se observa en el apéndice A (Sección A-8), existe una solución única. Dicha solución da la secuencia de control que lleva a un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ al origen en N periodos de muestreo y al hacer esto minimiza la energía de control total.

La solución minimizante en dicho problema, donde el número de variables desconocidas es mayor que el número de ecuaciones, se puede obtener en términos de la pseudoinversa derecha (refiérase al apéndice A). La pseudoinversa derecha se define como sigue:

$$\mathbf{F}^{RM} = \mathbf{F}^*(\mathbf{FF}^*)^{-1} \tag{8-146}$$

Al emplear la pseudoinversa derecha, la secuencia de control de energía mínima $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ que transfiere a un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$ al origen está dada por

$$\mathbf{U} = -\mathbf{F}^{RM}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{F}^*(\mathbf{FF}^*)^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{8-147}$$

Observe que $\mathbf{F}^*(\mathbf{FF}^*)^{-1}$ es una matriz de $N \times n$. De donde, $\mathbf{F}^*(\mathbf{FF}^*)^{-1}$ posmultiplicada por $\mathbf{x}(0)$ es una matriz de $N \times 1$. La ecuación (8-147) se puede rescribir como:

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} = -\mathbf{F}^*(\mathbf{FF}^*)^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{8-148}$$

La secuencia de control dada por la ecuación (8-148) llevará a un estado inicial arbitrario al origen en N periodos de muestreo y requerirá la mínima cantidad de energía entre todas las secuencias de control posibles que requieren N periodos de muestreo.

Problema A-8-9

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \tag{8-149}$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Se desea llevar al estado inicial al origen en tres periodos de muestreo. (El periodo de muestreo se supone de 1 segundo.) Entre la infinidad de posibles opciones para la secuencia de control, determine la secuencia de control óptimo que minimizará la energía de control, o la que minimizará el siguiente índice de desempeño.

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} u^2(k)$$

Solución De la ecuación (8-144), el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{f}_1 u(0) - \mathbf{f}_2 u(1) - \mathbf{f}_3 u(2)$$

donde

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.7181 \\ 1.7181 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -3.6701 \\ 4.6701 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{G}^{-3}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -11.6939 \\ 12.6939 \end{bmatrix}$$

De donde,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.7181 \\ 1.7181 \end{bmatrix} u(0) - \begin{bmatrix} -3.6701 \\ 4.6701 \end{bmatrix} u(1) - \begin{bmatrix} -11.6939 \\ 12.6939 \end{bmatrix} u(2)$$

o

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.7181 & -3.6701 & -11.6939 \\ 1.7181 & 4.6701 & 12.6939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} \tag{8-150}$$

Mediante el uso de la pseudoinversa derecha, se puede obtener la solución de la norma mínima de la ecuación (8-150) como

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\mathbf{F}^{RM}\mathbf{x}(0) = -\mathbf{F}^*(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.7181 & -3.6701 & -11.6939 \\ 1.7181 & 4.6701 & 12.6939 \end{bmatrix}$$

La pseudoinversa derecha $\mathbf{F}^{RM}$ se determina como sigue:

$$\mathbf{F}^{RM} = \mathbf{F}^*(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7181 & 1.7181 \\ -3.6701 & 4.6701 \\ -11.6939 & 12.6939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150.7326 & -166.8147 \\ -166.8147 & 185.8968 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7910 & 0.7191 \\ 0.5000 & 0.4738 \\ -0.2910 & -0.1929 \end{bmatrix}$$

de donde,

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.7910 & 0.7191 \\ 0.5000 & 0.4738 \\ -0.2910 & -0.1929 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3598 \\ -0.1310 \\ 0.4908 \end{bmatrix} \tag{8-151}$$

La secuencia de control dada por la ecuación (8-151) llevará al estado inicial al origen en tres periodos de muestreo y también minimiza la energía de control total.

Al emplear la secuencia de control óptimo dado por la ecuación (8-151), el estado se puede transferir como:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix}[-0.3598] = \begin{bmatrix} 1.7071 \\ -2.0669 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.7071 \\ -2.0669 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix}[-0.1310] = \begin{bmatrix} 0.3524 \\ -0.8432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6321 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3524 \\ -0.8432 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3679 \\ 0.6321 \end{bmatrix}[0.4908] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La mínima cantidad de energía para este control es

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2} u^2(k) = \frac{1}{2}[u^2(0) + u^2(1) + u^2(2)] = \frac{1}{2}[(-0.3598)^2 + (-0.1310)^2 + (0.4908)^2]$$

$$= 0.1937$$

Es interesante comparar la energía mínima obtenida aquí con la energía requerida para el sistema de control de tiempo óptimo. El sistema de control de tiempo óptimo requiere 2 periodos de muestreo. En el problema A-6-2, la secuencia de control de tiempo óptimo $u(0)$ y $u(1)$, donde el periodo de muestreo era de 1 segundo, se encontró como

$$u(0) = -1.5820x_1(0) - 1.2433x_2(0)$$

$$u(1) = 0.5820x_1(0) + 0.2433x_2(0)$$

[Refiérase a la ecuación (6-231).] Al tomar $x_1(0) = 5$ y $x_2(0) = -5$ y al sustituir estos valores en estas dos ecuaciones, se obtiene $u(0) = -1.6935$ y $u(1) = 1.6935$. Por lo tanto, para el control de tiempo mínimo la energía total requerida es

$$\frac{1}{2}[u^2(0) + u^2(1)] = \frac{1}{2}[(-1.6935)^2 + (1.6935)^2] = 2.8679$$

Observe que al permitir que la duración del control sea de tres periodos de muestreo (3 segundos), en lugar de dos periodos de muestreo, la energía requerida se puede reducir notablemente.

Problema A-8-10

Considere el sistema de péndulo invertido mostrado en la figura 8-10, donde un péndulo invertido está montado sobre un carro impulsado por un motor. En este caso se considera sólo el problema en dos dimensiones en que el péndulo se mueve únicamente en el plano del papel. El péndulo invertido es inestable ya que puede caer en cualquier momento a menos de que se aplique una fuerza de control adecuada. Suponga que la masa del péndulo está concentrada en el extremo de la varilla como se muestra en la figura. (Se supone que la varilla no tiene masa.) La fuerza de control u se aplica al carro.

En el diagrama, θ es el ángulo de la varilla respecto a la línea vertical. Se supone que θ es pequeño por lo que el sen θ y el cos θ se puede aproximar a θ y a 1 respectivamente, y también se supone $\dot{\theta}$ que es pequeño por lo que $\theta\dot{\theta}^2 \doteqdot$. (Bajo estas condiciones, las ecuaciones del sistema no lineal se pueden linealizar.)

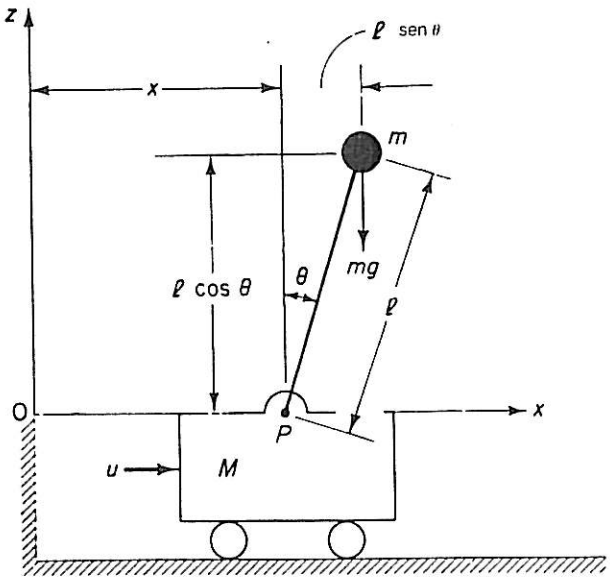


Figura 8-10 Sistema de péndulo invertido.

Se desea mantener el péndulo en la posición vertical en respuesta a cambios escalón en la posición del carro. (La fuerza de control u se aplica al carro.) Primero obtenga el modelo en el espacio de estado en tiempo continuo. Después discretice dicho modelo y obtenga el modelo discreto. Suponga que el periodo de muestreo T es de 0.1 segundos. Suponga los siguientes valores numéricos para M, m y l:

$$M = 2 \text{ kg}, \qquad m = 0.1 \text{ kg}, \qquad l = 0.5 \text{ m}$$

(En la sección 8-4 se diseñó un controlador digital para el sistema de péndulo invertido.)

Solución Se define el ángulo de la varilla desde la línea vertical como θ. (Como se desea mantener al péndulo invertido en posición vertical, se supone que θ es pequeño.) También se definen las coordenadas (x, z) del centro del gravedad de la masa como (x_G, z_G). Entonces

$$x_G = x + l \operatorname{sen} \theta$$

$$z_G = l \cos \theta$$

Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección x del movimiento se obtiene

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2x_G}{dt^2} = u$$

o

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + l \operatorname{sen} \theta) = u \tag{8-152}$$

Observe que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen} \theta = (\cos \theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{sen} \theta = -(\operatorname{sen} \theta)\dot{\theta}^2 + (\cos \theta)\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \cos \theta = -(\operatorname{sen} \theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = -(\cos \theta)\dot{\theta}^2 - (\operatorname{sen} \theta)\ddot{\theta}$$

La ecuación (8-152) se puede escribir como

$$(M + m)\ddot{x} - ml(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = u \tag{8-153}$$

La ecuación del movimiento de la masa m en la dirección z no se puede escribir sin considerar el movimiento de la masa m en la dirección x. Por lo que, en lugar de considerar el movimiento de la masa m en la dirección z, se considera el movimiento rotacional de la masa m alrededor del punto P. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento rotacional, se obtiene

$$m\frac{d^2x_G}{dt^2}l\cos\theta - m\frac{d^2z_G}{dt^2}l\,\text{sen}\,\theta = mgl\,\text{sen}\,\theta$$

o

$$\left[m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\,\text{sen}\,\theta)\right]l\cos\theta - \left[m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)\right]l\,\text{sen}\,\theta = mgl\,\text{sen}\,\theta$$

que se puede simplificar como sigue:

$$m[\ddot{x} - l(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}^2 + l(\cos\theta)\ddot{\theta}]l\cos\theta - m[-l(\cos\theta)\dot{\theta}^2 - l(\text{sen}\,\theta)\ddot{\theta}]l\,\text{sin}\,\theta = mgl\,\text{sen}\,\theta$$

Una simplificación posterior resulta en

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\,\text{sen}\,\theta \tag{8-154}$$

Al sustituir el sen $\theta \div \theta$, cos θ 1, y $\theta\theta^2 \div 0$, las ecuaciones (8-153) y (8-154) se pueden linealizar como sigue:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{8-155}$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mg\theta \tag{8-156}$$

Estas ecuaciones linealizadas son válidas mientras θ y θ sean pequeñas. Las ecuaciones (8-155) y (8-156) definen un modelo matemático del sistema del péndulo invertido.

Las ecuaciones del sistema linealizado, ecuaciones (8-155) y (8-156), se puede modificar a

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \tag{8-157}$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \tag{8-158}$$

La ecuación (8-157) se obtuvo al eliminar $\ddot{x}$ de las ecuaciones (8-155) y (8-156). La ecuación (8-158) se obtuvo al eliminar $\ddot{\theta}$ de las ecuaciones (8-155) y (8-156). Las variables de estado x_1, x_2, x_3 y x_4 se definen como

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Observe que el ángulo θ indica la rotación de la varilla del péndulo alrededor del punto P, y x es la ubicación del carro. Se considera a x como la salida del sistema, o

$$y = x = x_3$$

Entonces, de la definición de las variables de estado y de las ecuaciones (8-157) y (8-158), se obtiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M + m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u$$

En términos de las ecuaciones vector-matriz, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M + m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \tag{8-159}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{8-160}$$

Las ecuaciones (8-159) y (8-160) dan una representación en el espacio de estado del sistema de péndulo invertido. (Observe que la representación en el espacio de estado no es única. Existen una infinidad de esas representaciones.)

Al sustituir los valores numéricos de M, n y l, se obtiene

$$\frac{M + m}{Ml} g = 20.601, \qquad \frac{m}{M} g = 0.4905, \qquad \frac{1}{Ml} = 1, \qquad \frac{1}{M} = 0.5$$

Entonces la ecuación de estado y de salida para el péndulo invertido con carro se convierte en:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{8-161}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \tag{8-162}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \qquad D = 0$$

Ahora, se discretiza la ecuación de estado, ecuación (8-161). La discretización se logra al emplear el siguiente comando de MATLAB:

```
[G,H] = c2d(A,B,T)
```

donde T es el periodo de muestreo involucrado en el sistema de control de tiempo discreto. En este problema T = 0.1 segundos. Entonces el comando

```
[G,H] = c2d(A,B,0.1)
```

transformará la ecuación de estado en tiempo continuo en la ecuación de estado en tiempo discreto. Observe el siguiente comando y salida de MATLAB.

```
A = [0          1  0  0
     20.601     0  0  0
     0          0  0  1
     −0.4905    0  0  0];
B = [0;−1;0;0.5];

[G,H] = c2d(A,B,0.1)

G =

     1.1048    0.1035         0         0
     2.1316    1.1048         0         0
    −0.0025   −0.0001    1.0000    0.1000
    −0.0508   −0.0025         0    1.0000

H =

    −0.0051
    −0.1035
     0.0025
     0.0501
```

Por lo tanto, el modelo discretizado en el espacio de estado está dado como sigue:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1 & 0.1 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad D = 0$$

PROBLEMAS

Problema B-8-1

Considere el sistema discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine la secuencia de control óptimo $u(k)$ que minimiza el índice de desempeño siguiente:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*(8)\mathbf{S}\mathbf{x}(8) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u^*(k)Ru(k)]$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema B-8-2

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + u^*(k)Ru(k)]$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Determine la ley de control óptimo que minimiza el índice de desempeño. También determine el valor mínimo de J.

Problema B-8-3

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $-1 \leq a < 0$. Determine el valor de a tal que el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

se minimice.

Problema B-8-4

Un sistema de control discreto está definido por la ecuación

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k)$$

Determine la ley de control óptimo que minimice el siguiente índice de desempeño:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[x^2(k) + u^2(k)]$$

También determine el valor mínimo del índice de desempeño J.

Problema B-8-5

Considere el mismo sistema tratado en el problema A-8-6. ¿Es posible determinar una matriz definida positiva **P** para este sistema? Utilice la ecuación (8-101) para determinar la matriz **P**.

Problema B-8-6

Considere el sistema definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es un vector n, $\boldsymbol{u}(k)$ es un vector r, $\mathbf{y}(k)$ es un vector-m, $\mathbf{G}$ es una matriz de $n \times n$, $\mathbf{H}$ es una matriz de $n \times r$, y $\mathbf{C}$ es una matriz de $m \times n$. El índice de desempeño es

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{x}^*(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz Hermítica definida positiva de $n \times n$ y $\mathbf{R}$ es una matriz Hermítica definida positiva de $r \times r$. La ley de control óptimo que minimiza al índice de desempeño está dada como $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$.

Muestre que si el sistema es de estado completamente controlable y observable entonces la ecuación algebraica de Riccati

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{G}^* - \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{C}^*(\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{G}^*$$

tiene una solución definida positiva única. Muestre también que el sistema en lazo cerrado óptimo es estable, o $\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}$ es una matriz estable.

Problema B-8-7

Con referencia al problema A-8-9, resuelva el mismo problema con MATLAB. Determine la secuencia de control óptimo $u(0)$, $u(1)$ y $u(2)$.

Problema B-8-8

Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k), \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se desea llevar el estado inicial al origen en n periodos de muestreo. Determine la ley de control óptima que minimiza la energía de control medida con

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} u^2(k)$$

Considere los valores de n: $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.

Problema B-8-9

Considere el diseño del sistema de seguimiento mostrado en la figura 8-11. La planta no involucra un integrador, por lo que se incluye un controlador integral en el lazo. El periodo de muestreo T es de 0.1 segundos.

Muestre que el sistema de ecuaciones se puede dar mediante las siguientes ecuaciones en el espacio de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}w(k)$$
$$w(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

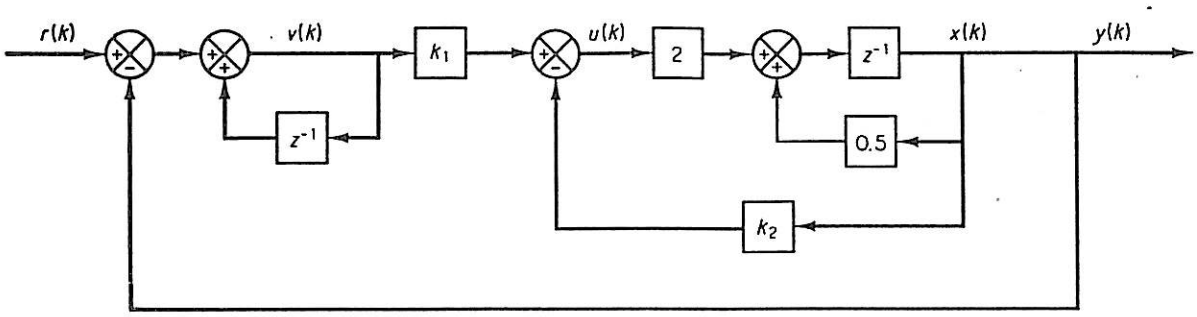


Figura 8-11 Sistema de seguimiento.

donde

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) - x(\infty) \\ v(k) - v(\infty) \end{bmatrix}, \qquad w(k) = u(k) - u(\infty)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = [k_2 \quad -k_1]$$

Problema B-8-10

Con referencia al problema B-8-9, se desea diseñar la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K} = [k_2 \quad -k_1]$ tal que el sistema tenga una respuesta al escalón razonable. Se supone que se emplea el esquema de control óptimo cuadrático.

Se supone el índice de desempeño siguiente:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k)^*\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + w(k)^*Rw(k)]$$

Si $\mathbf{Q}$ y R se escogen como definidas positivas, el sistema resultante es estable. Para este problema, se escogen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

Observe que $\mathbf{Q}$ y R son sólo un conjunto posible. (Se pueden seleccionar otras $\mathbf{Q}$ y R definidas positivas. El sistema resultante es estable pero diferente para cada conjunto distinto de $\mathbf{Q}$ y R.)

Empleando la representación en el espacio de estado del problema B-8-9, determine la matriz $\mathbf{K}$ con MATLAB. Escriba un programa en MATLAB. Al utilizar la matriz $\mathbf{K}$ así determinada, obtenga la respuesta al escalón del sistema diseñado con ayuda de MATLAB. Dibuje la gráfica de $y(k)$ contra k y $v(k)$ contra K.

Apéndice A

Análisis vector-matrices

A-1 DEFINICIONES

Las matrices que se encuentran con frecuencia en el estudio de la teoría de control moderna son la matriz simétrica, la matriz anti-simétrica, la matriz ortogonal, la matriz Hermítica, la matriz anti-Hermítica, la matriz unitaria y la matriz normal. Las siguientes ecuaciones definen estas matrices:

$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$	A es simétrica
$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$	A es anti-simétrica
$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$	A es ortogonal
$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$	A es Hermítica
$\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$	A es anti-Hermítica
$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}$	A es unitaria
$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ o $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$	A es normal

donde el superíndice * denota la transpuesta conjugada y el superíndice T significa la transpuesta.

A-2 DETERMINANTES

Determinantes de una matriz de 2 × 2, 3 × 3 y 4 × 4. Para una matriz A de 2 × 2, se tiene

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Para una matriz **A** de 3 × 3,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

Para una matriz **A** de 4 × 4,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{A-1}$$

(Esta expansión se llama expansión de Laplace por menores.)

Propiedades del determinante. El determinante de una matriz de $n \times n$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si dos renglones (o dos columnas) del determinante se intercambian, sólo el signo del determinante se cambia.
2. El determinante es invariante bajo la suma de un escalar múltiplo de un renglón (o una columna) a otro renglón (o columna)
3. Si una matriz de $n \times n$ tiene dos renglones (o columnas) idénticos, entonces el determinante es cero.
4. Para una matriz **A** de $n \times n$,

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|, \qquad |\mathbf{A}^*| = |\overline{\mathbf{A}}|$$

5. El determinante de un producto de dos matrices **A** y **B** de $n \times n$ es el producto de sus determinantes

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|$$

6. Si un renglón (o una columna) se multiplica por un escalar k, entonces el determinante se multiplica por k.
7. Si todos los elementos de una matriz de $n \times n$ se multiplican por k, entonces el determinante se multiplica por k^n, es decir,

$$|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$$

8. Si lo valores propios de **A** son λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), entonces

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

De donde, $|\mathbf{A}| \neq 0$ implica que $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. (Para detalles de los valores propios, vea la sección A-6.)

9. Si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, de $n \times m$, de $m \times n$ y de $m \times m$, respectivamente, entonces

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}|, \qquad \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \text{ y } |\mathbf{D}| \neq 0 \tag{A-2}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{si } |\mathbf{A}| = 0 \text{ o } |\mathbf{D}| = 0 \text{ o } |\mathbf{A}| = |\mathbf{D}| = 0$$

También,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{cases} |\mathbf{A}|\,|\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|, & \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \quad \text{(A-3)} \\ |\mathbf{D}|\,|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}|, & \text{si } |\mathbf{D}| \neq 0 \quad \text{(A-4)} \end{cases}$$

[Para obtener la ecuación (A-2), vea el problema A-1. Para obtener las ecuaciones (A-3) y (A-4), refiérase al problema A-2.]

10. Para una matriz **A** de $n \times m$ y una matriz **B** de $m \times n$, se tiene,

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{BA}| \tag{A-5}$$

(Para la prueba, vea el problema A-3.) En particular, para $m = 1$, es decir, para una matriz **A** de $n \times 1$ y una matriz **B** de $1 \times n$, se tiene,

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| = 1 + \mathbf{BA} \tag{A-6}$$

Las ecuaciones (A-2) hasta la (A-6) son útiles en el cálculo de los determinantes de matrices de orden grande.

A-3 INVERSIÓN DE MATRICES

Matriz no singular y matriz singular. Una matriz cuadrada **A** es una matriz no singular si existe una matriz **B** tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Si dicha matriz **B** existe, entonces se denota como $\mathbf{A}^{-1}$. $\mathbf{A}^{-1}$ se llama la *inversa* de **A**. La matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ existe si $|\mathbf{A}|$ no es cero. Si $\mathbf{A}^{-1}$ no existe, **A** se dice ser *singular*.

Si **A** y **B** son dos matrices no singulares, entonces el producto **AB** es una matriz no singular.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Asimismo,

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

y

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$$

Propiedades de la inversa de una matriz. La inversa de una matriz tiene las siguientes propiedades.

1. Si k es un escalar no cero y **A** es una matriz de $n \times n$ no singular, entonces

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$$

2. El determinante de $\mathbf{A}^{-1}$ es el inverso del determinante de $\mathbf{A}$, o

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

Esto se puede verificar fácilmente como sigue:

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| = 1$$

Fórmulas útiles para encontrar la inversa de una matriz

1. Para una matriz $\mathbf{A}$ de 2×2, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0$$

la matriz inversa está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. Para una matriz $\mathbf{A}$ de 3×3, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \qquad |\mathbf{A}| \neq 0$$

la matriz inversa está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

3. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son, respectivamente, matrices de $n \times n$, de $n \times m$, de $m \times n$ y de $m \times m$, entonces

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} \tag{A-7}$$

con la condición de que las inversas indicadas existan. La ecuación (A-7) se refiere comúnmente como el *lema de inversión de matrices*. (Para la prueba, vea el problema A-4.)

Si $\mathbf{D} = \mathbf{I}_m$, entonces la ecuación (A-7) se simplifica a

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I}_m + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$$

En esta última ecuación, si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices de $n \times 1$ y de $1 \times n$, respectivamente, entonces,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BCA}^{-1}}{1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}} \tag{A-8}$$

La ecuación (A-8) es útil en que si una matriz $\mathbf{X}$ de $n \times n$ se puede escribir como $\mathbf{A} + \mathbf{BC}$,

donde **A** es una matriz de $n \times n$ cuya inversa es conocida y **BC** es el producto de un vector columna y un vector renglón, entonces $\mathbf{X}^{-1}$ se puede obtener fácilmente en términos de las matrices conocidas $\mathbf{A}^{-1}$, **B** y **C**.

4. Si **A**, **B**, **C** y **D** son, respectivamente, matrices de $n \times n$, de $n \times m$, de $m \times n$ y de $m \times m$, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-9}$$

con la condición de que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \neq 0$, o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-10}$$

con la condición de que $|\mathbf{D}| \neq 0$ y $|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}| \neq 0$. En particular, si $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, entonces las ecuaciones (A-9) y (A-10) se pueden simplificar como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-11}$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-12}$$

[Para obtener las ecuaciones (A-9) hasta (A-12), refiérase a los problemas A-5 y A-6.]

A-4 REGLAS DE OPERACIONES CON MATRICES

En esta sección se revisarán algunas reglas de operaciones algebraicas con matrices y después se dará la definición de la derivada e integral de una matriz. Luego se presentarán las reglas de diferenciación de matrices.

Observe que el álgebra de matrices difiere del álgebra de números ordinarios en que la multiplicación de matrices no es conmutativa y la cancelación de matrices no es válida.

Multiplicación por un escalar. El producto de una matriz y de un escalar es una matriz en la cual cada elemento está multiplicado por el escalar. Es decir,

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por una matriz. La multiplicación de una matriz por una matriz es posible entre matrices cuyo número de columnas en la primera matriz es igual al número de renglones en la segunda. De otra forma, la multiplicación no está definida.

Considere el producto de una matriz **A** de $n \times m$ y una matriz **B** de $m \times r$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

Por lo tanto, la multiplicación de una matriz de $n \times m$ por una de $m \times r$ da una matriz de $n \times r$. Se debe notar que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa; es decir,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \qquad \text{en general}$$

Por ejemplo

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{bmatrix}$$

Así, en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. De donde, el orden de la multiplicación es significativo y se debe preservar. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, las matrices **A** y **B** se dicen que conmutan. En las matrices **A** y **B** anteriores, si, por ejemplo, $a_{12} = a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$, entonces **A** y **B** conmutan.

Para matrices diagonales **A** y **B** de $n \times n$,

$$\mathbf{AB} = [a_{ij}\,\delta_{ij}][b_{ij}\,\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & & & 0 \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

Si **A**, **B** y **C** son matrices de $n \times m$, de $m \times r$ y de $r \times p$, respectivamente, entonces la ley asociativa siguiente se cumple:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Esto se puede probar como sigue:

$$\text{el elemento } (i, k) \text{ de } \mathbf{AB} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}$$

$$\text{el elemento } (j, h) \text{ de } \mathbf{BC} = \sum_{k=1}^{r} b_{jk}\, c_{kh}$$

$$\text{el elemento } (i, h) \text{ de } (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jl}\right) c_{lh} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} (a_{ij}\, b_{jk}) c_{kh}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} a_{ij}(b_{jk}\, c_{kh}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{r} b_{jk}\, c_{kh}\right]$$

$$= \text{elemento } (i, h) \text{ de } \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Como la asociatividad de la multiplicación de matrices se conserva, se tiene

$$\mathbf{ABCD} = (\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) = \mathbf{A}(\mathbf{BCD}) = (\mathbf{ABC})\mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}^{m+n} = \mathbf{A}^m \mathbf{A}^n, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si **A** y **B** son matrices de $n \times m$ y **C** y **D** son matrices de $m \times r$, entonces la siguiente ley distributiva se cumple:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{AC} + \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{BD}$$

Esto se puede probar al comparar el elemento (i, j) de $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\ (\mathbf{C} + \mathbf{D})$ con el elemento (i, j) de $(\mathbf{AC} + \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{BD})$.

Comentarios sobre la cancelación de matrices. La cancelación de matrices no es válida en el álgebra de matrices. Considere el producto de dos matrices singulares **A** y **B**. Tome por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Es evidente que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. De hecho, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ implica una de las siguientes tres:

1. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
3. **A** y **B** son similares.

Se puede ver fácilmente que, si **A** y **B** son matrices no cero y $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces **A** y **B** deben ser singulares. Suponga que **B** no es cero y **A** es no singular. Entonces $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $\mathbf{A}^{-1}$ existen. Entonces se obtiene

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

que contradice la suposición de que **B** no es cero. En esta forma se puede probar que **A** y **B** deben ser singulares si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

De forma similar, observe que si **A** es singular entonces tampoco $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ ni $\mathbf{BA} = \mathbf{CA}$ implican que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Sin embargo, si **A** es una matriz no singular, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ implica que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ y $\mathbf{BA} = \mathbf{CA}$ implica que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Derivada e integral de una matriz. La derivada de una matriz $\mathbf{A}(t)$ de $n \times m$ se define como la matriz cuyos elementos (i, j) son las derivadas de las elementos (i, j) de la matriz original, si se considera que todos los elementos $a_{ij}(t)$ tiene derivadas con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

En el caso de un vector de $\mathbf{x}(t)$ de dimensión n,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}$$

De forma similar, la integral de una matriz $\mathbf{A}(t)$ de $n \times m$ con respecto a t se define como la matriz cuyos elementos (i, j) son las integrales de los elementos (i, j) de la matriz original, o

$$\int \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,dt & \cdots & \int a_{1m}(t)\,dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int a_{n1}(t)\,dt & \cdots & \int a_{nm}(t)\,dt \end{bmatrix}$$

al considerar que los elementos $a_{ij}(t)$ son integrables como funciones de t.

Diferenciación de una matriz. Si los elementos de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones de t, entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\mathbf{B} \tag{A-13}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{A-14}$$

Si $k(t)$ es un escalar y es función de t, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}k(t)] = \frac{d\mathbf{A}}{dt}k(t) + \mathbf{A}\frac{dk(t)}{dt} \tag{A-15}$$

También,

$$\int_a^b \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}\,dt = \mathbf{AB}\Big|_a^b - \int_a^b \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\,dt \tag{A-16}$$

Es importante notar que la derivada de $\mathbf{A}^{-1}$ está dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} \tag{A-17}$$

La ecuación (A-17) se puede derivar fácilmente al diferenciar $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ con respecto a t. Ya que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt}$$

y también

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{d}{dt}\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

se obtiene

$$\mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$$

o

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$$

que es el resultado deseado.

Derivadas de una función escalar con respecto a un vector. Si $J(\mathbf{x})$ es una función escalar de un vector $\mathbf{x}$, entonces

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Asimismo, para una función escalar $V(\mathbf{x}(t))$, se tiene

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Jacobiano. Si una matriz $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ de $m \times 1$ es un vector función de un vector-n $\mathbf{x}$ (*nota:* un vector-n es un vector de dimensión n), entonces

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{A-18}$$

Dicha matriz de $n \times m$ se llama *Jacobiano.*

Observe que, al utilizar esta definición de Jacobiano, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \tag{A-19}$$

El hecho de que la ecuación (A-19) se cumple, puede verse fácilmente del siguiente ejemplo: Si **A** y **x** están dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

Así, se tiene la siguiente fórmula útil. Para una matriz real **A** de $n \times n$ y un vector-n real **x**,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax} + \mathbf{A}^T\mathbf{x} \tag{A-20}$$

Además, si **A** es una matriz real simétrica, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 2\mathbf{Ax}$$

Observe que si **A** es una matriz Hermítica de $n \times n$ y **x** es un vector-n complejo entonces

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax} \tag{A-21}$$

[Para obtener las ecuaciones (A-20) y (A-21), véase el problema A-7.]

Para una matriz real de $n \times m$, un vector-n real **x**, y un vector-m real **y**, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^T\mathbf{Ay} = \mathbf{Ay} \tag{A-22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{x}^T\mathbf{Ay} = \mathbf{A}^T\mathbf{x} \tag{A-23}$$

De forma similar, para una matriz compleja **A** de $n \times m$, un vector-n complejo **x** y un vector-m complejo **y**, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}^*\mathbf{Ay} = \mathbf{Ay} \tag{A-24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{x}^*\mathbf{Ay} = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{x}} \tag{A-25}$$

[Para obtener las ecuaciones (A-22) a (A-25), refiérase al problema A-8.] Observe que la ecuación (A-25) es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{y}} = \mathbf{A}^* \mathbf{x}$$

A-5 VECTORES Y ANÁLISIS VECTORIAL

Dependencia lineal e independencia de vectores. Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se dicen ser *linealmente independientes* si la ecuación

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Por el contrario, los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se dicen ser *linealmente dependientes* si y sólo si $\mathbf{x}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{x}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n; j \neq i$).

Es importante observar que si los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes y los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$ son linealmente dependientes, entonces $\mathbf{x}_{n+1}$ se puede expresar como una combinación lineal única de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Condiciones necesarias y suficientes para la independencia lineal de vectores. Se puede probar que las condiciones necesarias y suficientes para que los vectores $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) sean linealmente independientes son que:

1. $m \leq n$.
2. Exista al menos un determinante de columna-m no cero de la matriz de $n \times m$ cuyas columnas consistan de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Por lo tanto, para los n vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ la condición necesaria y suficiente para la independencia lineal es que

$$|\mathbf{A}| \neq 0$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ cuya columna i está hecha de los componentes de $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Producto interno. Cualquier regla que asigna a cada par de vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en un espacio vectorial una cantidad escalar se llama *producto interno* o *producto escalar* y se simboliza por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, si se considera que los cuatro axiomas siguientes se satisfacen:

1. $$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$$
   donde la barra denota el conjugado de un número complejo
2. $$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \bar{c}\mathbf{y} \rangle$$
   donde c es un número complejo
3. $$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle$$
4. $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

En cualquier espacio vectorial finito, existen muchas definiciones del producto interno, todas satisfacen los cuatro axiomas.

En este libro, a menos de que se especifique otra cosa, se adoptará la siguiente definición de producto interno: el producto interno de un par de vectores-n $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en un espacio vectorial V está dado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \tag{A-26}$$

donde la suma es un número complejo y donde las $\bar{x}_i$ son los complejos conjugados de los x_i. Esta definición claramente satisface los cuatro axiomas. El producto interno también se puede expresar como:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$$

donde $\mathbf{x}^*$ denota la transpuesta conjugada de $\mathbf{x}$. Asimismo

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\mathbf{y}^* \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* \mathbf{y} \tag{A-27}$$

El producto interno de dos vectores-n $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ con componentes reales está dado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{A-28}$$

En este caso, es claro que se tiene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}, \qquad \text{para vectores reales de } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y}$$

Se hace notar que el vector $\mathbf{x}$ real o complejo se dice *normalizado* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$. También se señala que, para un vector-n, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*\mathbf{x}$ es un escalar no negativo, pero $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$ es una matriz de $n \times n$. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1\bar{x}_1 & x_1\bar{x}_2 & \cdots & x_1\bar{x}_n \\ x_2\bar{x}_1 & x_2\bar{x}_2 & \cdots & x_2\bar{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n\bar{x}_1 & x_n\bar{x}_2 & \cdots & x_n\bar{x}_n \end{bmatrix}$$

Observe que, para una matriz compleja $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y vectores-n complejos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, el producto interno de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}\mathbf{y}$ y el de $\mathbf{A}^*\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son el mismo, o

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \langle \mathbf{A}^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y}$$

De forma similar, para una matriz real de $n \times n$ y vectores-n reales $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, el producto interno de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}\mathbf{y}$ y el de $\mathbf{A}^T\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son el mismo, o

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \langle \mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Transformaciones unitarias. Si A es una matriz unitaria (es decir, si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$), entonces el producto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ es invariante bajo la transformación lineal $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, porque

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Dicha transformación $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, donde A es una matriz unitaria, que transforma $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i$ en $\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i y_i$, se llama *transformación unitaria.*

Transformaciones unitarias. Si A es una matriz unitaria (es decir, si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$), entonces el producto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ es invariante bajo la transformación lineal $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, porque

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Dicha transformación $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, que transforma a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ en $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$, se llama una *transformación ortogonal.*

Normas de un vector. Una vez definido el producto interno, se puede emplear este producto interno para definir las normas de un vector. El concepto de norma es de alguna forma similar al del valor absoluto. Una norma es una función que asigna a cada vector x en un espacio vectorial dado un número real denotado por $\|\mathbf{x}\|$ tal que

1. $\|\mathbf{x}\| > 0$, para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$, si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{x}\| = |k| \, \|\mathbf{x}\|$,

   donde k es un escalar y $|k|$ es el valor absoluto de k.
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, para toda x y y
5. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad de Schwarz)

Definiciones distintas de normas se encuentran en los libros. Sin embargo, la siguiente definición se utiliza ampliamente. Una norma de un vector se define como la raíz cuadrada no negativa de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = (\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{A-29}$$

Si x es un vector real, la cantidad $\|\mathbf{x}\|^2$ se puede interpretar de manera geométrica como la distancia desde el origen al punto representado por el vector x. Observe que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^{1/2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Las cinco propiedades de las normas listadas antes pueden ser obvias, excepto quizá las dos últimas desigualdades. Estas dos desigualdades se pueden probar como sigue. De las definiciones del producto interno y de la norma, se tiene

$$\begin{aligned} \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \bar{\lambda}\lambda\|\mathbf{x}\|^2 + \lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \bar{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \bar{\lambda}(\lambda\|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \lambda\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si se escoge

$$\lambda = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}, \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

entonces

$$\lambda \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$$

y

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \geq \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2, \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es claro que

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$$

Por lo tanto, se obtiene la desigualdad de Schwarz,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \tag{A-30}$$

Al emplear la desigualdad de Schwarz, se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \tag{A-31}$$

Ésta se puede probar fácilmente, ya que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (A-26) hasta la (A-31) son útiles en la teoría de control moderna.

Como ya se mencionó, existen diferentes definiciones de normas. Tres de estas definiciones son las siguientes.

1. Una norma $\|\mathbf{x}\|$ se puede definir como sigue:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= [(\mathbf{Tx})^*(\mathbf{Tx})]^{1/2} = (\mathbf{x}^*\mathbf{T}^*\mathbf{Tx})^{1/2} = (\mathbf{x}^*\mathbf{Qx})^{1/2} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \bar{x}_i x_j \right]^{1/2} \geq 0
\end{aligned}$$

   La matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^*\mathbf{T}$ es Hermítica, ya que $\mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^*\mathbf{T} = \mathbf{Q}$. La norma $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^*\mathbf{Qx})^{1/2}$ es una forma generalizada de $(\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2}$, la cual se puede escribir como $(\mathbf{x}^*\mathbf{Ix})^{1/2}$.

2. Una norma se puede definir como la suma de las magnitudes de todos los componentes x_i:

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3. Una norma se puede definir como el máximo de las magnitudes de todos los componentes x_i:

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i \{|x_i|\}$$

Se puede mostrar que las diferentes normas que se acaban de definir son equivalentes. Entre otras definiciones de normas, la norma $(\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2}$ es la que más se utiliza en cálculos explícitos.

Normas de una matriz. El concepto de normas de un vector se puede extender a las matrices. Existen varias definiciones diferentes de normas de una matriz, algunas de ellas son las siguientes.

1. Una norma $\|\mathbf{A}\|$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se define por

$$\|\mathbf{A}\| = \min k$$

tal que

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq k\|\mathbf{x}\|$$

Para la norma $(\mathbf{x}^*\mathbf{x})^{1/2}$, esta definición es equivalente a

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \max_{\mathbf{x}} \{\mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{Ax}; \mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1\}$$

que significa que $\|\mathbf{A}\|^2$ es el máximo del "valor absoluto" del vector $\mathbf{Ax}$ cuando $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = 1$.

2. Una norma de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se puede definir por

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

donde $|a_{ij}|$ es el valor absoluto de a_{ij}.

3. Una norma se puede definir como

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

4. Otra definición de una norma está dada por

$$\|\mathbf{A}\| = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Observe que todas las definiciones de normas de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^*\|$ o $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^T\|$
2. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
3. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$
4. $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|$

Ortogonalidad de vectores. Si el producto interno de dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es cero, o $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, entonces los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ se dice que son *ortogonales con respecto al otro*. Por ejemplo, los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son ortogonales en pares y por lo tanto forman un conjunto ortogonal.

En un espacio vectorial de dimensión n, los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se definen por

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

satisfacen las condiciones $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$, o

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 1$$
$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0, \qquad i \neq j$$

donde $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dicho conjunto de vectores se dice *ortonormal*, ya que los vectores son ortogonales a cada uno de los otros y cada vector está normalizado.

Un vector $\mathbf{x}$ no cero se puede normalizar al dividir $\mathbf{x}$ entre $\|\mathbf{x}\|$. El vector normalizado $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es un vector unitario. Los vectores unitarios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman un conjunto ortonormal si son ortogonales por pares.

Considere una matriz unitaria $\mathbf{A}$. Al dividir a $\mathbf{A}$ en vectores columnas $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, se tiene

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1^* \\ \hdashline \mathbf{A}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_n^* \end{array}\right] \left[\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_n\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n^*\mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{A}_i^*\mathbf{A}_i = \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i \rangle = 1$$
$$\mathbf{A}_i^*\mathbf{A}_j = \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle = 0, \qquad i \neq j$$

Por lo tanto, se ve que los vectores columna (o vectores renglón) de una matriz unitaria $\mathbf{A}$ son ortonormales. Los mismo es verdadero para matrices ortogonales, ya que son unitarias.

A-6 VALORES PROPIOS, VECTORES PROPIOS Y TRANSFORMACIONES DE SIMILITUD

En esta sección se revisarán propiedades importantes del rango de una matriz y después se darán definiciones de valores propios y vectores propios. Por último, se discutirán las formas canónicas de Jordan, las transformaciones de similitud y la traza de una matriz de $n \times n$.

Rango de una matriz. Una matriz **A** se dice de rango m si el número máximo de renglones (o columnas) linealmente independientes es m. Por lo tanto, si existe una submatriz **M** de $m \times m$ de **A** tal que $|\mathbf{M}| \neq 0$ y el determinante de cada submatriz de $r \times r$ (donde $r \geq m + 1$) de **A** es cero, entonces el rango de **A** es m. [Observe que, si el determinante de cada submatriz de **A** de $(m + 1) \times (m + 1)$ es cero, entonces cualquier determinante de orden s (donde $s > (m + 1)$) es cero, ya que cualquier determinante de orden $s > (m + 1)$ se puede expresar como una suma lineal de determinantes de orden $m + 1$.]

Propiedades del rango de una matriz. A continuación se enumeran algunas propiedades importantes del rango de una matriz.

1. El rango de una matriz es invariante bajo el intercambio de dos renglones (o columnas), o la suma de un escalar múltiplo de un renglón (o una columna) en otro renglón (o columna), o la multiplicación de cualquier renglón (o columna) por un escalar no cero.
2. Para una matriz **A** de $n \times m$,
$$\text{rango } \mathbf{A} \leq \min(n, m)$$
3. Para una matriz **A** de $n \times n$, una condición necesaria y suficiente para que el rango $\mathbf{A} = n$ es que $|\mathbf{A}| \neq 0$.
4. Para una matriz **A** de $n \times m$,
$$\text{rango } \mathbf{A}^* = \text{rango } \mathbf{A} \qquad \text{o} \qquad \text{rango } \mathbf{A}^T = \text{rango } \mathbf{A}$$
5. El rango de un producto de dos matrices **AB** no puede exceder al rango de **A** o al rango de **B**; es decir,
$$\text{rango } \mathbf{AB} \leq \min(\text{rango } \mathbf{A}, \text{rango } \mathbf{B})$$
Por lo tanto, si **A** es una matriz de $n \times 1$ y **B** es una matriz de $1 \times m$, entonces el rango **AB** = 1 a menos de que **AB** = **0**. Si una matriz tiene rango 1, entonces esta matriz se puede expresar como un producto de un vector columna por un vector renglón.
6. Para una matriz **A** de $n \times n$ (donde $|\mathbf{A}| \neq 0$) y una matriz **B** de $n \times m$,
$$\text{rango } \mathbf{AB} = \text{rango } \mathbf{B}$$
De forma similar, para una matriz **A** de $m \times m$ (donde $|\mathbf{A}| \neq 0$) y una matriz **B** de $n \times m$,
$$\text{rango } \mathbf{BA} = \text{rango } \mathbf{B}$$

Valores propios de una matriz cuadrada. Para una matriz **A** de $n \times n$, el determinante
$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$
se denomina *polinomio característico* de **A**, que es un polinomio de grado n en λ. La ecuación característica está dada por
$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Si el determinante $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ se expande, la ecuación característica se convierte en

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Las n raíces de la ecuación característica se denominan *valores propios* de $\mathbf{A}$. También se llaman *raíces características.*

Se hace notar que una matriz real $\mathbf{A}$ de $n \times n$ no necesariamente tiene valores propios reales. Sin embargo, para una matriz real $\mathbf{A}$ de $n \times n$, la ecuación característica $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ es un polinomio con coeficientes reales, y por lo tanto cualquier valor propio complejo debe ocurrir en pares conjugados; es decir, si $\alpha + j\beta$ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $\alpha - j\beta$ también es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Existe una relación importante entre los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y los de $\mathbf{A}^{-1}$. Si asumimos los valores propios de $\mathbf{A}$ son λ_i y los de $\mathbf{A}^{-1}$ hasta μ_i, entonces

$$\mu_i = \lambda_i^{-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir, si λ_i es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces λ_i^{-1} es un valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$. Para probar esto, observe que la ecuación característica de la matriz $\mathbf{A}$ se puede escribir como

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\lambda\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}||\mathbf{A}| = |\lambda||\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}||\mathbf{A}| = 0$$

o

$$|\lambda^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}| = 0$$

Por suposición, la ecuación característica de la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ es

$$|\mu\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}| = 0$$

Al comparar estas dos ecuaciones, se ve que

$$\mu = \lambda^{-1}$$

Por lo tanto, si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $\mu = \lambda^{-1}$ es un valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$.

Por último, observe que es posible que, para dos matrices cuadradas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}|$$

(Para la prueba, véase el problema A-9.)

Vectores propios de una matriz de n × n. Cualquier vector $\mathbf{x}_i$ no cero tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$$

se dice que es un *vector propio* asociado con un valor propio λ_i de $\mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. Como los componentes de $\mathbf{x}_i$ se determinaron de un conjunto de n ecuaciones algebraicas homogéneas lineales con un factor constante, si $\mathbf{x}_i$ es un vector propio, entonces para cualquier escalar $\alpha \neq 0$, $\alpha\mathbf{x}_i$ es también un vector propio. El vector propio se dice ser un vector propio *normalizado* si su longitud o valor absoluto es la unidad.

Matrices similares. Las matrices **A** y **B** $n \times n$ se dice que son *similares* si existe una matriz **P** no singular tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{B}$$

La matriz **B** se dice que se obtiene a partir de **A** mediante una *transformación de similitud*, en la que **P** es la matriz de transformación. Observe que **A** se puede obtener de **B** mediante una transformación de similitud con la matriz de transformación $\mathbf{P}^{-1}$, ya que

$$\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{P}^{-1})$$

Diagonalización de matrices. Si una matriz **A** de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces existen n vectores propios linealmente independientes. Si la matriz **A** tiene valores propios múltiples con multiplicidad k, entonces existe al menos uno y no más de k vectores propios linealmente independientes asociados con estos valores propios.

Si una matriz de $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes, se puede diagonalizar mediante una transformación de similitud. Sin embargo, una matriz que no tenga un conjunto completo de n vectores propios linealmente independientes no puede ser diagonalizada. Dicha matriz se puede transformar en la forma canónica de Jordan.

Forma canónica de Jordan. Una matriz **J** de $k \times k$ se dice estar en la forma canónica de Jordan si

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{p_1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_{p_s} \end{bmatrix}$$

donde las $\mathbf{J}_{p_i}$ son matrices de $p_i \times p_i$ de la forma

$$\mathbf{J}_{p_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Las matrices $\mathbf{J}_{p_i}$ se llaman bloques de Jordan de orden p_i. Observe que la λ en $\mathbf{J}_{p_i}$ y aquella en $\mathbf{J}_{p_j}$ puede ser o no la misma, y que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_s = k$$

Por ejemplo, en una matriz **J** de 7×7, si $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$, y los valores propios de **J** son $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_6, \lambda_7$, entonces la forma canónica de Jordan puede estar dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_3(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2(\lambda_1) & & \\ & & \mathbf{J}_1(\lambda_6) & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_1(\lambda_7) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc:c:c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hdashline & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_1 & & \\ \hdashline & & & & & \lambda_6 & \\ \hdashline 0 & & & & & & \lambda_7 \end{array}\right]$$

Observe que una matriz diagonal es un caso especial de la forma canónica de Jordan.

La forma canónica de Jordan tiene las propiedades de que los elementos sobre la diagonal principal son los valores propios de **A** y de que los elementos inmediatamente arriba (o abajo) de la diagonal principal son 1 o 0 y todos los demás elementos son cero.

La determinación de la forma exacta del bloque de Jordan puede no ser simple. Para ilustrar algunas estructuras, considere una matriz de 3×3 que tiene un valor propio triple de λ_1. Entonces una de las siguientes formas canónicas de Jordan es posible:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cc:c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right]$$

Cada una de las tres matrices anteriores tiene la misma ecuación característica $(\lambda - \lambda_1)^3 = 0$. La primera corresponde al caso donde existe un solo vector propio linealmente independiente, ya que al denotar a la primera matriz como **A** y al resolver la siguiente ecuación para **x**,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se obtiene un solo vector propio:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a = \text{constante no cero}$$

La segunda y tercer matrices tienen, respectivamente, dos y tres vectores linealmente independientes. (Observe que sólo la matriz diagonal tiene tres vectores linealmente independientes.)

Como se ha visto, si una matriz **A** de $k \times k$ tiene k valores propios múltiples, entonces se puede mostrar lo siguiente:

1. Si el rango de $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es $k - s$ (donde $1 \leq s \leq k$), entonces existen s vectores propios linealmente independientes asociados con λ.
2. Existen s bloques de Jordan asociados con los s vectores propios.
3. La suma de los órdenes p_i de los bloques de Jordan es igual a la multiplicidad k.

Por lo tanto, como se demostró en las matrices de 3×3 anteriores, aun si la multiplicidad de los valores propios es la misma, el número de bloques de Jordan y sus órdenes pueden ser diferentes en función de la estructura de la matriz **A**.

Transformación de similitud cuando una matriz de $n \times n$ tiene valores propios distintos. Si los n valores propios de la matriz **A** son diferentes, existe un vector propio asociado a cada valor propio λ_i. Se puede probar que dichos n vectores propios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes.

Sea una matriz **P** de $n \times n$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \vdots \mathbf{P}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{P}_n] = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n]$$

donde el vector columna $\mathbf{P}_i$ es igual al vector columna $\mathbf{x}_i$, o

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{x}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

La matriz $\mathbf{P}$ definida de esta forma es no singular, y $\mathbf{P}^{-1}$ existe. Observe que los vectores propios $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1\\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2 \mathbf{x}_2\\ &\vdots\\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n &= \lambda_n \mathbf{x}_n\end{aligned}$$

se pueden combinar estas n ecuaciones en una, como sigue

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n] = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

o, en términos de la matriz $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Al premultiplicar esta última ecuación por $\mathbf{P}^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Por lo tanto, la matriz $\mathbf{A}$ se transforma en una matriz diagonal mediante una transformación de similitud.

El proceso que transforma la matriz $\mathbf{A}$ en una matriz diagonal se llama *diagonalización* de la matriz $\mathbf{A}$.

Como se estableció anteriormente, un múltiplo escalar del vector propio $\mathbf{x}_i$ es también un vector propio, ya que $\alpha\mathbf{x}_i$ satisface la siguiente ecuación:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}_i) = \lambda_i(\alpha\mathbf{x}_i)$$

En consecuencia, se puede escoger α para que la matriz $\mathbf{P}$ sea tan simple como sea posible.

Para resumir, si los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son distintos, entonces hay exactamente n vectores propios que son linealmente independientes. Una matriz de transformación $\mathbf{P}$ que transforma a $\mathbf{A}$ en una matriz diagonal se puede construir de los n vectores propios linealmente independientes.

Transformación de similitud cuando una matriz de $n \times n$ tiene valores propios múltiples. Se supone que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ involucra un valor propio λ_1 de multiplicidad k y otros valores propios $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$ que son distintos y diferentes de λ_1. Es decir, los valores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$$

Primero se considerará el caso cuando el rango de $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$ es $n - 1$. Para este caso existe un solo bloque de Jordan para el valor propio múltiple λ_1, y existe un solo vector propio asociado con este valor propio múltiple. El orden del bloque de Jordan es k, que es el mismo que el orden de la multiplicidad del valor propio λ_1.

Observe que, cuando una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ no tiene n vectores propios linealmente independientes, no puede ser diagonalizada, pero se puede reducir a una forma canónica de Jordan.

En el presente caso, sólo existe un vector propio linealmente independiente para λ_1. Ahora se investigará si es posible encontrar $k-1$ vectores que estén asociados de alguna forma con este valor propio y que sean linealmente independientes de los vectores propios. Sin prueba, se mostrará que esto es posible. Primero, observe que el vector propio $\mathbf{x}_1$ es un vector que satisface la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$$

por lo que $\mathbf{x}_1$ se elimina mediante $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$. Como no se tienen suficientes vectores que son eliminados por $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$, se buscan vectores que sean eliminados por $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^2$, $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^3$, y así sucesivamente, hasta obtener $k - 1$ vectores. Los $k - 1$ vectores determinados de esta forma se llaman *vectores propios generalizados.*

Se definen los $k - 1$ vectores propios generalizados como $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$. Entonces estos $k - 1$ vectores propios generalizados se pueden determinar de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0} \\
&\vdots \\
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^k \mathbf{x}_k &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A-32}$$

que se pueden rescribir como

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 \\
&\vdots \\
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k-1}
\end{aligned}$$

Observe que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{k-2} \mathbf{x}_{k-1} = \cdots = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$$

o

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_1 \tag{A-33}$$

El vector propio $\mathbf{x}_1$ y los $k - 1$ vectores propios generalizados $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$ determinados de esta forma constituyen un conjunto de k vectores linealmente independientes.

Una forma adecuada para determinar los vectores propios generalizados es comenzar con $\mathbf{x}_k$. Es decir, se determina el $\mathbf{x}_k$ que satisfará la ecuación (A-32) y al mismo tiempo se obtendrá un vector no cero que $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{x}_k$. Cualquiera de estos vectores no cero se puede considerar un vector propio posible $\mathbf{x}_1$. Por lo tanto, para encontrar el vector propio $\mathbf{x}_1$, se aplica un proceso de reducción

por renglón a $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^k$ y se encuentran k vectores linealmente independientes que satisfacen la ecuación (A-32). Entonces estos vectores se prueban para encontrar uno que dé un vector no cero en el lado derecho de la ecuación (A-33). (Observe que se comienza con $\mathbf{x}_1$ entonces se deben hacer selecciones arbitrarias en cada paso para determinar $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$. Esto consume tiempo y no es conveniente. Por esta razón, este enfoque no se recomienda.)

Para resumir lo que se ha discutido, el vector propio $\mathbf{x}_1$ y los vectores propios generalizados $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{x}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k-1} + \lambda_1 \mathbf{x}_k
\end{aligned}$$

Los vectores propios $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \ldots, \mathbf{x}_n$ asociados con los valores propios distintos $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, se pueden determinar de

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} &= \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+2} &= \lambda_{k+2} \mathbf{x}_{k+2} \\
&\vdots \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_n &= \lambda_n \mathbf{x}_n
\end{aligned}$$

Ahora se define

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \vdots \mathbf{S}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{S}_n] = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n]$$

donde los n vectores columnas de S son linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz S es no singular. Entonces, al combinar las ecuaciones de los vectores propios anteriores y las ecuaciones de los vectores propios generalizados en una sola ecuación, se obtiene

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_k \vdots \mathbf{x}_{k+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n]$$

$$= [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_k \vdots \mathbf{x}_{k+1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n] \left[\begin{array}{cccc:ccc}
\lambda_1 & 1 & & 0 & & & 0 \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & & \\
0 & & & \lambda_1 & 0 & & \\
\hdashline
 & & & 0 & \lambda_{k+1} & & 0 \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & & & & 0 & & \lambda_n
\end{array}\right]$$

De donde

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S} \left[\begin{array}{c:ccc}
\mathbf{J}_k(\lambda_1) & & & 0 \\
\hdashline
 & \lambda_{k+1} & & \\
 & & \ddots & \\
0 & & & \lambda_n
\end{array}\right]$$

Al premultiplicar esta última ecuación por $\mathbf{S}^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_k(\lambda_1) & & 0 \\ & \lambda_{k+1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En la discusión anterior se consideró el caso en el que el rango de $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$ era $n - 1$. A continuación se considera el caso en el que el rango de $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$ es $n - s$ (donde $2 \leq s \leq n$). Ya que la matriz $\mathbf{A}$ involucra k valores propios múltiples λ_1 y otros valores propios $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$ que son distintos y diferentes de λ_1, se tienen s vectores linealmente independientes asociados con el valor propio λ_1. Por lo tanto existen s bloques de Jordan que corresponden al valor propio λ_1.

Por conveniencia en la notación, se define los s vectores propios linealmente independientes asociado con el valor propio λ_1 como $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21}, \ldots, \mathbf{v}_{s1}$. Se define a los vectores generalizados asociados con $\mathbf{v}_{i1}$ como $\mathbf{v}_{i2}, \mathbf{v}_{i3}, \ldots, \mathbf{v}_{ip_i}$ donde $i = 1, 2, \ldots, s$. Entonces existen en total k vectores (vectores propios y vectores propios generalizados), que son

$$\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{1p_1}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \ldots, \mathbf{v}_{2p_2}, \ldots, \mathbf{v}_{s1}, \mathbf{v}_{s2}, \ldots, \mathbf{v}_{sp_s}$$

Los vectores propios generalizados se determinaron a partir de

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{11} &= \mathbf{0}, & \cdots \quad (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{s1} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{12} &= \mathbf{v}_{11}, & \cdots \quad (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{s2} &= \mathbf{v}_{s1} \\ &\vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{1p_1} &= \mathbf{v}_{1p_1-1}, & \cdots \quad (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{sp_s} &= \mathbf{v}_{sp_s-1} \end{aligned}$$

donde los s vectores propios $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21}, \ldots, \mathbf{v}_{s1}$ son linealmente independientes y

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_s = k$$

Observe que $p_1, p_2, \ldots, p_s$ representan el orden de cada uno de los s bloques de Jordan. (Para determinar los vectores propios generalizados, se sigue el método discutido antes. Para ejemplificar los detalles, véase el problema A-11.)

Se define una matriz de $n \times k$ que consiste de $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{sp_s}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\lambda_1) &= [\mathbf{v}_{11} \vdots \mathbf{v}_{12} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_{1p_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_{s1} \vdots \mathbf{v}_{s2} \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_{sp_s}] \\ &= [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_{p_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_k] \\ &= [\mathbf{S}_1 \vdots \mathbf{S}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{S}_k] \end{aligned}$$

y se define

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{S}(\lambda_1) \vdots \mathbf{S}_{k+1} \vdots \mathbf{S}_{k+2} \vdots \cdots \vdots \mathbf{S}_n] \\ &= [\mathbf{S}_1 \vdots \mathbf{S}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{S}_n] \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}, \qquad \mathbf{S}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+2}, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{S}_n = \mathbf{x}_n$$

Observe que $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \ldots, \mathbf{x}_n$ son los vectores propios asociados con los valores propios $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. La matriz S definida de esta forma es no singular. Ahora se obtiene

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S}\left[\begin{array}{ccc:ccc} \mathbf{J}_{p_1}(\lambda_1) & & 0 & & & 0 \\ & \mathbf{J}_{p_2}(\lambda_1) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \mathbf{J}_{p_s}(\lambda_1) & 0 & \\ \hdashline & & & 0 & \lambda_{k+1} & 0 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 & \lambda_n \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{J}_{p_i}(\lambda_1)$ está en la forma

$$\mathbf{J}_{p_i}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

que es una matriz de $p_i \times p_i$. De donde,

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \mathbf{J}_{p_1}(\lambda_1) & & 0 & & & 0 \\ & \mathbf{J}_{p_2}(\lambda_1) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \mathbf{J}_{p_s}(\lambda_1) & 0 & \\ \hdashline & & & 0 & \lambda_{k+1} & 0 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 & \lambda_n \end{array}\right]$$

Por lo tanto, se ha mostrado que, al utilizar un conjunto de n vectores linealmente independientes (vectores propios y vectores propios generalizados), cualquier matriz de $n \times n$ se puede reducir a una forma canónica de Jordan mediante una transformación de similitud.

Transformación de similitud cuando una matriz de n × n es normal. Primero, se recuerda que una matriz es normal si es real simétrica, Hermítica, real anti-simétrica, anti-Hermítica, ortogonal, o una matriz unitaria.

Suponga que una matriz normal de $n \times n$ tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad k y que sus otros $n - k$ valores propios son distintos y diferentes de λ_1. Entonces el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - k$. (Refiérase al problema A-12 para la prueba.) Si el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - k$, hay k vectores propios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ linealmente independientes que satisfacen la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Por lo tanto, existen k bloques de Jordan para el valor propio λ_1. Ya que el número de bloques de Jordan es el mismo que la multiplicidad del valor propio λ_1, todos los bloques de Jordan son de primer orden. Como los $n - k$ valores propios restantes son distintos, los vectores propios asociados con estos valores propios son linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz normal de $n \times n$ tiene en total n vectores propios linealmente independientes, y la forma canónica de Jordan de la matriz normal es una matriz diagonal.

Se puede probar que si **A** es una matriz normal de $n \times n$, entonces, sin importar que los valores propios incluyan valores propios múltiples, existe una matriz unitaria **U** de $n \times n$ tal que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{AU} = \mathbf{D} = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

donde **D** es una matriz diagonal con sus valores propios en la diagonal principal.

Traza de una matriz de n × n. La traza de una matriz **A** de $n \times n$ se define como sigue:

$$\text{traza de } \mathbf{A} = \text{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La traza de una matriz **A** de $n \times n$ tiene las siguientes propiedades:

1. $$\text{tr}\,\mathbf{A}^T = \text{tr}\,\mathbf{A}$$

2. Para las matrices **A** y **B** de $n \times n$,
$$\text{tr}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}\,\mathbf{A} + \text{tr}\,\mathbf{B}$$

3. Si los valores propios de **A** se denotan como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces
$$\text{tr}\,\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \qquad \text{(A-34)}$$

4. Para una matriz **A** de $n \times m$ y una matriz **B** de $m \times n$, sin importar que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ o $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, se tiene
$$\text{tr}\,\mathbf{AB} = \text{tr}\,\mathbf{BA} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$$
Si $m = 1$, entonces al escribir **A** y **B** como **a** y **b**, respectivamente, se tiene
$$\text{tr}\,\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$
De donde, para una matriz **C** de $n \times m$, se tiene
$$\mathbf{a}^T\mathbf{Ca} = \text{tr}\,\mathbf{aa}^T\mathbf{C}$$

Observe que la ecuación (A-34) se puede probar como sigue. Al emplear una transformación de similitud, se tiene

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \text{matriz diagonal}$$

o

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{J} = \text{forma canónica de Jordan}$$

Es decir

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$$

De donde, al emplear la propiedad 4, se tiene

$$\text{tr}\,\mathbf{A} = \text{tr}\,\mathbf{PDP}^{-1} = \text{tr}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PD} = \text{tr}\,\mathbf{D} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

De forma similar,

$$\text{tr}\,\mathbf{A} = \text{tr}\,\mathbf{SJS}^{-1} = \text{tr}\,\mathbf{S}^{-1}\mathbf{SJ} = \text{tr}\,\mathbf{J} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Propiedades invariantes bajo transformaciones de similitud. Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se puede reducir a una matriz similar que tenga una forma simple, entonces se pueden observar las propiedades importantes de $\mathbf{A}$. Una propiedad de una matriz se dice invariante si ésta es poseída por matrices similares. Por ejemplo, el determinante y el polinomio característico son invariantes bajo transformaciones de similitud, como se muestra a continuación. Suponga que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{B}$. Entonces

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}| &= |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| = |\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{A}||\mathbf{P}| = |\mathbf{A}||\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{P}| = |\mathbf{A}||\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{I}| = |\mathbf{A}|\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| = |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I})\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}| \\ &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{P}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\end{aligned}$$

Observe que la traza de una matriz es también invariante bajo transformaciones de similitud, como se mostró anteriormente:

$$\text{tr}\,\mathbf{A} = \text{tr}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$$

Sin embargo, la propiedad de simetría de una matriz no es invariante.

Observe que sólo las propiedades invariantes de matrices presentan características intrínsecas de la clase de matrices similares. Para determinar las propiedades invariantes de una matriz $\mathbf{A}$, se examina la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$, ya que la similitud de dos matrices se puede definir en términos de la forma canónica de Jordan como: la condición necesaria y suficiente para que dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$ sean similares es que la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ y la de $\mathbf{B}$ sean idénticas.

A-7 FORMAS CUADRÁTICAS

Formas cuadráticas. Para una matriz $\mathbf{A}$ real simétrica de $n \times n$ y un vector-n $\mathbf{x}$ real, la forma

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \qquad a_{ji} = a_{ij}$$

se denomina una *forma cuadrática real* en x_i. Con frecuencia, una forma cuadrática real se llama simplemente *forma cuadrática.* Observe que $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ es una cantidad escalar real.

Cualquier forma cuadrática real se puede escribir siempre como $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$. Por ejemplo,

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Vale la pena mencionar que, para una matriz $\mathbf{A}$ real de $n \times n$, se define

$$\mathbf{B} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

Observe que

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C}^T = -\mathbf{C}$$

De donde, una matriz real **A** de $n \times n$ se puede expresar como una suma de una matriz real simétrica y una matriz real anti-simétrica. Ya que $\mathbf{x}^T\mathbf{Cx}$ es una cantidad escalar real, se tiene

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Cx} = (\mathbf{x}^T\mathbf{Cx})^T = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Cx}$$

En consecuencia, se tiene

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Cx} = 0$$

Esto significa que una forma cuadrática para una matriz real anti-simétrica es cero. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Bx}$$

y se ve que la forma cuadrática real $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ involucra sólo la componente simétrica $\mathbf{x}^T\mathbf{Bx}$. Ésta es la razón por la que la forma cuadrática real se define únicamente por una matriz simétrica real.

Para una matriz Hermítica **A** y un vector-n **x** complejo, la forma

$$\mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j, \qquad a_{ji} = \bar{a}_{ij}$$

se denomina una *forma cuadrática compleja,* o forma Hermítica. Observe que la cantidad escalar $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$ es real, porque

$$\overline{\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}} = \mathbf{x}^T\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}})^T = \overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$$

Formas bilineales. Para una matriz **A** real de $n \times n$, un vector-n **x** real, y un vector-m **y** real, la forma

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ay} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j$$

se denomina una *forma bilineal real* en x_i y y_j. $\mathbf{x}^T\mathbf{Ay}$ es una cantidad escalar real.

Para una matriz **A** compleja de $n \times m$, un vector-n **x** complejo, y un vector-m **y** complejo, la forma

$$\mathbf{x}^*\mathbf{Ay} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j$$

se denomina una *forma bilineal compleja.* $\mathbf{x}^*\mathbf{Ay}$ es una cantidad escalar real.

Definición y semidefinición. Una forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ donde **A** es una matriz simétrica real (o forma Hermítica $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$, donde **A** es una matriz Hermítica), se dice ser definida positiva si

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0 \qquad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} > 0), \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0 \qquad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0), \qquad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} > 0), \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0), \quad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) se dice ser semidefinida positiva si

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \geq 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} \geq 0), \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0), \quad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) se dice ser definida negativa si

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} < 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} < 0), \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0), \quad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) se dice ser semidefinida negativa si

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \leq 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} \leq 0), \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0 \quad (\text{o } \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0), \quad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) puede ser de cualquier signo, entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) se dice ser indefinida.

Observe que si $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) es definida positiva (o negativa) se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz definida positiva (o negativa). De forma similar, $\mathbf{A}$ se llama una matriz semidefinida positiva (o negativa) si $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$ es semidefinida positiva (o negativa); la matriz se llama indefinida si $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ o $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$ es indefinida.

Observe que los valores propios de una matriz real simétrica o matriz Hermítica de $n \times n$ son reales. (Para la prueba, véase el problema A-13.) Se puede mostrar que una matriz $\mathbf{A}$ real simétrica o matriz Hermítica de $n \times n$ es una matriz definida positiva si todos los valores propios λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) son positivos. La matriz $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva si todos los valores propios son no negativos, o $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), y al menos uno de ellos es cero.

Observe que si $\mathbf{A}$ es una matriz definida positiva entonces $|\mathbf{A}| \neq 0$, ya que todos los valores propios son positivos. Por lo tanto, la matriz inversa siempre existe para matrices definidas positivas.

En el proceso de determinar la estabilidad de un estado de equilibrio, por lo regular se encuentra una función escalar $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. Una función escalar $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, que es función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se dice definida positiva si

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{0}) = 0$$

$\mathbf{V}(\mathbf{x})$ se dice semidefinida positiva si

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{0}) = 0$$

Si $-\mathbf{V}(\mathbf{x})$ es definida positiva (o semidefinida positiva), entonces $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ se dice definida negativa (o semidefinida negativa).

Las condiciones necesarias y suficientes para que la forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o la forma Hermítica $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$) sea definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, o semidefinida negativa han sido dadas por J. J. Sylvester. El criterio de Sylvester es el siguiente

positiva es que el determinante de **A** sea positivo y los menores principales sucesivos del determinante de **A** (los determinantes de las matrices de $k \times k$ en la esquina superior izquierda de la matriz **A**, donde $k = 1, 2, \ldots, n-1$) sean positivos, es decir, se debe tener

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad |\mathbf{A}| > 0$$

donde

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ simétrica real}$$

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ Hermítica}$$

Criterio de Sylvester para la definición negativa de una forma cuadrática o forma Hermítica. Una condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o forma Hermítica $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$), donde **A** es una matriz real simétrica (o matriz Hermítica) de $n \times n$, sea definida negativa es que el determinante de **A** sea positivo si n es par y negativo si n es impar, y los menores principales sucesivos de orden par sean positivos y los menores principales sucesivos de orden impar sean negativos; es decir, se debe tener

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots$$

$$|\mathbf{A}| > 0 \quad (n \text{ par})$$

$$|\mathbf{A}| < 0 \quad (n \text{ impar})$$

donde

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ real simétrica}$$

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ Hermítica}$$

[Esta condición se puede obtener al hacer que $\mathbf{x}^T(-\mathbf{A})\mathbf{x}$ sea definida positiva.]

Criterio de Sylvester para la semidefinición positiva de una forma cuadrática o forma Hermítica. Una condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o forma Hermítica $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$), donde **A** es una matriz real simétrica (o matriz Hermítica) de $n \times n$, sea semidefinida positiva es que **A** sea singular ($|\mathbf{A}| = 0$) y los menores principales sean no negativos:

$$a_{ii} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \ldots, \quad |\mathbf{A}| = 0$$

donde $i < j < k$ y

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ real simétrica}$$

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ Hermítica}$$

(Es importante apuntar que en las pruebas de semidefinición positiva o semidefinición negativa se deben revisar los signos de los menores principales, no sólo los de los menores principales sucesivos. Véase el problema A-15.)

Criterio de Sylvester para la semidefinición negativa de una forma cuadrática o forma Hermítica. Una condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ (o forma Hermítica $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax}$), donde $\mathbf{A}$ es una matriz real simétrica (o matriz Hermítica) de $n \times n$, sea semidefinida negativa es que $\mathbf{A}$ sea singular ($|\mathbf{A}| = 0$) y los menores principales de orden par sean no negativos y aquellos de orden impar sean no positivos:

$$a_{ii} \leq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \leq 0, \qquad \ldots, \qquad |\mathbf{A}| = 0$$

donde $i < j < k$ y

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ real simétrica}$$

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji}, \qquad \text{para una matriz } \mathbf{A} \text{ Hermítica}$$

A-8 PSEUDOINVERSAS

El concepto de pseudoinversas de una matriz es una generalización de la noción de una inversa. Es útil para encontrar una "solución" a un conjunto de ecuaciones algebraicas en el cual el número de variables desconocidas y el número de ecuaciones lineales independientes no es igual.

A continuación, se considerarán las pseudoinversas que permiten determinar soluciones de norma mínima.

Soluciones de norma mínima que minimizan a $\|\mathbf{x}\|$. Considere una ecuación algebraica lineal

$$x_1 + 5x_2 = 1$$

Ya que tiene dos variables independientes y una sola ecuación, no existe una solución única. En lugar de esto, existe un número infinito de soluciones. En forma gráfica, cualquier punto en la línea $x_1 + 5x_2 = 1$, como se muestra en la figura A-1, es una posible solución. Sin embargo, si se decide escoger el punto que está más cerca del origen, la solución se convierte en única.

Considere la ecuación matriz-vector

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{A-35}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times m$, $\mathbf{x}$ es un vector-m, y $\mathbf{b}$ es un vector-n. Se supone que $m > n$ (es decir, el número de variables desconocidas es mayor que el número de ecuaciones) y que la ecuación tiene un número infinito de soluciones. Se va a encontrar la solución única $\mathbf{x}$ que está localizada más cerca del origen o que tiene la norma $\|\mathbf{x}\|$ mínima.

Se define la solución de norma mínima como $\mathbf{x}^\circ$. Es decir, $\mathbf{x}^\circ$ satisface la condición de que $\mathbf{Ax}^\circ = \mathbf{b}$ y $\|\mathbf{x}^\circ\| \leq \|\mathbf{x}\|$ para toda $\mathbf{x}$ que satisface $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Esto significa que el punto de solución $\mathbf{x}^\circ$ está más

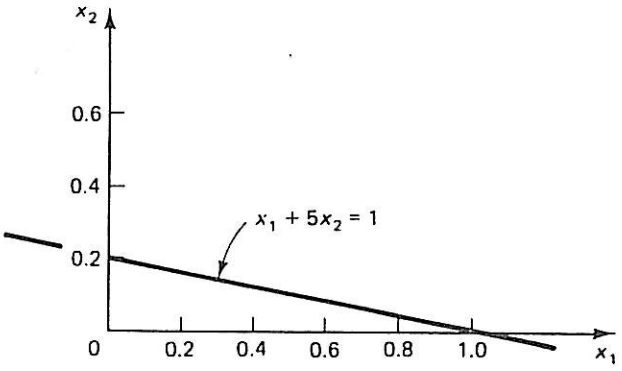


Figura A-1 Línea $x_1 + 5x_2 = 1$ en el plano x_1x_2.

cerca del origen del espacio de dimensión m entre todas las soluciones posibles de la ecuación (A-35). A continuación se determinará dicha solución de norma mínima.

Matriz pseudoinversa derecha. Para una ecuación vector-matriz

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times m$ que tiene rango n, $\mathbf{x}$ es un vector-m, y $\mathbf{b}$ es un vector-n; la solución que minimiza la norma $\|\mathbf{x}\|$ está dada por

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$.

Esto se puede probar como sigue. Primero, se nota que la norma $\|\mathbf{x}\|$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ + \mathbf{x}^\circ\| = \|\mathbf{x}^\circ\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ\| + 2(\mathbf{x}^\circ)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)$$

El último término, $2(\mathbf{x}^\circ)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)$, se puede hacer cero, ya que

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}^\circ)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ) &= [\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}]^T[\mathbf{x} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}] \\ &= \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{x} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}] \\ &= \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}] \\ &= \mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{b}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^\circ\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ\|$$

que se puede rescribir como

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}^\circ\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ\|$$

Como $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ\| \geq 0$, se obtiene

$$\|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}^\circ\|$$

Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{x}^\circ$ es la solución que da la norma mínima $\|\mathbf{x}\|$.

La matriz $\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ que produce la solución de norma mínima ($\|\mathbf{x}^\circ\|$ = mínimo) se llama la *pseudoinversa derecha* o *inversa derecha mínima* de **A**.

Resumen sobre la matriz pseudoinversa derecha. La pseudoinversa derecha $\mathbf{A}^{RM}$ da la solución $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{A}^{RM}\mathbf{b}$ que minimiza la norma, o hace que $\|\mathbf{x}^\circ\|$ = mínimo. Observe que la pseudoinversa derecha $\mathbf{A}^{RM}$ es una matriz de $m \times n$, ya que **A** es una matriz de $n \times m$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{RM} &= \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \\ &= (\text{matriz de } m \times n)\,(\text{matriz de } n \times n)^{-1} \\ &= \text{matriz de } m \times n, \qquad m > n\end{aligned}$$

Observe que la dimensión de $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ es más pequeña que la dimensión del vector **x**, la cual es m. También observe que la pseudoinversa derecha $\mathbf{A}^{RM}$ posee la propiedad de que es realmente una "matriz inversa" si se premultiplica por **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{RM} = \mathbf{A}[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}] = \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}_n$$

Solución que minimiza a $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Considere la ecuación vector-matriz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{A-36}$$

donde **A** es una matriz de $n \times m$, **x** es un vector-m, y **b** es un vector-n. Se supone que $n > m$. Es decir, el número de variables desconocidas es más pequeño que el número de ecuaciones. En el sentido clásico, puede existir o no alguna solución.

Si no existe solución, se puede desear encontrar una solución única que minimice la norma $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Se define una "solución" para la ecuación (A-36) que minimiza a $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ como $\mathbf{x}^\circ$. En otras palabras, $\mathbf{x}^\circ$ satisface la condición

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\|, \qquad \text{para toda } \mathbf{x}$$

Observe que $\mathbf{x}^\circ$ no es una solución en el sentido clásico, ya que no satisface la ecuación vector-matriz original $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sin embargo, se puede llamar a $\mathbf{x}^\circ$ una "solución aproximada", ya que minimiza la norma $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. A continuación se obtendrá una solución aproximada.

Matriz pseudoinversa izquierda. Para una ecuación vector-matriz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde **A** es una matriz de $n \times m$ que tiene rango m, **x** es un vector-m, y **b** es un vector-n, el vector $\mathbf{x}^\circ$ que minimiza la norma $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ está dado por

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{A}^{LM}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}^{LM} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

Para verificar esto, primero observe que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ) + \mathbf{A}\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\| \\ &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)\| + \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\| + 2[\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)]^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b})\end{aligned}$$

El último término se puede mostrar que es cero como sigue:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)]^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ-\mathbf{b}) &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)^T\mathbf{A}^T[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T-\mathbf{I}_n]\mathbf{b}\\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)^T[(\mathbf{A}^T\mathbf{A})(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T-\mathbf{A}^T]\mathbf{b}\\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)^T(\mathbf{A}^T-\mathbf{A}^T)\mathbf{b}\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)\| + \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ-\mathbf{b}\|$$

Observe que $\|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)\|1 \geq 0$, se obtiene

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\| - \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ-\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)\| \geq 0$$

o

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{A}\mathbf{x}^\circ-\mathbf{b}\|$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{A}^{LM}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

minimiza a $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$.

La matriz $\mathbf{A}^{LM} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ se llama *pseudoinversa izquierda* o *inversa izquierda mínima* de la matriz **A**. Observe que $\mathbf{A}^{LM}$ es en realidad la matriz inversa de **A**, en que si se postmultiplica por **A** se obtendrá la matriz identidad $\mathbf{I}_m$.

$$\mathbf{A}^{LM}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathbf{I}_m$$

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema A-1

Muestre que si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, y $m \times m$, respectivamente, y si $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D}| \neq 0$, entonces

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{D}| \neq 0, \qquad \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \text{ y } |\mathbf{D}| \neq 0$$

Solución Como la matriz **A** es no singular, se tiene

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

De donde,

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{D}|$$

De forma similar, como **D** es no singular, se tiene

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{D}|$$

Problema A-2

Muestre que si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, y $m \times m$, respectivamente, entonces

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{cases} |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|, & \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \\ |\mathbf{D}||\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}|, & \text{si } |\mathbf{D}| \neq 0 \end{cases}$$

Solución Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

se puede escribir como un producto de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{I}_m||\mathbf{I}_n||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \end{aligned}$$

De forma similar, si $|\mathbf{D}| \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{I}_n||\mathbf{D}||\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{I}_m| \\ &= |\mathbf{D}||\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}| \end{aligned}$$

Problema A-3

Para una matriz **A** de $n \times m$ y una matriz **B** de $m \times n$, muestre que

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{B}\mathbf{A}|$$

Solución Considere la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

Con referencia al problema A-2,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{cases} |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|, & \text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \\ |\mathbf{D}||\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}|, & \text{si } |\mathbf{D}| \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_m \end{vmatrix} = \begin{cases} |\mathbf{I}_n||\mathbf{I}_m + \mathbf{BA}| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{BA}| \\ |\mathbf{I}_m||\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| \end{cases}$$

y se tiene

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{BA}|$$

Problema A-4

Si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, y $m \times m$, respectivamente, entonces se tiene el siguiente lema de inversión de matrices:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$$

donde se supone que las inversas indicadas existen. Pruebe este lema de inversión.

Solución Se premultiplican ambos lados de la ecuación por $(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})$:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{BDC})[\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}]$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I} + \mathbf{BDCA}^{-1} - \mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} - \mathbf{BDCA}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BDCA}^{-1} - (\mathbf{B} + \mathbf{BDCA}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BDCA}^{-1} - \mathbf{BD}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BDCA}^{-1} - \mathbf{BDCA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha probado el lema de inversión de matrices.

Problema A-5

Pruebe que si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, y $m \times m$, respectivamente, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-37}$$

al considerar que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D}| \neq 0$.

Pruebe también que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \tag{A-38}$$

considerando que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D}| \neq 0$.

Solución Observe que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación (A-37) está probada. De forma similar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se ha probado la ecuación (A-38).

Problema A-6

Pruebe que si las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, y $m \times m$, respectivamente, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

al considerar que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \neq 0$.

También pruebe que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

considerando que $|\mathbf{D}| \neq 0$ y $|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}| \neq 0$.

Solución Primero, observe que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{A-39}$$

Al tomar la inversa de ambos lados de la ecuación (A-39), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}^{-1}$$

En referencia al problema A-5, se encuentra

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si se considera que $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \neq 0$.

De forma similar, observe que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \tag{A-40}$$

Al tomar la inversa en ambos lados de la ecuación (A-40) y en referencia al problema A-5, se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

considerando que $|\mathbf{D}| \neq 0$ y $|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}| \neq 0$.

Problema A-7

Para una matriz **A** real simétrica de $n \times n$ y dos vector-n **x** y **y**, muestre que

a) $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

b) $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

Para una matriz **A** Hermítica de $n \times n$ y un vector-n complejo **x**, muestre que

c) $$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Solución

a) Observe que

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n$$

que es una cantidad escalar. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{y}^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{y}^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

b) Observe que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

que es una cantidad escalar. Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_i \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

que es la ecuación (A-20).

Si la matriz **A** es una matriz real simétrica, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

c) Para una matriz Hermítica **A** , se tiene

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

que es la ecuación (A-21).

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\bar{x}_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{in}\bar{x}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{x}}$$

Por lo tanto,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Problema A-8

Para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times m$, un vector-n complejo $\mathbf{x}$, y un vector-m complejo $\mathbf{y}$, muestre que

a) $$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

b) $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{x}}$$

Solución

a) Observe que

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{nj} y_j \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

que es la ecuación (A-24).

b) Observe que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial y_m}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i y_j\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\bar{x}_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{im}\bar{x}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{x}}$$

que es la ecuación (A-25).

De forma similar, para una matriz real $\mathbf{A}$ de $n \times m$, un vector-n real $\mathbf{x}$, y un vector-m real $\mathbf{y}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$$

que son las ecuaciones (A-22) y (A-23), respectivamente.

Problema A-9

Dadas las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$, pruebe que los valores propios de $\mathbf{AB}$ y los de $\mathbf{BA}$ son los mismos, aun si $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Solución Primero, se considerará el caso donde **A** (o **B**) es no singular. En este caso,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB})\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}||\mathbf{A}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}|$$

A continuación se considerará el caso donde **A** y **B** son singulares. Existen dos matrices **P** y **Q** no singulares de $n \times n$ tales que

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_r$ es la matriz identidad de $r \times r$ y r es el rango de **A**, $r < n$. Se tiene

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}| &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BAQ}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{PAQ}| \\ &= \left|\lambda\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right| \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}| &= \left|\lambda\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I}_r - \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_{21} & \lambda\mathbf{I}_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= |\lambda\mathbf{I}_r - \mathbf{G}_{11}||\lambda\mathbf{I}_{n-r}| \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}| &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PABP}^{-1}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAQQ}^{-1}\mathbf{BP}^{-1}| \\ &= \left|\lambda\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\lambda\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I}_r - \mathbf{G}_{11} & -\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I}_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= |\lambda\mathbf{I}_r - \mathbf{G}_{11}||\lambda\mathbf{I}_{n-r}| \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha probado que

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{BA}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{AB}|$$

o que los valores propios de **AB** y **BA** son los mismos sin importar que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ o $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Problema A-10

Muestre que la matriz **A** de 2×2 siguiente tiene dos valores propios distintos y que los vectores propios son linealmente independientes uno del otro:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces normalice los vectores propios.

Solución Los valores propios se obtienen de

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

como

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 2$$

Por lo tanto, la matriz **A** tiene dos valores propios distintos.

Existen dos vectores propios $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ asociados con λ_1 y λ_2, respectivamente. Si se define

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

entonces el vector propio $\mathbf{x}_1$ se puede encontrar de

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

o

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$$

Al observar que $\lambda_1 = 1$, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -1 \\ 0 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que da

$$x_{11} = \text{constante arbitraria} \quad \text{y} \quad x_{21} = 0$$

Por lo tanto, el vector propio $\mathbf{x}_1$ se puede escribir como

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $c_1 \neq 0$ es una constante arbitraria.

De forma similar, para el vector propio $\mathbf{x}_2$, se tiene

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

o

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

Al notar que $\lambda_2 = 2$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene

$$x_{12} - x_{22} = 0$$

Por lo tanto, el vector asociado con $\lambda_2 = 2$ se puede seleccionar como

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

donde $c_2 \neq 0$ es una constante arbitraria.

Por lo tanto, los dos vectores están dados por

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

El hecho de que los vectores propios $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son linealmente independientes se puede ver del hecho de que el determinante de la matriz $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]$ no es cero:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para normalizar los vectores propios, se escoge $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/\sqrt{2}$, o

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Claramente, el valor absoluto de cada uno de los vectores propios se convierte en la unidad y por lo tanto, los vectores propios están normalizados.

Problema A-11

Obtenga una matriz de transformación **T** que transforme la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

en la forma canónica de Jordan.

Solución La ecuación característica es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left|\begin{array}{cc:cc} \lambda & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)^3\lambda = 0$$

Por lo tanto, la matriz **A** involucra los valores propios

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = -1, \qquad \lambda_4 = 0$$

Para los valores propios múltiples en -1, se tiene

$$\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que es de rango 2, o rango $(4 - 2)$. De la condición de rango se ve que debe haber dos bloques de Jordan para el valor propio en -1, es decir un bloque de Jordan de $p_1 \times p_1$ y otro de $p_2 \times p_2$, donde $p_1 + p_2 = 3$. Observe que para $p_1 + p_2 = 3$ hay una sola combinación (2 y 1) para las órdenes p_1 y p_2. Se escoge

$$p_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad p_2 = 1$$

Entonces hay un vector propio y uno generalizado para el bloque de Jordan $\mathbf{J}_{p1}$ y un vector propio para el bloque de Jordan $\mathbf{J}_{p2}$.

Se define el vector propio y el vector propio generalizado para el bloque de Jordan $\mathbf{J}_{p1}$ como $\mathbf{v}_{11}$ y $\mathbf{v}_{12}$, respectivamente, y el vector propio para el bloque de Jordan $\mathbf{J}_{p2}$ como $\mathbf{v}_{21}$. Entonces deben existir los vectores $\mathbf{v}_{11}$, $\mathbf{v}_{12}$ y $\mathbf{v}_{21}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{11} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{11}$$

Para $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ puede estar dada como sigue:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Al observar que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se determina el vector $\mathbf{v}_{12}$ que satisfará la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_{12} = \mathbf{0}$$

y al mismo tiempo hará que $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_{12}$ no sea cero. Un ejemplo de dicho vector generalizado $\mathbf{v}_{12}$ puede ser

$$\mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \qquad a = \text{constante arbitraria no cero}$$

El vector propio $\mathbf{v}_{11}$ se encuentra como un vector no cero $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_{12}$:

$$\mathbf{v}_{11} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ a \\ -a \end{bmatrix}$$

Ya que a es una constante arbitraria no cero, se escoge como $a = 1$. Entonces se tiene

$$\mathbf{v}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se determina $\mathbf{v}_{21}$ para que $\mathbf{v}_{21}$ y $\mathbf{v}_{11}$ sean linealmente independientes. Para $\mathbf{v}_{21}$ se escoge

$$\mathbf{v}_{21} = \begin{bmatrix} b + 3c \\ -b \\ c \\ -c \end{bmatrix}$$

donde b y c son constantes arbitrarias. Se escoge, por ejemplo, $b = 1$ y $c = 0$. Entonces

$$\mathbf{v}_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es claro que, $\mathbf{v}_{11}$, $\mathbf{v}_{12}$, y $\mathbf{v}_{21}$ son linealmente independientes. Se definen

$$\mathbf{v}_{11} = \mathbf{x}_1, \qquad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{x}_3$$

y

$$\mathbf{T}(\lambda_1) = [\mathbf{v}_{11} \vdots \mathbf{v}_{12} \vdots \mathbf{v}_{21}] = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio distinto $\lambda_4 = 0$, el vector propio $\mathbf{x}_4$ se puede determinar de

$$(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$$

Al observar que

$$\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

se encuentra

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $d \neq 0$ es una constante arbitraria. Al seleccionar a $d = 1$, se tiene

$$\mathbf{T}(\lambda_4) = \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación $\mathbf{T}$ se puede escribir como

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}(\lambda_1) \vdots \mathbf{T}(\lambda_4)] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \text{diag}\,[\mathbf{J}_2(-1), \mathbf{J}_1(-1), \mathbf{J}_1(0)]$$

Problema A-12

Suponga que una matriz normal $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad k. Pruebe que el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - k$.

Solución Suponga que el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - m$. Entonces la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{A-41}$$

tendrá m vectores solución linealmente independientes. Se escogen los m vectores de forma que sean ortogonales y normalizados. Es decir $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ satisfará la ecuación (A-41) y serán ortonormales.

Se consideran los $n - m$ vectores $\mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+2}, \ldots, \mathbf{x}_n$ tales que todos los n vectores

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$$

serán ortonormales. Entonces la matriz $\mathbf{U}$, se define como

$$\mathbf{U} = [\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{x}_n]$$

es una matriz unitaria.

Ya que $1 \leq i \leq m$, se tiene

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_i$$

y por lo tanto se puede escribir

$$\mathbf{AU} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

o

$$\mathbf{U}^*\mathbf{AU} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Al observar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x}_i - \lambda \mathbf{x}_i\|^2 &= \langle (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i \rangle \\ &= \langle (\mathbf{A}^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \\ &= \langle (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{A}^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \\ &= \langle (\mathbf{A}^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x}_i, (\mathbf{A}^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x}_i \rangle \\ &= \|\mathbf{A}^*\mathbf{x}_i - \bar{\lambda}\mathbf{x}_i\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

se tiene

$$\mathbf{A}^*\mathbf{x}_i = \bar{\lambda}\mathbf{x}_i$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}$$

o

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}$$

De donde,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^*\mathbf{AU} = (\mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U})^* = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^* & \mathbf{C}_1^* \end{bmatrix}$$

Al comparar los lados izquierdo y derecho de esta última ecuación, se obtiene

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}\mathbf{U}^*$$

Entonces

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} (\lambda_1 - \lambda)\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}\mathbf{U}^*$$

El determinante de esta última ecuación es

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (\lambda_1 - \lambda)^m |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}| \tag{A-42}$$

Por otro lado, se tiene

$$\text{rango } (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = n - m = \text{rango } \left\{ \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}\mathbf{U}^* \right\}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} = \text{rango } (\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}_{n-m})$$

Por lo tanto, se concluye que el rango de $\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}_{n-m}$ es $n - m$. En consecuencia

$$|\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}_{n-m}| \neq 0$$

y de la ecuación (A-42), λ_1 se muestra ser el valor propio con multiplicidad m de $|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = 0$. Ya que λ_1 es el valor propio de $\mathbf{A}$ con multiplicidad k, se debe tener $m = k$. Por lo tanto, el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - k$.

Observe que, como el rango de $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ es $n - k$, la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

tendrá k vectores propios linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Problema A-13

Pruebe que los valores propios de una matriz Hermítica de $n \times n$ y de una matriz real simétrica de $n \times n$ son reales. Pruebe también que los valores propios de una matriz anti-Hermítica y de una matriz real antisimétrica son cero o imaginarios puros.

Solución Se define cualquier valor propio de una matriz Hermítica $\mathbf{A}$ de $n \times n$ por $\lambda = \alpha + j\beta$. Existe un vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (\alpha + j\beta)\mathbf{x}$$

La transpuesta conjugada de esta última ecuación es

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}^* = (\alpha - j\beta)\mathbf{x}^*$$

Ya que $\mathbf{A}$ es Hermítica $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (\alpha - j\beta)\mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

Por otro lado, como $\mathbf{A}\mathbf{x} = (\alpha + j\beta)\mathbf{x}$, se tiene

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (\alpha + j\beta)\mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$[(\alpha - j\beta) - (\alpha + j\beta)]\mathbf{x}^*\mathbf{x} = 0$$

o

$$-2j\beta\mathbf{x}^*\mathbf{x} = 0$$

Ya que $\mathbf{x}^*\mathbf{x} \neq 0$ (para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), se concluye que

$$\beta = 0$$

Esto prueba que cualquier valor propio de una matriz Hermítica **A** de $n \times n$ ès real. De donde los valores propios de una matriz real simétrica son también reales, ya que es Hermítica.

Para probar la segunda parte del problema, observe que si **B** es anti-Hermítica, entonces $j\mathbf{B}$ es Hermítica. Por lo tanto, los valores propios de $j\mathbf{B}$ son reales, lo que implica que los valores propios de **B** son ya sea cero o imaginarios puros.

Los valores propios de una matriz real anti-simétrica son también ya sea cero o imaginarios puros, ya que una matriz real anti-simétrica es anti-Hermítica.

Observe que, en la matriz real anti-simétrica, los valores propios imaginarios puros ocurren en pares conjugados, ya que los coeficientes de la ecuación característica son reales. Observe también que una matriz real anti-simétrica de $n \times n$ es singular si n es impar, ya que dicha matriz debe incluir al menos un valor propio cero.

Problema A-14

Examine si la siguiente matriz **A** de 3×3 es definida positiva o no:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución · Se demostrarán tres formas diferentes para probar la definición positiva de la matriz **A**.

1. Primero se puede aplicar el criterio de Sylvester para la definición positiva de una forma cuadrática $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$. Para la matriz **A** dada, se tiene

$$2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

   Por lo tanto, los menores principales sucesivos son todos positivos. De esta manera, la matriz **A** es definida positiva.

2. Se puede examinar la definición positiva de $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= [x_1 x_2 x_3]\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_3)^2 + (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

   se encuentra que $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ es positiva excepto en el origen ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Por lo tanto, se concluye que la matriz **A** es definida positiva.

3. Se pueden examinar los valores propios de la matriz **A**. Observe que

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 0.1459)(\lambda - 6.8541) \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0.1459, \qquad \lambda_3 = 6.8541$$

   Ya que los valores propios son positivos, se concluye que **A** es una matriz definida positiva.

Problema A-15

Examine si la siguiente matriz **A** es semidefinida positiva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución En la prueba de definición positiva, se necesitan examinar los signos de todos los menores principales además del signo del determinante de la matriz dada, el cual puede ser cero; es decir, $|\mathbf{A}|$ debe ser igual a 0.

Para la matriz de 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

hay seis menores principales:

$$a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se necesitan examinar los signos de todos los seis menores principales y el signo de $|\mathbf{A}|$.

Para la matriz $\mathbf{A}$ dada,

$$a_{11} = 1 > 0$$

$$a_{22} = 4 > 0$$

$$a_{33} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es claro que, dos menores principales son negativos. Así, se concluye que la matriz $\mathbf{A}$ no es semidefinida positiva.

Es importante observar que, como se han probado los signos de los menores sucesivos y del determinante de la matriz $\mathbf{A}$,

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

se pudo haber llegado a la conclusión errónea de que la matriz $\mathbf{A}$ es semidefinida positiva.

De hecho, para la matriz $\mathbf{A}$ dada,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 5\lambda - 5)\lambda$$

$$= (\lambda - 5.8541)\lambda(\lambda + 0.8541)$$

y los valores propios son

$$\lambda_1 = 5.8541, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -0.8541$$

Para que la matriz $\mathbf{A}$ sea semidefinida positiva, todos los valores propios deben ser no negativos y al menos uno de ellos debe ser cero. Sin duda, la matriz $\mathbf{A}$ es una matriz indefinida.

Apéndice B

Teoría de la transformada z

B-1 INTRODUCCIÓN

En este apéndice se presenta primero teoremas útiles de la teoría de la transformada z que no se trataron en el capítulo 2. Después se discuten detalles del método de la integral de inversión para encontrar la transformada inversa z. Por último, se estudia el método de la transformada z modificada. Al final del apéndice (en la sección de los problemas de ejemplo y soluciones), se discuten algunos problemas interesantes que tratan con la transformación z, que no se vieron en el capítulo 2.

B-2 TEOREMAS ÚTILES DE LA TEORÍA DE LA TRANSFORMADA z

Aquí se presentan algunos de los teoremas útiles de la teoría de la transformada z.

Diferenciación compleja. Una serie de potencias en z se puede diferenciar con respecto a z en su región de convergencia cualquier número de veces para obtener una serie convergente. Las derivadas de $X(z)$ convergen en la misma región de $X(z)$.

Considere

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

que converge en una cierta región en el plano z. Al diferenciar a $X(z)$ con respecto a z, se obtiene

$$\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-k)x(k)z^{-k-1}$$

Al multiplicar ambos lados de esta última ecuación por $-z$ se tiene

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kx(k)z^{-k} \tag{B-1}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z) \tag{B-2}$$

De forma similar, al diferenciar ambos lados de la ecuación (B-1) con respecto a z, se tiene

$$\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(-k^2)x(k)z^{-k-1}$$

Al multiplicar ambos lados de esta última ecuación por $-z$, se obtiene

$$-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}k^2x(k)z^{-k}$$

o

$$\mathcal{Z}[k^2x(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z)$$

La operación $\left(-z\frac{d}{dz}\right)^2$ implica que se puede aplicar el operador $-z\frac{d}{dz}$ dos veces. De igual manera, al repetir el proceso se tiene

$$\mathcal{Z}[k^m x(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \tag{B-3}$$

Dicha diferenciación compleja permite obtener nuevos pares de transformada z a partir de los pares ya conocidos.

Ejemplo B-1

La transformada z de la secuencia escalón unitario $1(k)$ está dada por

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Obtenga la transformada z de la secuencia rampa unitaria $x(k)$, donde

$$x(k) = k$$

mediante el uso del teorema de diferenciación compleja.

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}[k\cdot 1(k)] = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Integración compleja. Considere la secuencia

$$g(k) = \frac{x(k)}{k}$$

donde $x(k)/k$ es finita para $k = 0$. La transformada z de $x(k)/k$ está dada por

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1 + \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k} \tag{B-4}$$

donde $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$.

Para probar la ecuación (B-4), observe que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{k} z^{-k}$$

Al diferenciar esta última ecuación con respecto a z se tiene

$$\frac{d}{dz} G(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k-1} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = -\frac{X(z)}{z}$$

Al integrar ambos lados de está última ecuación con respecto a z desde z a ∞ da

$$\int_z^\infty \frac{d}{dz} G(z)\, dz = G(\infty) - G(z) = -\int_z^\infty \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1$$

o

$$G(z) = \int_z^\infty \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1 + G(\infty)$$

Al observar que $G(\infty)$ está dado por

$$G(\infty) = \lim_{z\to\infty} G(z) = g(0) = \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k}$$

se tiene

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{X(z_1)}{z_1} dz_1 + \lim_{k\to 0} \frac{x(k)}{k}$$

Teorema de diferenciación parcial. Considere una función $x(t, a)$ o $x(kT, a)$ que tiene transformada z. Aquí a es una constante o una variable independiente. La transformada z de $x(t, a)$ o $x(kT, a)$ se define como $X(z, a)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{Z}[x(t,a)] = \mathcal{Z}[x(kT,a)] = X(z,a)$$

La transformada z de la derivada parcial de $x(t, a)$ o $x(kT, a)$ con respecto a a está dada por

$$\mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a} x(t,a)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a} x(kT,a)\right] = \frac{\partial}{\partial a} X(z,a) \tag{B-5}$$

Esta ecuación se denomina el teorema de diferenciación parcial.

Para probar este teorema, observe que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a} x(t,a)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a} x(kT,a)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} x(kT,a) z^{-k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT,a) z^{-k} = \frac{\partial}{\partial a} X(z,a)$$

Ejemplo B-2

Considere

$$x(t,a) = t^2 e^{-at}$$

Obtenga la transformada z de esta función $x(t, a)$ mediante el empleo del teorema de diferenciación parcial.

Al observar que

$$\frac{\partial}{\partial a}(-te^{-at}) = t^2 e^{-at}$$

y

$$\mathcal{Z}[te^{-at}] = \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(t,a)] = \mathcal{Z}[t^2 e^{-at}] &= \mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a}(-te^{-at})\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial a}\left[-\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^2}\right] \\ &= \frac{T^2 e^{-aT}(1 + e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1 - e^{-aT}z^{-1})^3}\end{aligned}$$

Teorema de convolución real. Considere las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0, \quad \text{para } t < 0 \\ x_2(t) &= 0, \quad \text{para } t < 0\end{aligned}$$

Suponga que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen transformada z y que son $X_1(z)$ y $X_2(z)$, respectivamente. Entonces

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)\right] \tag{B-6}$$

Esta ecuación se denomina el teorema de convolución real.

Para probar este teorema, observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)x_2(kT - hT)z^{-k}\end{aligned}$$

donde se emplea la condición que $x_2(kT - hT) = 0$ para $h > k$. Ahora se define a $m = k - h$. Entonces

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h}\sum_{m=-h}^{\infty} x_2(mT)z^{-m}$$

Ya que $x_2(mT) = 0$ para $m < 0$, esta última ecuación se convierte en

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT - hT)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h}\sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)z^{-m} = X_1(z)X_2(z)$$

Teorema de la convolución compleja. El siguiente teorema, conocido como el teorema de la convolución compleja, sirve para obtener la transformada z del producto de dos secuencias $x_1(k)$ y $x_2(k)$.

Supónga que tanto $x_1(k)$ como $x_2(k)$ son cero para $k < 0$. También suponga que

$$X_1(z) = \mathcal{Z}[x_1(k)], \qquad |z| > R_1$$
$$X_2(z) = \mathcal{Z}[x_2(k)], \qquad |z| > R_2$$

donde R_1 y R_2 son los radios de convergencia para $x_1(k)$ y $x_2(k)$, respectivamente. Entonces la transformada z del producto de $x_1(k)$ y $x_2(k)$ se puede escribir como

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1}z)\,d\zeta \tag{B-7}$$

donde $R_2 < |\zeta| < |z|/R_1$.

Para probar este teorema, se toma la transformada z de $x_1(k)x_2(k)$:

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k)z^{-k} \tag{B-8}$$

La serie en el lado derecho de la ecuación (B-8) converge para $|z| > R$, donde R es el radio de convergencia absoluta para $x_1(k)x_2(k)$. De la ecuación (2-23), se tiene

$$\begin{aligned} x_2(k) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_2(z)z^{k-1}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_2(\zeta)\zeta^{k-1}\,d\zeta \end{aligned} \tag{B-9}$$

Al sustituir la ecuación (B-9) en la ecuación (B-8), se obtiene

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_C X_2(\zeta)\zeta^{k-1}x_1(k)z^{-k}\,d\zeta$$

Al observar que la ecuación (B-8) converge uniformemente para la región $|z| > R$, se puede intercambiar el orden de la sumatoria y la integración. Entonces

$$\mathcal{Z}[x_1(k)z_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)(\zeta^{-1}z)^{-k}\,d\zeta$$

Ya que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)(\zeta^{-1}z)^{-k} = X_1(\zeta^{-1}z)$$

se tiene

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1}z)\,d\zeta \tag{B-10}$$

donde C es un contorno (un círculo con centro en el origen), que está en la región dada por $|\zeta| > R_2$ y $|\zeta^{-1}z| > R_1$, o

$$R_2 < |\zeta| < \frac{|z|}{R_1} \tag{B-11}$$

Teorema de Parseval. Suponga qüe las transformadas z de dos secuencias $x_1(k)$ y $x_2(k)$ son

$$X_1(z) = \mathcal{Z}[x_1(k)], \qquad |z| > R_1 \text{ (donde } R_1 < 1)$$

$$X_1(z) = \mathcal{Z}[x_2(k)], \qquad |z| > R_2$$

y la desigualdad (B-11) se satisface para $|z| = 1$, o

$$R_2 < |\zeta| < \frac{1}{R_1}$$

Entonces, al sustituir $|z| = 1$ en la ecuación (8-10), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]_{|z|=1} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1})\, d\zeta$$

Si se hace que $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$ en esta última ecuación, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X(\zeta)X(\zeta^{-1})\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-1} X(z)X(z^{-1})\, dz \qquad \text{(B-12)}$$

La ecuación (B-12) es el teorema de Parseval. Este teorema es útil para obtener la sumatoria de $x^2(k)$.

B-3 TRANSFORMACIÓN INVERSA z Y EL MÉTODO DE LA INTEGRAL DE INVERSIÓN

Si $X(z)$ se expande en una serie de potencia en z^{-1},

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(kT)z^{-k} + \cdots$$

o

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots$$

entonces los valores de $x(kT)$ o $x(k)$ dan la transformada inversa z. Si $X(z)$ está dada en la forma de una función racional, la expansión en una serie infinita de potencias crecientes de z^{-1} se puede lograr al dividir el numerador entre el denominador. Si la serie resultante es convergente, los coeficientes del término z^{-k} en la serie son los valores de $X(kT)$ de la secuencia de tiempo. Sin embargo, por lo regular es difícil obtener una expresión en forma cerrada.

Algunas veces, las siguientes fórmulas son útiles para reconocer las expresiones en forma cerrada para series finitas e infinitas en z^{-1}.

$$(1 - az^{-1})^3 = 1 - 3az^{-1} + 3a^2z^{-2} - a^3z^{-3}$$

$$(1 - az^{-1})^4 = 1 - 4az^{-1} + 6a^2z^{-2} - 4a^3z^{-3} + a^4z^{-4}$$

$$(1 - az^{-1})^{-1} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + a^4z^{-4} + a^5z^{-5} + \cdots \qquad |z| > 1$$

$$(1 - az^{-1})^{-2} = 1 + 2az^{-1} + 3a^2z^{-2} + 4a^3z^{-3} + 5a^4z^{-4} + 6a^5z^{-5} + \cdots, \qquad |z| > 1$$

$$(1 - az^{-1})^{-3} = 1 + 3az^{-1} + 6a^2z^{-2} + 10a^3z^{-3} + 15a^4z^{-4} + 21a^5z^{-5} + 28a^6z^{-6} + \cdots \qquad |z| > 1$$

$$(1 - az^{-1})^{-4} = 1 + 4az^{-1} + 10a^2z^{-2} + 20a^3z^{-3} + 35a^4z^{-4} + 56a^5z^{-5} + 84a^6z^{-6} + 120a^7z^{-7} + \cdots \qquad |z| > 1$$

Para una transformada $zX(z)$, si se desea la expresión en forma cerrada para $x(k)$, se puede usar el método de la expansión en fracciones parciales o el método de la integral de inversión que se presenta a continuación.

Método de la integral de inversión. El método de la integral de inversión, basado en la integral de inversión, es el método más común para obtener la transformada inversa z. Está basado en la teoría de variable compleja. (Para un presentación rigurosa y completa de la integral de inversión, refiérase a un libro sobre la teoría de variable compleja.) Al presentar la fórmula de la integral de inversión para la transformada z, se necesita revisar el teorema de los residuos y su material antecedente asociado.

Repaso del material necesario para obtener la fórmula de la integral de inversión. Suponga que z_0 es un punto singular aislado (polo) de $F(z)$. Se puede ver que existe un número positivo r_1 tal que la función $F(z)$ es analítica en cada punto z para el cual $0 < |z - z_0| \leq r_1$. El círculo con centro $z = z_0$ y radio r_1 se denota como Γ_1. Se define a Γ_2 como cualquier círculo con centro en $z = z_0$ y radio $|z - z_0| = r_2$ para el cual $r_2 \leq r_1$. Los círculos Γ_1 y Γ_2 se muestran en la figura B-1. Entonces, la expansión en la serie de Laurent de $F(z)$ alrededor del polo en $z = z_0$ puede estar dada por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde los coeficientes a_n y b_n están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

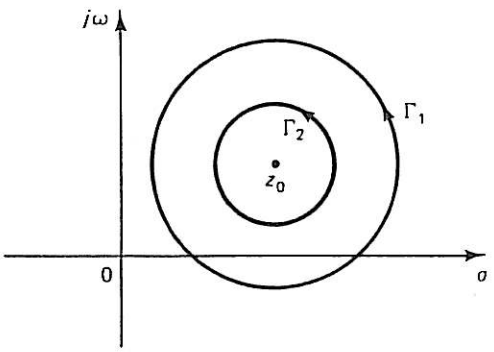


Figura B-1 Región analítica para la función $F(z)$.

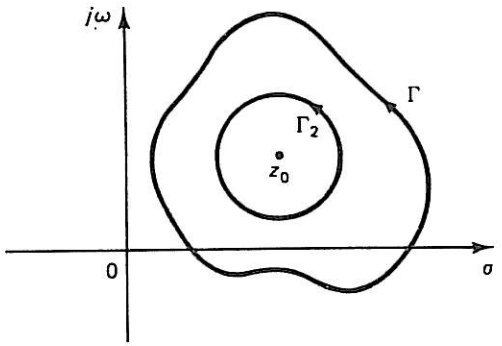


Figura B-2 Región analítica para la función $F(z)$ limitada por una curva cerrada Γ.

Observe que el coeficiente b_1 está dado por

$$b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_2} F(z)\,dz \tag{B-13}$$

Se puede probar que el valor de la integral de la ecuación (B-13) no cambia si Γ_1 se reemplaza por cualquier curva cerrada Γ alrededor de z_0 tal que $F(z)$ sea analítica sobre y dentro de Γ excepto en el polo $z = z_0$ (vea la figura B-2). La curva cerrada Γ puede extenderse afuera del círculo Γ_1. Entonces, en referencia al teorema de Cauchy-Goursat, se tiene

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} F(z)\,dz = 0$$

Por lo tanto, la ecuación (B-13) se puede escribir como

$$b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)\,dz$$

El coeficiente b_1 se denomina el *residuo* de $F(z)$ en el polo z_0.

A continuación, se supone que la curva cerrada Γ encierra m polos aislados $z_1, z_2, \ldots, z_m$, como se muestra en la figura B-3. Observe que la función $F(z)$ es analítica en la región sombreada. De

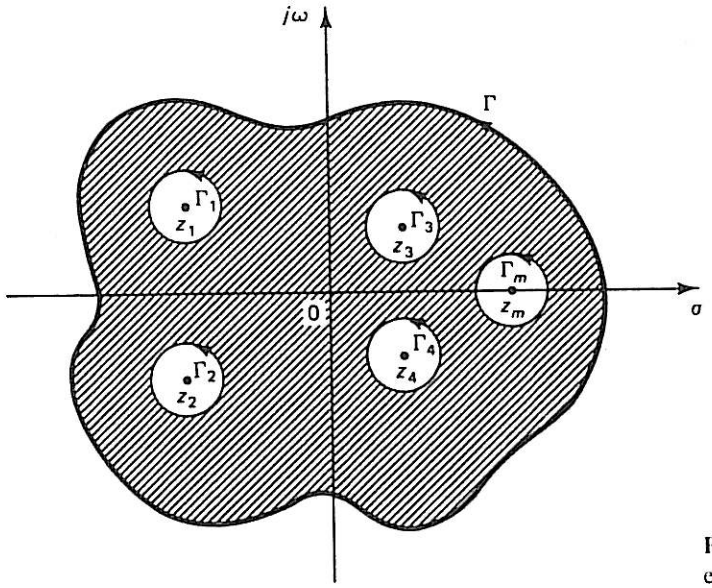


Figura B-3 Curva cerrada Γ que encierra a m polos aislados $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

acuerdo al teorema de Cauchy-Goursat, la integral de $F(z)$ sobre la región sombreada es cero. La integral sobre el total de la región sombreada es

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} F(z)\,dz - \cdots - \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz = 0$$

donde $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ son curvas cerradas alrededor de los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} F(z)\,dz &= \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} F(z)\,dz + \cdots + \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz \\ &= 2\pi j(b_{1_1} + b_{1_2} + \cdots + b_{1_m}) \\ &= 2\pi j(K_1 + K_2 + \cdots + K_m)\end{aligned} \tag{B-14}$$

donde $K_1 = b_{1_1}, K_2 = b_{1_2}, \ldots, K_m = b_{1_m}$ son los residuos de $F(z)$ en los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, respectivamente.

La ecuación (B-14) se conoce como el *teorema de los residuos*. Este teorema establece que una función $F(z)$ es analítica dentro y sobre una curva cerrada Γ, excepto en un número finito de polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dentro de Γ, entonces la integral de $F(z)$ alrededor de Γ tomada en contra de las manecillas del reloj es igual a $2\pi j$ veces la suma de los residuos de los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Integral de inversión para la transformada z. Ahora se empleará el teorema de Cauchy-Goursat y el teorema de los residuos para obtener la integral de inversión para la transformada z.

De la definición de la transformada z, se tiene

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + z(2T)z^{-2} + \cdots + x(kT)z^{-k} + \cdots$$

Al multiplicar ambos lados de esta última ecuación por z^{k-1}, se obtiene

$$X(z)z^{k-1} = x(0)z^{k-1} + x(T)z^{k-2} + x(2T)z^{k-3} + \cdots + x(kT)z^{-1} + \cdots \tag{B-15}$$

Observe que la ecuación (B-15) es la expansión en la serie de Laurent de $X(z)z^{k-1}$ alrededor del punto $z = 0$.

Considere un círculo C con centro en el origen tal que los polos de $X(z)z^{k-1}$ están dentro de él. Al observar que el coeficiente de $x(kT)$ asociado con el término z^{-1} en la ecuación (B-15) es el residuo, se obtiene

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}\,dz \tag{B-16}$$

La ecuación (B-16) es la integral de inversión para la transformada z. La evaluación de la integral de inversión se puede hacer como se presenta a continuación.

Se definen los polos de $X(z)z^{k-1}$ como $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Ya que la curva cerrada C encierra los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, entonces con referencia a la ecuación (B-14) se tiene

$$\begin{aligned}\oint_C X(z)z^{k-1}\,dz &= \oint_{C_1} X(z)z^{k-1}\,dz + \oint_{C_2} X(z)z^{k-1}\,dz + \cdots + \oint_{C_m} X(z)z^{k-1}\,dz \\ &= 2\pi j(K_1 + K_2 + \cdots + K_m)\end{aligned} \tag{B-17}$$

donde $K_1, K_2, \ldots, K_m$ denotan los residuos de $X(z)z^{k-1}$ en los polos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, respectivamente, y $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son pequeñas curvas alrededor de los polos aislados $z_1, z_2, \ldots, z_m$, respectivamente.

Ahora se combinan la ecuaciones (B-16) y la (B-17) para obtener un resultado muy útil. Ya que $X(z)z^{k-1}$ tiene m polos, esto es, $z_1, z_2, \ldots, z_m$,

$$x(k) = x(kT) = K_1 + K_2 + \cdots + K_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m} [\text{residuo de } X(z)z^{k-1} \text{ en el polo } z = z_i \text{ de } X(z)z^{k-1}] \qquad \text{(B-18)}$$

Al evaluar los residuos, observe que si el denominador de $X(z)z^{k-1}$ contiene un polo simple en $z = z_i$ entonces el residuo K correspondiente es

$$K = \lim_{z \to z_i} [(z - z_i)X(z)z^{k-1}]$$

Si $X(z)z^{k-1}$ contiene un polo múltiple en z_j de orden q, el residuo K está dado por

$$K = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z - z_j)^q X(z)z^{k-1}]$$

Observe que en este libro se trata sólo con la transformada z unilateral. Esto implica que $x(k) = 0$ para $k < 0$. Por lo tanto, los valores de k en la ecuación (B-17) se restringen a los valores enteros no negativos.

Si $X(z)$ tiene un cero de orden r en el origen, entonces $X(z)z^{k-1}$ en la ecuación (B-17) involucrará un cero de orden $r + k - 1$ en el origen. Si $r \geq 1$ entonces $r + k - 1 \geq 0$ o $k \geq 0$, y no existe un polo en $z = 0$ en $X(z)z^{k-1}$. Sin embargo, si $r \leq 0$, entonces habrá un polo en $z = 0$ para uno o más valores no negativos de k. En tal caso, se necesita la inversión separada de la ecuación (B-17) para cada valor de k.

Se debe observar que el método de la integral de inversión, cuando es evaluado por los residuos, es una técnica muy simple para obtener la transformada inversa z, considerando que $X(z)z^{k-1}$ no tiene polos en el origen, $z = 0$. Si, sin embargo, $X(z)z^{k-1}$ tiene un polo simple o un polo múltiple en $z = 0$, entonces los cálculos se pueden hacer engorrosos y el método de expansión en fracciones parciales puede ser más simple de aplicar.

Comentarios sobre el cálculo de los residuos. Al obtener los residuos de una función $X(z)$, observe que, sin importar la forma como se calculan dichos residuos, el resultado final es el mismo. Por lo tanto, se puede utilizar cualquier método que sea conveniente según la situación. Por ejemplo, considere la función $X(z)$ siguiente:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 5z + 6}{(z+1)^3} + \frac{4z}{(z+1)^2} + \frac{5}{z+1}$$

Se demostrarán tres métodos para calcular los residuos de esta función $X(z)$.

Método 1. El residuo de esta función se puede obtener como la suma de los residuos de los términos respectivos:

[Residuo K de $X(z)$ al polo $z = -1$]

$$= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+1)^3 \frac{2z^2 + 5z + 6}{(z+1)^3} \right]$$
$$+ \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{4z}{(z+1)^2} \right] + \lim_{z \to -1} \left[(z+1) \frac{5}{z+1} \right]$$
$$= \tfrac{1}{2} \lim_{z \to -1} (4) + \lim_{z \to -1} (4) + \lim_{z \to -1} (5) = 2 + 4 + 5$$
$$= 11$$

Método 2. Si los tres términos de $X(z)$ se combinan en uno solo como se muestra a continuación,

$$X(z) = \frac{2z^2 + 5z + 6}{(z + 1)^3} + \frac{4z}{(z + 1)^2} + \frac{5}{z + 1} = \frac{11z^2 + 19z + 11}{(z + 1)^3}$$

entonces el residuo se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned}
&[\text{Residuo } K \text{ de } X(z) \text{ al polo } z = -1] \\
&\quad = \frac{1}{(3 - 1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z + 1)^3 \frac{11z^2 + 19z + 11}{(z + 1)^3}\right] \\
&\quad = \tfrac{1}{2} \lim_{z \to -1} (22) \\
&\quad = 11
\end{aligned}$$

Método 3. Si $X(z)$ se expande en la forma usual en fracciones parciales como se muestra a continuación,

$$X(z) = \frac{11z^2 + 19z + 11}{(z + 1)^3} = \frac{3}{(z + 1)^3} - \frac{3}{(z + 1)^2} + \frac{11}{z + 1}$$

entonces el residuo de $X(z)$ es el coeficiente del término $1/(z + 1)$. Por lo tanto,

$$[\text{Residuo } K \text{ de } X(z) \text{ al polo } z = -1] = 11$$

B-4 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA z MODIFICADA

La transformada z modificada es una modificación del método de la transformada z. Se basa en insertar un retraso ficticio puro a la salida del sistema, además de insertar un muestreador ficticio en la salida, y variar la cantidad de retraso ficticio para obtener la salida entre cualquiera de dos instantes de muestreo consecutivos.

El método de la transformada z modificada es útil no sólo para obtener la respuesta entre dos instantes de muestreo consecutivos, sino también para obtener la transformada z de procesos con retrasos puros o retrasos de transporte. Además, el método de la transformada z modificada se aplica a la mayoría de los esquemas de muestreo.

Considere el sistema que se muestra en la figura B-4(a). En este sistema se inserta un retraso ficticio de $(1 - m)T$ segundos, donde $0 \leq m \leq 1$ y T es el periodo de muestreo, en la salida del sistema. Al variar a m entre 0 y 1, se puede obtener la salida $y(t)$ en $t = kT - (1 - m)T$ (donde $k = 1, 2, 3, \ldots$). Al observar que $G^*(s)$ está dada por

$$G^*(s) = \mathcal{L}[g(t)\delta_T(t)]$$

la función de transferencia pulso modificada $G(z, m)$ se define como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_m[G(s)] = G(z, m) &= G^*(s, m)|_{s=(1/T)\ln z} \\
&= \mathcal{L}[g(t - (1 - m)T)\delta_T(t)]|_{s=(1/T)\ln z}
\end{aligned} \tag{B-19}$$

donde la notación $\mathcal{Z}_m$ significa la transformada z modificada.

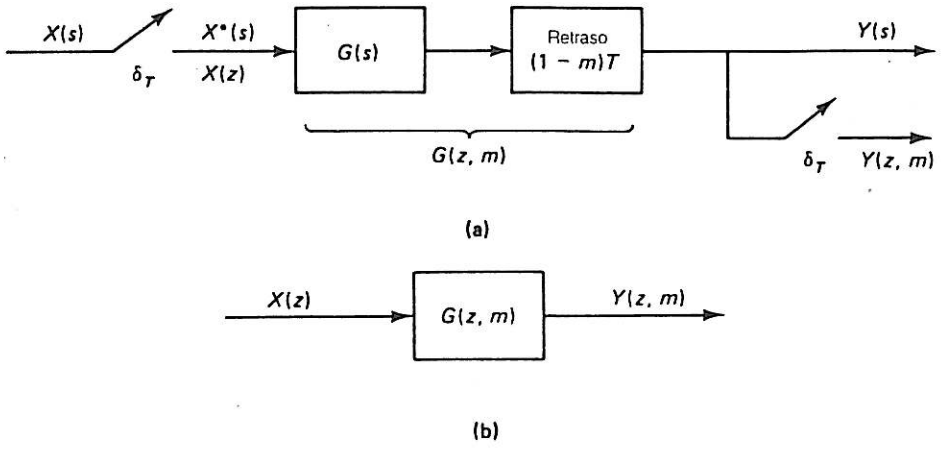


Figura B-4 (a) Sistema con retraso ficticio de $(1 - m)T$ segundos; (b) sistema con función de transferencia pulso modificada con entrada $X(z)$ y salida $Y(z, m)$.

Al observar que

$$\mathcal{L}[g(t - (1 - m)T)\delta_T(t)] = \mathcal{L}[g(t - T + mT)\delta_T(t)]$$
$$= e^{-Ts}\mathcal{L}[g(t + mT)\delta_T(t)]$$

se tiene

$$G^*(s, m) = e^{-Ts}\mathcal{L}[g(t + mT)\delta_T(t)] \tag{B-20}$$

Ya que $\mathcal{L}[g(t + mT)\delta_T(t)]$ es la transformada de Laplace del producto de dos funciones en el tiempo, con referencia a la ecuación (3-19) se puede obtener como sigue:

$$\mathcal{L}[g(t + mT)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p)\frac{e^{mTp}}{1 - e^{-T(s-p)}}dp \tag{B-21}$$

La integral en el lado derecho de la ecuación (B-21) se puede llevar a cabo en forma similar a la discutida en la sección 3-3, es decir, la integral de convolución se puede obtener al integrar ya sea en el semiplano izquierdo o en el semiplano derecho.

Se considera que el contorno de integración está a lo largo de un semicírculo infinito en el semiplano izquierdo. Entonces

$$\mathcal{L}[g(t + mT)\delta_T(t) = \Sigma\left[\text{residuo de}\frac{G(s)e^{mTs}z}{z - e^{Ts}}\text{ un polo de }G(s)\right] \tag{B-22}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (B-19), (B-20) y (B-22), se obtiene la transformada z modificada de $G(z)$ como sigue:

$$G(z, m) = z^{-1}\Sigma\left[\text{residuo de}\frac{G(s)e^{mTs}z}{z - e^{Ts}}\text{ un polo de }G(s)\right] \tag{B-23}$$

Observe que la transformada z modificada $G(z, m)$ y la transformada $G(z)$ se pueden relacionar como sigue:

$$G(z) = \lim_{m\to 0} zG(z, m) \tag{B-24}$$

Con referencia a la figura B-4(b), la salida $Y(z, m)$ se obtiene como sigue:

$$Y(z,m) = G(z,m)X(z) \tag{B-25}$$

Como en el caso de la transformada z, la transformada z modificada $Y(z, m)$ se puede expandir en una serie infinita en z^{-1}, como sigue:

$$Y(z,m) = y_0(m)z^{-1} + y_1(m)z^{-2} + y_2(m)z^{-3} + \cdots \tag{B-26}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (B-26) por z, se tiene

$$zY(z,m) = y_0(m) + y_1(m)z^{-1} + y_2(m)z^{-2} + \cdots \tag{B-27}$$

donde $y_k(m)$ representa el valor de $y(t)$ entre $t = kT$ y $t = (k + 1)T$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ o

$$y_k(m) = y((k + m)T) \tag{B-28}$$

Observe que si $y(k)$ es continua entonces

$$\lim_{m \to 1} y_{k-1}(m) = \lim_{m \to 0} y_k(m) \tag{B-29}$$

La parte izquierda de la ecuación (B-29) da los valores $y(0–), y(T–), y(2T–), \ldots$, y el lado derecho da los valores $y(0+), y(T+), y(2T+), \ldots$ Si la salida $y(kT)$ es continua, entonces $y(kT–) = y(kT+)$.

Ejemplo B-3

Obtenga la transformada z modificada de $G(s)$, donde

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

Con referencia a la ecuación (B-23), se obtiene la transformada z modificada de $G(s)$ como

$$\begin{aligned} G(z,m) &= z^{-1}\left[\text{residuo de } \frac{1}{s + a}\frac{e^{mTs}z}{z - e^{Ts}} \text{ polo de } s = -a\right] \\ &= z^{-1}\left\{\lim_{s \to -a}\left[(s + a)\frac{1}{s + a}\frac{e^{mTs}z}{z - e^{Ts}}\right]\right\} \\ &= z^{-1}\frac{e^{-maT}z}{z - e^{-aT}} = \frac{e^{-maT}z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}} \end{aligned}$$

Ejemplo B-4

Considere el sistema que se muestra en la figura B-5(a) y (b). Obtenga la salida $Y(z, m)$ de cada sistema.

Para el sistema que se muestra en la figura B-5(a), se obtiene

$$Y(z,m) = \mathcal{Z}_m[Y(s)] = G_2(z,m)G_1(z)X(z)$$

Observe que

$$Y(z) = \mathcal{Z}[Y(s)] = G_2(z)G_1(z)X(z)$$

Para el sistema que se muestra en la figura B-5(b), se tiene

$$Y(z,m) = \mathcal{Z}_m[Y(s)] = G_1G_2(z,m)X(z)$$

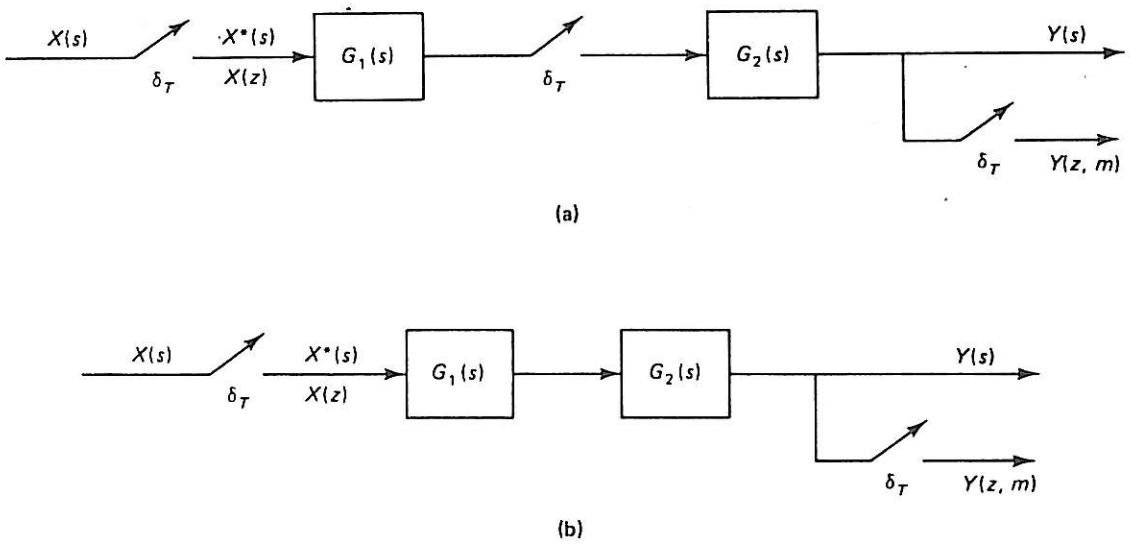


Figura B-5 (a) Sistema con un muestreador entre $G_1(s)$ y $G_2(s)$; (b) sistema sin muestreador entre $G_1(s)$ y $G_2(s)$.

donde

$$G_1G_2(z,m) = \mathcal{Z}_m[G_1(s)G_2(s)]$$

Observe que

$$Y(z) = G_1G_2(z)X(z)$$

Ejemplo B-5

Considere el sistema que se muestra en la figura B-6. Obtenga la transformada z modificada de $C(s)$.

La salida $C(z)$ está dada por

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}R(z)$$

La transformada z modificada de $C(z)$ está dada por

$$C(z,m) = \frac{G(z,m)}{1 + GH(z)}R(z) \tag{B-30}$$

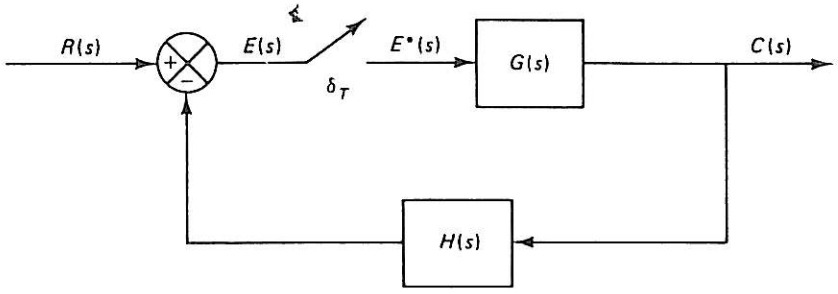


Figura B-6 Sistema de control de lazo cerrado.

Ejemplo B-6

Considere el sistema que se muestra en la figura B-7. El periodo de muestreo T es de 1 segundo, o $T = 1$. Suponga que el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario. Obtenga $c_k(m)$ para $m = 0.5$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. También, verifique que la ecuación (B-24) se conserva cierta. La transformada z modificada de $G(s)$ se obtiene de la ecuación (B-23) como sigue:

$$G(z, m) = z^{-1} \Sigma \left[\text{residuo de} \frac{G(s)e^{ms}z}{z - e^{s}} \text{ en polo de } G(s) \right]$$

$$= z^{-1}(1 - z^{-1}) \left\{ \left[\text{residuo de} \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{e^{ms}z}{z - e^{s}} \text{ doble polo en } s = 0 \right] \right.$$

$$\left. + \left[\text{residuo de} \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{e^{ms}z}{z - e^{s}} \text{ un simple polo } s = -1 \right] \right\}$$

$$= z^{-1}(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{e^{ms}z}{z - e^{s}} \right] \right.$$

$$\left. + \lim_{s \to -1} \left[(s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{e^{ms}z}{z - e^{s}} \right] \right\}$$

$$= z^{-1}(1 - z^{-1}) \left[\frac{mz^2 - mz - z^2 + 2z}{(z-1)^2} + \frac{e^{-m}z}{z - e^{-1}} \right]$$

$$= \frac{(m-1)z^{-1} + (2-m)z^{-2}}{1 - z^{-1}} + \frac{e^{-m}z^{-1}(1 - z^{-1})}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$

$$= \frac{(m - 1 + e^{-m})z^{-1} + (2.3679 - 1.3679m - 2e^{-m})z^{-2} + [-0.3679(2 - m) + e^{-m}]z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

Con referencia a la ecuación (B-30) y al notar que $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$, se tiene

$$C(z, m) = \frac{G(z, m)}{1 + G(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{(m - 1 + e^{-m})z^{-1} + (2.3679 - 1.3679m - 2e^{-m})z^{-2} + (-0.7358 + 0.3679m + e^{-m})z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + 1.6321z^{-2} - 0.6321z^{-3}}$$

Por lo tanto, para $m = 5$ se tiene

$$C(z, 0.5) = \frac{0.1065z^{-1} + 0.4709z^{-2} + 0.05468z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + 1.6321z^{-2} - 0.6321z^{-3}} \tag{B-31}$$

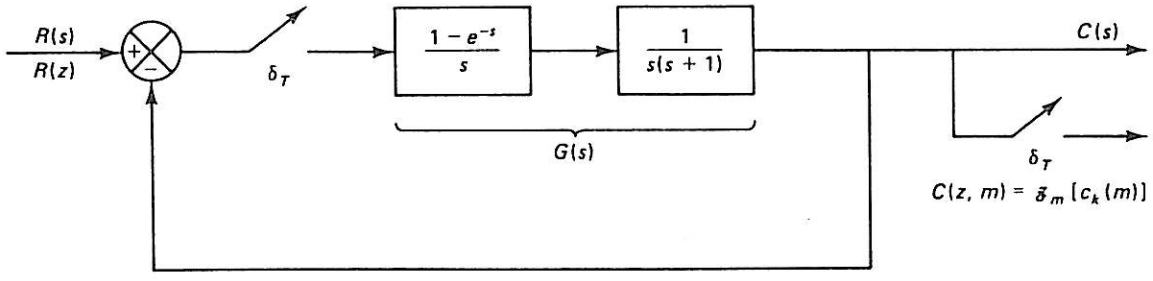


Figura B-7 Sistema de control de lazo cerrado.

Con referencia a la ecuación (B-27), la ecuación (B-31) se puede expandir en una serie infinita en z^{-1} como sigue:

$$C(z, 0.5) = c_0(0.5)z^{-1} + c_1(0.5)z^{-2} + c_2(0.5)z^{-3} + \cdots$$

o

$$zC(z, 0.5) = c_0(0.5) + c_1(0.5)z^{-1} + c_2(0.5)z^{-2} + \cdots$$

donde $c_k(0.5) = c((k + 0.5)T) = c(k + 0.5)$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$ Los valores de $c_k(0.5)$ se pueden obtener fácilmente con una computadora digital. La solución por computadora para $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ es como sigue:

$$c_0(0.5) = c(0.5) = 0.1065$$

$$c_1(0.5) = c(1.5) = 0.6839$$

$$c_2(0.5) = c(2.5) = 1.2487$$

$$c_3(0.5) = c(3.5) = 1.4485$$

$$c_4(0.5) = c(4.5) = 1.2913$$

$$c_5(0.5) = c(5.5) = 1.0078$$

$$c_6(0.5) = c(6.5) = 0.8236$$

$$c_7(0.5) = c(7.5) = 0.8187$$

$$c_8(0.5) = c(8.5) = 0.9302$$

$$c_9(0.5) = c(9.5) = 1.0447$$

Estos valores dan la respuesta de los puntos medios entre pares consecutivos de puntos de muestreo. Observe que al variar el valor de m entre 0 y 1 es posible encontrar la respuesta en cualquier punto entre dos puntos de muestreo consecutivos, como $c(1.2)$ y $c(2.8)$.

Finalmente, observe que

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{1}{s(s + 1)}\right]$$

$$= \frac{(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}$$

$$= \frac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

y

$$\lim_{m \to 0} zG(z, m) = \frac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

Por lo tanto,

$$G(z) = \lim_{m \to 0} zG(z, m)$$

Es claro que la ecuación (B-24) se conserva cierta.

Resumen. El propósito principal de esta sección ha sido presentar el método de la transformada z modificada para encontrar la respuesta en cualquier tiempo entre dos instantes de muestreo consecutivos. Se observa que la transformada z modificada se puede usar no sólo para este propósito, sino para tratar con esquemas de muestreo con múltiples frecuencias de muestreo.

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema B-1

Obtenga la transformada z de $1/k!$

Solución

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}$$

$$= 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{4!} z^{-4} + \cdots$$

$$= \exp(z^{-1})$$

Problema B-2

Obtenga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) z^{-k}$$

(Esta serie se parece a la de la transformada z de $1/k$, pero la secuencia k comienza aquí con 1 en lugar de 0.)

Solución Ya que

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

al multiplicar ambos lados de esta última ecuación por z^{-2}, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-2} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Al integrar esta última ecuación con respecto a z, se tiene

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-2} dz = \int \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} dz$$

o

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{-k-1} = \ln(1 - z^{-1}) + \text{constante} \tag{B-32}$$

donde la constante en la ecuación (B-32) es cero. [Para verificar esto, sustituya z por ∞ en ambos lados de la ecuación (B-32).] Por lo tanto, la ecuación (B-32) se puede reescribir como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{-k} = \ln(1 - z^{-1}), \qquad |z| > 1$$

o

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) z^{-k} = -\ln(1 - z^{-1}), \qquad |z| > 1$$

Problema B-3

La primera diferencia hacia atrás entre $x(k)$ y $x(k-1)$ se define como

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

La segunda diferencia hacia atrás se define como

$$\nabla^2 x(k) = \nabla[\nabla x(k)] = \nabla[x(k) - x(k-1)]$$
$$= \nabla x(k) - \nabla x(k-1)$$

y la tercera diferencia hacia atrás se define como

$$\nabla^3 x(k) = \nabla^2 x(k) - \nabla^2 x(k-1)$$

De forma similar, la m-ésima diferencia hacia atrás se define como

$$\nabla^m x(k) = \nabla^{m-1} x(k) - \nabla^{m-1} x(k-1)$$

Obtenga la transformada z de $\nabla x(k)$, $\nabla^2 x(k)$, $\nabla^3 x(k)$, y $\nabla^m x(k)$.

Solución La transformada z de la primera diferencia hacia atrás se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\nabla x(k)] &= \mathcal{Z}[x(k)] - \mathcal{Z}[x(k-1)] \\ &= X(z) - z^{-1}X(z) \\ &= (1 - z^{-1})X(z)\end{aligned} \tag{B-33}$$

Como

$$\nabla^2 x(k) = [x(k) - x(k-1)] - [x(k-1) - x(k-2)]$$
$$= x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$$

la transformada z de $\nabla^2 x(k)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\nabla^2 x(k)] &= \mathcal{Z}[x(k)] - 2\,\mathcal{Z}[x(k-1)] + \mathcal{Z}[x(k-2)] \\ &= X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) \\ &= (1 - z^{-1})^2 X(z)\end{aligned} \tag{B-34}$$

En esta forma se obtiene

$$\mathcal{Z}[\nabla^3 x(k)] = (1 - z^{-1})^3 X(z)$$

Observe que la operación de tomar la diferencia hacia atrás corresponde a multiplicar $X(z)$ por $(1 - z^{-1})$. Por lo tanto, para la m-ésima diferencia hacia atrás

$$\nabla^m x(k) = \nabla^{m-1} x(k) - \nabla^{m-1} x(k-1)$$

se tiene

$$\mathcal{Z}[\nabla^m x(k)] = (1 - z^{-1})^m X(z) \tag{B-35}$$

Problema B-4

La primera diferencia hacia adelante entre $x(k+1)$ y $x(k)$ se define como

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

La segunda diferencia hacia adelante se define como

$$\Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] = \Delta[x(k+1) - x(k)]$$
$$= \Delta x(k+1) - \Delta x(k)$$

La tercera diferencia hacia adelante se define como

$$\Delta^3 x(k) = \Delta^2 x(k+1) - \Delta^2 x(k)$$

y la m-ésima diferencia hacia adelante está dada por

$$\Delta^m x(k) = \Delta^{m-1} x(k+1) - \Delta^{m-1} x(k)$$

Obtenga la transformada z de $\Delta x(k)$, $\Delta^2 x(k)$, $\Delta^3 x(k)$, y $\Delta^m x(k)$.

Solución La transformada z de la primera diferencia hacia adelante está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\Delta x(k)] &= \mathcal{Z}[x(k+1)] - \mathcal{Z}[x(k)] \\ &= zX(z) - zx(0) - X(z) \\ &= (z-1)X(z) - zx(0) \end{aligned} \tag{B–36}$$

Ya que

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= [x(k+2) - x(k+1)] - [x(k+1) - x(k)] \\ &= x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) \end{aligned}$$

la transformada z de $\Delta^2 x(k)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\Delta^2 x(k)] &= \mathcal{Z}[x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)] \\ &= z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) - 2[zX(z) - zx(0)] + X(z) \\ &= (z-1)^2 X(z) - z(z-1)x(0) - z\,\Delta x(0) \end{aligned} \tag{B-37}$$

donde $\Delta x(0) = x(1) - x(0)$. La transformada z de $\Delta^3 x(k)$ se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\Delta^3 x(k)] &= \mathcal{Z}[x(k+3) - 3x(k+2) + 3x(k+1) - x(k)] \\ &= (z-1)^3 X(z) - z(z-1)^2 x(0) - z(z-1)\Delta x(0), - z\,\Delta^2 x(0) \end{aligned}$$

donde $\Delta x(0) = x(1) - x(0)$ y $\Delta^2 x(0) = x(2) - 2x(1) + x(0)$. De forma similar, para la m-ésima diferencia hacia adelante

$$\Delta^m x(k) = \Delta^{m-1} x(k+1) - \Delta^{m-1} x(k)$$

se tiene

$$\mathcal{Z}[\Delta^m x(k)] = (z-1)^m X(z) - z \sum_{j=0}^{m-1} (z-1)^{m-j-1} \Delta^j x(0) \tag{B-38}$$

Problema B-5

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias:

$$(k+1)x(k+1) - x(k) = 0$$

donde $x(k) = 0$ para $k < 0$ y $x(0) = 1$. Observe que la ecuación en diferencias es de la clase variante en el tiempo. La solución de este tipo de ecuación en diferencia se puede obtener mediante el empleo de la transformada z. (Se debe tener cuidado ya que el enfoque de la trasformada z aplicada a la solución de ecuaciones en diferencia variantes en el tiempo puede no ser exitosa.)

Solución Primero, observe que

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

ya que la ecuación en diferencias original se puede escribir como

$$kx(k) - x(k-1) = 0$$

la transformada z de esta última ecuación se puede obtener como sigue:

$$-z\frac{d}{dz}X(z) - z^{-1}X(z) = 0$$

o

$$z^2\frac{d}{dz}X(z) + X(z) = 0$$

de donde se tiene

$$\frac{dX(z)}{X(z)} = -\frac{dz}{z^2}$$

o

$$\ln X(z) = \frac{1}{z} + \ln K$$

donde K es una constante. Entonces $X(z)$ se puede encontrar de

$$X(z) = K \exp z^{-1}$$

Como $\exp z^{-1}$ se puede expandir en la serie

$$\exp z^{-1} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \cdots, \qquad |z| > 0$$

se tiene

$$X(z) = K\left(1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \cdots\right)$$

de la cual se encuentra que la transformada inversa z de $X(z)$ es

$$x(k) = K\frac{1}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Como $x(0)$ está dada como 1, se tiene

$$x(0) = K = 1$$

De donde, se ha determinado la constante desconocida K. Por lo tanto, la solución para la ecuación en diferencias dada es

$$x(k) = \frac{1}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Problema B-6

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias

$$(k + 1)x(k + 1) - kx(k) = k + 1$$

donde $x(k) = 0$ para $k \leq 0$.

Solución Primero observe que al sustituir $k = 0$ en la ecuación en diferencias dada, se tiene

$$x(1) = 1$$

Ahora se define

$$y(k) = kx(k)$$

Entonces la ecuación en diferencias se puede escribir como

$$y(k+1) - y(k) = k + 1$$

Al tomar la transformada z de esta última ecuación, se tiene

$$zY(z) - zy(0) - Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Como $y(0) = 0$, se tiene

$$Y(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Con referencia al problema A-2-8, se tiene

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}\right] = \frac{1}{2}(k^2 - k)$$

Entonces, la transformada inversa z de $Y(z)$ puede estar dada por

$$y(k) = \tfrac{1}{2}(k^2 - k) + k = \tfrac{1}{2}(k^2 + k)$$

Entones, $x(k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ se determina de

$$kx(k) = y(k) = \tfrac{1}{2}(k^2 + k)$$

como sigue:

$$x(k) = \tfrac{1}{2}(k+1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Problema B-7

Considere el sistema que se muestra en la figura B-8. El periodo de muestreo es de 2 segundos, o $T = 2$. La entrada $x(t)$ es una función delta de Kronecker $\delta_0(t)$; es decir,

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Obtenga la respuesta cada 0.5 segundos mediante el empleo del método de la transformada z modificada.

Solución Como la entrada $x(t)$ es una función delta de Kronecker, se tiene

$$X(z) = 1$$

La función de transferencia pulso modificada $G(z, m)$ se obtiene como sigue. Con referencia a la ecuación (B-23).

$$G(z, m) = z^{-1}\left[\text{residuo de } \frac{1}{s+0.6931}\frac{e^{mTs}z}{z-e^{Ts}} \text{ un polo } s = -0.6931\right]$$

Al observar que $T = 2$, se obtiene

$$G(z,m) = z^{-1}\left\{\lim_{s\to -0.6931}\left[(s+0.6931)\frac{1}{s+0.6931}\frac{e^{2ms}z}{z-e^{2s}}\right]\right\}$$

$$= z^{-1}\frac{(e^{-1.3862})^m z}{z - e^{-1.3862}} = \frac{4^{-m}}{z-0.25}$$

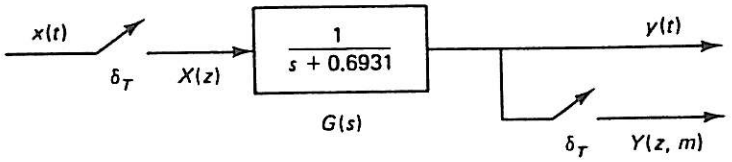


Figura B-8 Sistema muestreado.

Por lo tanto, la salida $Y(z, m)$ se puede obtener como sigue:

$$Y(z,m) = G(z,m)X(z) = \frac{4^{-m}}{z - 0.25}$$

Con referencia a la ecuación (B-27), se tiene

$$zY(z,m) = y_0(m) + y_1(m)z^{-1} + y_2(m)z^{-2} + \cdots$$

donde $y_k(m) = y((k+m)T) = y(2k+2m)$. En este problema $zY(z, m)$ se puede expandir en una serie infinita en z^{-1} como sigue:

$$zY(z,m) = \frac{4^{-m}}{1 - 0.25z^{-1}}$$
$$= 4^{-m} + 4^{-m-1}z^{-1} + 4^{-m-2}z^{-2} + 4^{-m-3}z^{-3} + \cdots$$

Por lo tanto,

$$y_0(m) = 4^{-m}$$
$$y_1(m) = 4^{-m-1}$$
$$y_2(m) = 4^{-m-2}$$
$$y_3(m) = 4^{-m-3}$$
$$\vdots$$

Para obtener la salida del sistema cada 0.5 segundos, se hace que $m = 0$, 0.25, 0.5 y 0.75. Para $m = 0.25$, se obtiene

$$y_0(0.25) = y(0.5) = 4^{-0.25} = 0.7071$$
$$y_1(0.25) = y(2.5) = 4^{-1.25} = 0.1768$$
$$y_2(0.25) = y(4.5) = 4^{-2.25} = 0.04419$$
$$y_3(0.25) = y(6.5) = 4^{-3.25} = 0.01105$$
$$\vdots$$

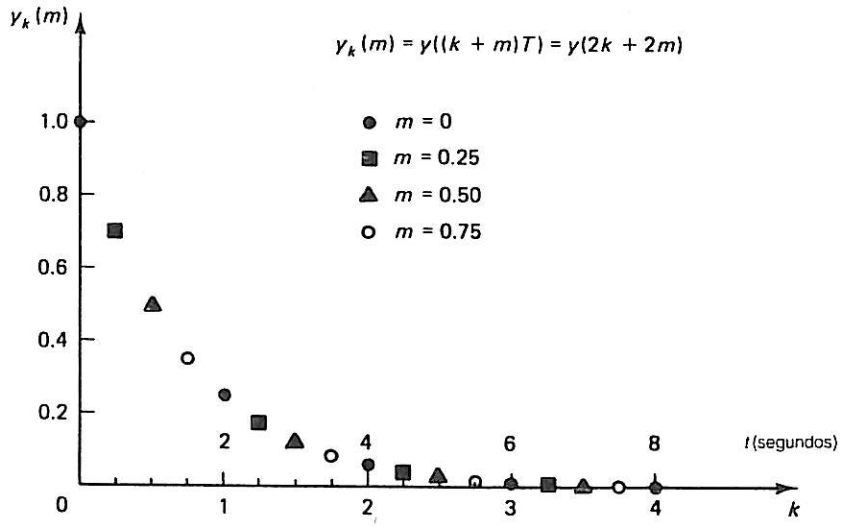


Figura B-9 Gráfica de $y_k(m)$ contra k para el sistema considerado en el problema B-7.

De forma similar, se pueden calcular los valores de $y_k(m)$ para $m = 0, 0.5$, y 0.75. Este resultado se muestra en la figura B-9 como una gráfica de $y_k(m)$ contra k.

Problema B-8

Obtenga $C(z, m)$, la transformada z modificada de la salida, del sistema que se muestra en la figura B-10.

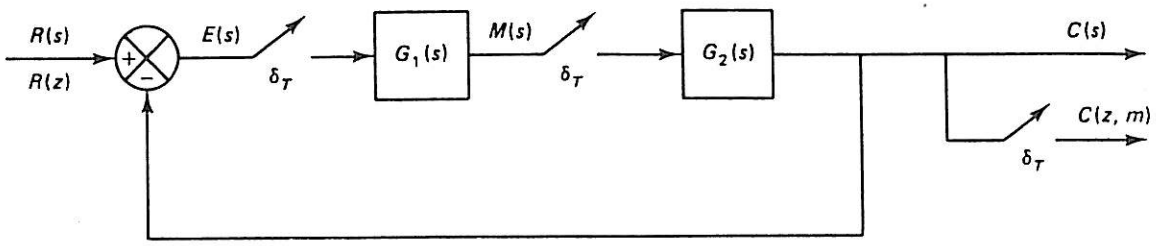


Figura B-10 Sistema de control de tiempo discreto en lazo cerrado.

Solución De la figura B-10 se tiene

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$M(s) = G_1(s)E^*(s)$$

$$C(s) = G_2(s)M^*(s)$$

Por lo tanto,

$$M^*(s) = G_1^*(s)E^*(s)$$

o

$$M(z) = G_1(z)E(z)$$

También,

$$E^*(s) = R^*(s) - C^*(s) = R^*(s) - G_2^*(s)M^*(s)$$

o

$$E(z) = R(z) - G_2(z)M(z)$$

Por lo tanto,

$$M(z) = G_1(z)[R(z) - G_2(z)M(z)]$$

de la que se obtiene

$$M(z) = \frac{G_1(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

Como $C(z, m)$ se puede dar como $G_2(z, m)M(z)$, se tiene

$$C(z, m) = G_2(z, m)M(z) = \frac{G_1(z)G_2(z, m)}{1 + G_1(z)G_2(z)}R(z)$$

Apéndice C

Diseño por ubicación de polos cuando la señal de control es un vector

C-1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 6 se presentó la técnica de ubicación de polos y el diseño del observador del estado cuando la señal de control $u(k)$ era un escalar. Sin embargo, si la señal de control es una cantidad vectorial (vector-r), se puede esperar una mejoría en la respuesta característica del sistema porque se tiene más libertad para elegir las señales de control $u_1(k), u_2(k), \ldots, u_r(k)$. Por ejemplo, en el caso de un sistema de orden n con un control escalar, la respuesta de oscilaciones muertas (deadbeat) se puede alcanzar cuando más en n periodos de muestreo. En el caso del control vectorial $\mathbf{u}(k)$, la respuesta de oscilaciones muertas se puede alcanzar en menos de n periodos de muestreo.

Se observa que con el control vectorial es posible escoger en forma libre más de n parámetros; es decir, además de ser capaz de ubicar n polos de lazo cerrado en forma adecuada, se tiene la libertad de satisfacer otros requerimientos, si existen, para el sistema en lazo cerrado.

Sin embargo, en este caso del control vectorial, el cálculo de la matriz de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ se vuelve más compleja, como se verá en este apéndice.

C-2 DISCUSIÓN PRELIMINAR

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{C-1}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n) en el instante de muestreo k

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-r) en el instante de muestreo k

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}$ = matriz de $n \times r$

Se supone que las magnitudes de los r componentes de $\mathbf{u}(k)$ están restringidos. Como en el caso del sistema con señal de control escalar, se puede probar que una condición necesaria y suficiente para ubicar polos en forma arbitraria para el sistema definido por la ecuación (C-1) es que el sistema sea completamente controlable.

Se supone que el sistema definido por la ecuación (C-1) es completamente controlable. En el esquema de retroalimentación del estado, el vector de control $\mathbf{u}(k)$ se escoge como

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \tag{C-2}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de ganancia de retroalimentación del estado, que es una matriz de $r \times n$. Con la retroalimentación del estado el sistema se vuelve un sistema de lazo cerrado y su ecuación de estado se convierte

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k)$$

donde la matriz $\mathbf{K}$ se escoge para que los valores propios de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ sean los polos de lazo cerrado deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Transformación de la ecuación de estado a la forma canónica controlable. Considere el sistema definido por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_1 u(k) \tag{C-3}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)

$u(k)$ = señal de control (escalar)

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}_1$ = matriz de $n \times 1$

Suponga que el sistema es completamente controlable. Entonces la matriz de controlabilidad tiene inversa. Se define

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}_1]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}$$

donde los $\mathbf{f}_i$ son los vectores renglón. Entonces se construye una matriz de transformación $\mathbf{T}_1$ como sigue:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \tag{C-4}$$

donde los $\mathbf{f}_n\mathbf{G}^k$ son los vectores renglón ($k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$). Entonces se puede mostrar que

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{C-5}$$

y

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{C-6}$$

[Vea el problema C-1 para obtener las ecuaciones (C-5) y (C-6).]

Ahora se define

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_1\hat{\mathbf{x}}(k)$$

entonces la ecuación (C-3) se convierte en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_1\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{H}_1 u(k)$$

o

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k) \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{C-7}$$

Por lo tanto, se tiene que la ecuación de estado, ecuación (C-3), se puede transformar en la forma canónica controlable mediante el empleo de la matriz de transformación $\mathbf{T}_1$ definida por la ecuación (C-4).

Pasos de diseño. A continuación se discutirá el procedimiento para determinar la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ tal que los valores propios de $\mathbf{G} - \mathbf{HK}$ estén en los valores deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

La ecuación de estado que se considera a continuación es la dada por la ecuación (C-1):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

Se supone que el rango de la matriz $\mathbf{H}$ de $n \times r$ es r. Esta última ecuación es equivalente a

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{H}_r]\mathbf{u}(k)$$

donde

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{H}_r] = \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ \vdots \\ h_{ni} \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

El procedimiento para diseñar la matriz de ganancia de retroalimentación del estado **K** involucra los siguientes pasos:

Paso 1. Extienda el proceso de transformación [el proceso que transforma la ecuación de estado dada por la ecuación (C-3) en la ecuación de estado en la forma canónica controlable dada por la ecuación (C-7)] al caso donde la matriz **H** es una matriz de $n \times r$. Es decir, la ecuación de estado dada se transforma en la forma canónica controlable mediante el empleo de la matriz de transformación **T**, cuya forma exacta se dará posteriormente. Se define

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

la ecuación de estado original, ecuación (C-1), se puede transformar a

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u}(k) \tag{C-8}$$

donde $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}$ está en la forma canónica controlable y $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}$. (Esta forma canónica controlable es ligeramente diferente a la forma usual, como se verá más adelante.)

Paso 2. Mediante el uso de la matriz de ganancia de retroalimentación del estado **K**, el vector de control puede estar dado por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

y la ecuación de estado del sistema se convierte en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}}(k)$$

La matriz **K** se escoge para que la matriz $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}\mathbf{T}$ tenga los valores propios deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

C-3 DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS

Primero se discutirá la forma como se determina la matriz de transformación **T** para después determinar la matriz de ganancia de retroalimentación del estado **K**.

Considere el sistema completamente controlable definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \tag{C-9}$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)

$\mathrm{u}(k)$ = vector de control (vector-r)

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{H}_r]$ = matriz de $n \times r$

Se supone que el rango de la matriz **H** es r. Por lo tanto, los vectores componentes $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_r$ de la matriz **H** son linealmente independientes, ya que el sistema se supone de estado completamente controlable, el rango de la matriz de controlabilidad de $n \times nr$

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}\mathbf{H} \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

es n. La matriz de controlabilidad se puede escribir en una forma expandida como sigue:

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{H}_r \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{GH}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{GH}_r \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}_r]$$

Se seleccionan n vectores linealmente independientes de la matriz $n \times nr$. Se comienza con el lado izquierdo de la matriz. Ya que los primeros r vectores $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_r$ son linealmente independientes, se seleccionan estos r primeros vectores. Si es así, que tenemos que $r = 1$ son vectores linealmente independientes. Entonces se examina $\mathbf{GH}_1$ para ver si es linealmente independiente de los r vectores escogidos. A continuación se examina $\mathbf{GH}_2, \mathbf{GH}_3, \ldots, \mathbf{GH}_r, \ldots$ en el orden que se muestra en la matriz de controlabilidad expandida hasta que se encuentren n vectores linealmente independientes. (Ya que el rango de la matriz de controlabilidad es n, siempre hay n vectores linealmente independientes.)

Una vez que se seleccionan los n vectores linealmente independientes, se arreglan en la siguiente forma

$$\mathbf{F} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n_1-1}\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{GH}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n_2-1}\mathbf{H}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{H}_r \vdots \mathbf{GH}_r \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n_r-1}\mathbf{H}_r] \tag{C–10}$$

El número n_i se dice ser *invariante de Kronecker* y satisface la ecuación

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

Se define el máximo de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ como $n_{\min}$:

$$n_{\min} = \max(n_1, n_2, \ldots, n_r) \tag{C-11}$$

Se hará referencia a esta ecuación en la discusión de la respuesta de oscilaciones muertas. A continuación se calcula $\mathbf{F}^{-1}$ y se define el vector renglón η_i como $\mathbf{f}_i$, donde

$$\eta_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

Entonces la matriz de transformación $\mathbf{T}$ requerida se puede dar como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_r \end{bmatrix}^{-1} \tag{C–12}$$

donde

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_i\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i\mathbf{G}^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz de transformación $\mathbf{T}$ dada por la ecuación (C-12) es una extensión de la matriz de transformación dada por la ecuación (C-4).

Para simplificar la presentación, ahora se considerará un caso simple donde $n = 4$ y $r = 2$. (En este caso, sólo n_1 y n_2 están involucradas.) (La extensión a casos más generales es directa.) Entonces la matriz de transformación $\mathbf{T}$ se convierte en una matriz de 4×4. La matriz de transformación $\mathbf{T}$ dada por la ecuación (C-12) se convierte en

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G}^{n_1-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_2\mathbf{G}^{n_2-1} \end{bmatrix}$$

(observe que en el caso de $n = 4$ existen tres posibilidades para las combinaciones n_1 y n_2: $n_1 = 1$, $n_2 = 3$; $n_1 = 2$, $n_2 = 2$; y $n_1 = 3$, $n_2 = 1$. Por ejemplo, si $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, entonces las matrices $\hat{\mathbf{G}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$ se convierten, respectivamente, en

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{array}\right], \quad \text{si } n_1 = 2, n_2 = 2 \tag{C-13}$$

y

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{si } n_1 = 2, n_2 = 2 \\ \text{(Nota: } b_{12} = \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_2 = 0 \text{ en este caso)} \end{array} \tag{C-14}$$

véase el problema C-2). Como otro ejemplo, si $n_1 = 3$ y $n_2 = 1$, entonces

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ \hdashline -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{array}\right], \quad \text{si } n_1 = 3, n_2 = 1 \tag{C-15}$$

y

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 1 \quad b_{12} \\ \hdashline 0 \quad 1 \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} \text{si } n_1 = 3, n_2 = 1 \\ \text{(Nota: } b_{12} = \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_2 \text{ puede o no ser cero)} \end{array} \tag{C-16}$$

(vea el problema C-4). A continuación, se tratará el caso donde $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$. (Otros casos se pueden manejar de forma similar. Por ejemplo, para el caso donde $n_1 = 3$ y $n_2 = 1$, véanse los problema C-3, C-4 y C-5.) Para este caso donde $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, la matriz $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}$ puede estar dada por la ecuación (C-13) y la ecuación característica es

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| &= \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ a_{11} & z + a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & z & -1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & z + a_{24} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} z & -1 \\ a_{11} & z + a_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z & -1 \\ a_{23} & z + a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & -1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ z & -1 \end{vmatrix} \\ &= (z^2 + a_{12}z + a_{11})(z^2 + a_{24}z + a_{23}) - (a_{22}z + a_{21})(a_{14}z + a_{13}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C-17}$$

donde se ha utilizado la expansión de Laplace en menores. (Véase el apéndice A para los detalles.) De la ecuación (C-17) la ecuación característica $|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = 0$ se convierte en

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z^2 + a_{12}z + a_{11} & a_{14}z + a_{13} \\ a_{22}z + a_{21} & z^2 + a_{24}z + a_{23} \end{vmatrix} = 0 \tag{C-18}$$

Los valores propios de $\hat{\mathbf{G}}$ se pueden determinar al resolver la ecuación característica.

A continuación, se determinará la matriz de ganancia de retroalimentación $\mathbf{K}$ para que los valores propios de $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{K}$ sean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Se define la matriz $\mathbf{B}$ de 2×2 tal que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(Observe que b_{12} es una constante que aparece en la matriz $\hat{\mathbf{H}}$.) En el caso particular donde $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, el valor de b_{12} es igual a 0. Por lo tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$. Para casos más generales, la matriz $\mathbf{B}$ puede no ser la matriz identidad.

También, se define la matriz Δ de 2×4 como

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix} \tag{C-19}$$

Entonces se verá que la matriz $\mathbf{K}$ se puede dar por

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{\Delta}\mathbf{T}^{-1}$$

y el vector de control $\mathbf{u}(k)$ puede estar dado por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{B}\mathbf{\Delta}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{B}\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Por lo tanto, la ecuación del sistema dada por el ecuación (C-8) se convierte en

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}(k) = (\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\mathbf{\Delta})\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Para el caso presente, la matriz $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\mathbf{\Delta}$ se convierte en:

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{11} - \delta_{11} & -a_{12} - \delta_{12} & -a_{13} - \delta_{13} & -a_{14} - \delta_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{21} - \delta_{21} & -a_{22} - \delta_{22} & -a_{23} - \delta_{23} & -a_{24} - \delta_{24} \end{bmatrix}$$

Entonces, en referencia a la ecuación (C-18), la ecuación característica $|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta|$ se convierte en

$$\begin{aligned}|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| &= \left|\begin{array}{c|c} z^2 + (a_{12} + \delta_{12})z + a_{11} + \delta_{11} & (a_{14} + \delta_{14})z + a_{13} + \delta_{13} \\ \hline (a_{22} + \delta_{22})z + a_{21} + \delta_{21} & z^2 + (a_{24} + \delta_{24})z + a_{23} + \delta_{23} \end{array}\right| \\ &= [z^2 + (a_{12} + \delta_{12})z + a_{11} + \delta_{11}][z^2 + (a_{24} + \delta_{24})z + a_{23} + \delta_{23}] \\ &\quad - [(a_{14} + \delta_{14})z + a_{13} + \delta_{13}][(a_{22} + \delta_{22})z + a_{21} + \delta_{21}] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C-20}$$

Se quiere que los valores propios de $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta$ sean μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4, o la ecuación característica deseada sea

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2)(z - \mu_3)(z - \mu_4) = z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4 = 0 \tag{C-21}$$

Si se igualan los coeficientes de potencias iguales de las dos ecuaciones características, las ecuaciones (C-20) y (C-21), se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a_{12} + \delta_{12} + a_{24} + \delta_{24} &= \alpha_1 \\ a_{11} + \delta_{11} + (a_{12} + \delta_{12})(a_{24} + \delta_{24}) + a_{23} + \delta_{23} - (a_{14} + \delta_{14})(a_{22} + \delta_{22}) &= \alpha_2 \\ (a_{11} + \delta_{11})(a_{24} + \delta_{24}) + (a_{12} + \delta_{12})(a_{23} + \delta_{23}) & \\ - (a_{13} + \delta_{13})(a_{22} + \delta_{22}) - (a_{21} + \delta_{21})(a_{14} + \delta_{14}) &= \alpha_3 \\ (a_{11} + \delta_{11})(a_{23} + \delta_{23}) - (a_{13} + \delta_{13})(a_{21} + \delta_{21}) &= \alpha_4 \end{aligned}$$

Observe que hay ocho variables δ y cuatro ecuaciones. Por lo tanto, los valores δ_{11}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, δ_{21}, δ_{22}, δ_{23}, y δ_{24} no pueden ser determinados en forma única. Existen muchos conjuntos posibles de valores para δ_{11}, δ_{12}, . . . , δ_{24} y por lo tanto, la matriz Δ no es única. Cualquier matriz Δ cuyos elementos satisfagan las cuatro ecuaciones anteriores es aceptable.

Una vez que la matriz Δ se selecciona, la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ está dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}$$

y el vector de control de retroalimentación del estado es

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k)$$

y la ecuación de estado dada por la ecuación (C-9) se convierte en

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1})\mathbf{x}(k)$$

Para continuar, observe que

$$|\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}| = |\mathbf{T}^{-1}|\,|\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}|\,|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B}\Delta| = |\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta|$$

Para un conjunto de valores propios deseados μ_1, μ_2, . . . , μ_n, se tiene los coeficientes correspondientes α_1, α_2, . . . , α_n en la ecuación característica $|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = 0$. Para un valor dado de α_1, α_2, . . . , α_n es posible escoger la matriz Δ que no es única. (Esto significa que se tiene cierta libertad para satisfacer otros requerimientos, si existen.)

Si se desea una respuesta de oscilaciones muertas, se requiere que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. La ecuación característica deseada dada por la ecuación (C-21) se convierte en

$$z^4 = 0$$

Observe que se escoge, por ejemplo,

$$\Delta = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ * & * & -a_{23} & -a_{24} \end{bmatrix} \tag{C-22}$$

donde los elementos indicados por el asterisco son constantes arbitrarias, entonces $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta$ se convierte en

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ ** & ** & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los elementos indicados por el asterisco doble son constantes arbitrarias.

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ** & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ** & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ** & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, se obtiene la respuesta de oscilaciones muertas. La matriz Δ dada por la ecuación (C-22) no es única porque diferentes selecciones de elementos producirán la respuesta de oscilaciones muertas. Por lo tanto, existe más de una matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ que produce la respuesta de oscilaciones muertas. Esto era de esperarse, ya que hay dos señales de control $u_1(k)$ y $u_2(k)$ disponibles, en lugar de una sola señal de control.

Es importante señalar que si se selecciona a

$$\Delta = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{bmatrix} \tag{C-23}$$

entonces

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^2 = \mathbf{0}$$

Por lo tanto $(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k$ se hace cero para $k = 2, 3, 4, \ldots$. La respuesta de oscilaciones muertas se alcanza en dos periodos de muestreo. De hecho, en general, al escoger los elementos de Δ en la manera dada por la ecuación (C-23), la respuesta de oscilaciones muertas se puede alcanzar en $n_{\min}$ pasos en lugar de n pasos, donde

$$n_{\min} = \max(n_1, n_2, \ldots, n_r)$$

Ya que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, se observa que $n_{\min}$ siempre es menor que n.

Extensión al caso más general. Se ha dado una discusión detallada para el caso donde $n = 4$ ($n_1 = n_2 = 2$) y $r = 2$. La extensión de la discusión anterior al caso más general es directa. Por ejemplo, considere el caso cuando $n = 6$ y $r = 3$. Para este caso,

$$n_1 + n_2 + n_3 = 6$$

y se tienen varias combinaciones de n_1, n_2 y n_3.

Ahora considere el caso donde $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, y $n_3 = 1$. La matriz de controlabilidad $\mathbf{F}$ modificada para este caso es

$$\mathbf{F} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{H}_3]$$

Se define

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} *\,*\,* \\ \hline *\,*\,* \\ \hline \mathbf{f}_1 \\ \hline *\,*\,* \\ \hline \mathbf{f}_2 \\ \hline \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \}n_1 = 3 \\ \\ \\ \}n_2 = 2 \\ \}n_3 = 1 \end{matrix}$$

donde un renglón de asteriscos denota un vector renglón. Entonces la matriz de transformación $\mathbf{T}$ se puede formar como sigue:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \hline \mathbf{S}_2 \\ \hline \mathbf{S}_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_1\mathbf{G} \\ \hline \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \hline \mathbf{f}_2\mathbf{G} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_3 = \mathbf{f}_3$$

Entonces las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ tendrán las formas siguientes:

$$\hat{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \\ \hline -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} & -a_{35} & -a_{36} \end{array}\right]$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_{12} & b_{13} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $b_{12} = \mathbf{f}_1 \mathbf{G}^2 \mathbf{H}_2$, $b_{13} = \mathbf{f}_1 \mathbf{G}^2 \mathbf{H}_3$, y $b_{23} = \mathbf{f}_2 \mathbf{G}\mathbf{H}_3$. Estos valores pueden o no ser cero. (Observe que en la matriz $\hat{\mathbf{G}}$ los menores principales están en la forma canónica controlable.) La matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ está dada como sigue:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

y

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El efecto de postmultiplicar la matriz $\mathbf{B}$ por $\hat{\mathbf{H}}$ es eliminar a b_{ij} del producto de matrices $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}$.

Observe que si $\mathbf{u}(k)$ es un vector-r la forma general de la matriz $\mathbf{B}$ es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{C-24}$$

donde las constantes b_{ij} son aquellas que aparecen en la matriz $\hat{\mathbf{H}}$ de $n \times r$. (Los elementos de $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}$ son 0 o 1.)

Ejemplo C-1

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

donde

$$\mathbf{x}(k) = \text{vector de estado (vector-3)}$$
$$\mathbf{u}(k) = \text{vector de control (vector-2)}$$

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se desea determinar la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ para que la respuesta al estado inicial $\mathbf{x}(0)$ sea de oscilaciones muertas. Observe que con la retroalimentación del estado $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, la ecuación del sistema se convierte en

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})\mathbf{x}(k) \tag{C-25}$$

Primero se examinará la matriz de controlabilidad:

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}] = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{GH}_2 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_2]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0.5 & -0.25 & 0.25 & -0.125 \end{bmatrix}$$

Es claro que, el rango de esta matriz de controlabilidad es 3. Por lo tanto, la ubicación arbitraria de los polos es posible. Ahora se escogen tres vectores linealmente independientes comenzando desde el lado izquierdo. Estos vectores se muestran encerrados entre líneas punteadas. (Los tres vectores linealmente independientes se escogen como $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, y $\mathbf{GH}_1$.) Ahora se reacomodan estos tres vectores de acuerdo a la ecuación (C-10) y se define la matriz $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{H}_2]$$

Se observa que $n_1 = 2$ y $n_2 = 1$.

Al rescribir la matriz $\mathbf{F}$, se tiene

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de $\mathbf{F}$ es

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se define el vector renglón η_i de $\mathbf{F}^{-1}$ como $\mathbf{f}_i$, donde $\eta_1 = n_1$ y $\eta_2 = n_1 + n_2$. Ya que $n_1 = 2$ y $n_2 = 1$, los vectores $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son el segundo y tercer vectores renglón, respectivamente. Es decir,

$$\mathbf{f}_1 = [0 \quad 1 \quad 0]$$
$$\mathbf{f}_2 = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Ahora, se define la matriz de transformación $\mathbf{T}$ como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \hline \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_1\mathbf{G} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \mathbf{f}_2$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz de transformación $\mathbf{T}$, se define

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Entonces

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \hat{\mathbf{G}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

También,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora, se determina la matriz de ganancia de retroalimentación de estado $\mathbf{K}$, donde

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}$$

De la ecuación (C-24), la matriz $\mathbf{B}$ para este caso es una matriz de 2×2. Al observar que $b_{12} = 0$, se tiene

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para este caso, Δ es una matriz de 2×3:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \end{bmatrix}$$

Ahora se determina la matriz $\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta$:

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\delta_{11} & 0.5 - \delta_{12} & -0.25 - \delta_{13} \\ 1 - \delta_{21} & -\delta_{22} & -\delta_{23} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica $|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = 0$ está dada como sigue:

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ \delta_{11} & z - 0.5 + \delta_{12} & 0.25 + \delta_{13} \\ -1 + \delta_{21} & \delta_{22} & z + \delta_{23} \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

Como se desea la respuesta de oscilaciones muertas, la ecuación característica deseada es

$$z^3 = 0$$

Observe que la selección de las δ no es única y la matriz Δ no es única. Suponga que se escogen las δ tal que

$$\delta_{11} = 0, \quad \delta_{12} = 0.5, \quad \delta_{13} = -0.25$$
$$\delta_{21} = 1, \quad \delta_{22} = 0, \quad \delta_{23} = 0$$

Entonces

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = z^3 = 0$$

y por lo tanto

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es aceptable. Entonces la matriz $\mathbf{K}$ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la selección de la matriz $\mathbf{K}$, $(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k = 0$ para $k \geq n_{\min}$, donde

$$n_{\min} = \max(n_1, n_2) = \max(2, 1) = 2$$

De hecho,

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k = \mathbf{0}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Observe que

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B}\Delta = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{T}$$

Con referencia a la ecuación (C-25) y su solución $\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})^k\,\mathbf{x}(0)$, se tiene que $\mathbf{x}(k) = 0$ para $k = 2, 3, 4, \ldots$, ya que

$$\mathbf{G} - \mathbf{HK} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)\mathbf{T}^{-1}$$

$$(\mathbf{G} - \mathbf{HK})^2 = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^2\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{0}$$

y

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^k\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \qquad k = 2, 3, 4 \ldots$$

Por lo tanto, se ha diseñado la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ para que la respuesta del sistema al estado inicial $\mathbf{x}(0)$ sea de oscilaciones muertas. El estado $\mathbf{x}(k)$ se puede transferir al origen a lo máximo en dos periodos de muestreo. [Observe que si la señal de control $u(k)$ fuera un escalar entonces se podrían tomar a lo más tres periodos de muestreo, en lugar de los dos periodos de muestreo, para la respuesta de oscilaciones muertas.]

PROBLEMAS DE EJEMPLO Y SOLUCIONES

Problema C-1

Considere el sistema dado por

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_1 u(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-n)

$u(k)$ = señal de control (escalar)

$\mathbf{G}$ = matriz de $n \times n$

$\mathbf{H}_1$ = matriz de $n \times 1$

Suponga que el sistema es de estado completamente controlable.

Se define

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}_1]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{f}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) son vectores renglón. También se define

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Muestre que

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{C-26}$$

y

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{C-27}$$

donde a_i son los coeficientes que aparecen en el polinomio característico de $\mathbf{G}$, o

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

Solución Se probarán las ecuaciones (C-26) y (C-27) para el caso donde $n = 3$. (Las extensión para un número entero positivo arbitrario n es directa.) Por lo tanto, se obtendrá que

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{C-28}$$

Ya que

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}$$

es posible rescribir la ecuación (C-28) como sigue:

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} \tag{C-29}$$

Ahora considere la transpuesta conjugada del lado derecho de la ecuación (C-29). Al observar que para sistemas físicos los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ del polinomio característico son reales, se tiene

$$[\mathbf{f}_3^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^* \vdots -a_3\mathbf{f}_3^* - a_2\mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* - a_1(\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^*]$$

Observe que $\mathbf{G}^*$ satisface su propia ecuación característica:

$$\phi(\mathbf{G}^*) = (\mathbf{G}^*)^3 + a_1(\mathbf{G}^*)^2 + a_2\mathbf{G}^* + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto,

$$-[a_3\mathbf{I} + a_2\mathbf{G}^* + a_1(\mathbf{G}^*)^2]\mathbf{f}_3^* = (\mathbf{G}^*)^3\mathbf{f}_3^*$$

En consecuencia,

$$[\mathbf{f}_3^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^3\mathbf{f}_3^*] = \mathbf{G}^*[\mathbf{f}_3^* \vdots \mathbf{G}^*\mathbf{f}_3^* \vdots (\mathbf{G}^*)^2\mathbf{f}_3^*]$$

Al tomar la transpuesta conjugada de ambos lados de esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} \mathbf{G} = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}$$

la cual es la ecuación (C-29). Por lo tanto, se ha mostrado que la ecuación (C-28) es cierta, o

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

A continuación se mostrará que

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ya que

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1]$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_3\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{f}_3\mathbf{H}_1 = 0, \qquad \mathbf{f}_3\mathbf{G}\mathbf{H}_1 = 0, \qquad \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 = 1$$

Al emplear estas ecuaciones, se obtiene

$$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3\mathbf{H}_1 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}\mathbf{H}_1 \\ \mathbf{f}_3\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que la extensión de lo presentado aquí al caso de un número positivo arbitrario n se puede hacer fácilmente.

Problema C-2

Considere el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector -4)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-2)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con referencia a la ecuación (C-10), se obtiene la matriz **F**. Entonces, al emplear la matriz de transformación **T** definida por la ecuación (C-12), se determinan las matrices $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{GT}$ y $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}$. Por último, obtenga la ecuación (C-14).

Solución Primero se escribirá la matriz de controlabilidad como sigue:

$$[\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{GH}_2 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}_2]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora se escogen cuatro vectores linealmente independientes de esta matriz de 4×8, comenzando desde el extremo izquierdo. (Estos vectores se muestran encerrados por líneas punteadas.) Los cuatro vectores linealmente independientes son $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{GH}_1$ y $\mathbf{GH}_2$. A continuación se arreglan estos cuatro vectores de acuerdo con la ecuación (C-10) y se define la matriz **F** como sigue:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{GH}_2]$$

(Observe que en este caso $n_1 = 22$ y $n_2 = 2$.) Por lo tanto,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz está dada por

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Como en este caso $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, el segundo vector renglón de $\mathbf{F}^{-1}$ se define como $\mathbf{f}_1$ y el cuarto vector renglón como $\mathbf{f}_2$. Entonces

$$\mathbf{f}_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{f}_2 = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]$$

La matriz de transformación **T** está dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \hline \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_1\mathbf{G} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \hline \mathbf{f}_2\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz de transformación $\mathbf{T}$ se obtiene

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que, cuando $n_1 = n_2 = 2$, la matriz $\hat{\mathbf{G}}$ tiene la forma dada por la ecuación (C-13) y la matriz $\hat{\mathbf{H}}$ tiene la forma dada por la ecuación (C-14), o bien

$$\hat{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{array}\right], \qquad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Observe que, en este caso, b_{12} es cero.)

Finalmente, se obtendrá la ecuación (C-14). Observe que

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}[\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{G}\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{G}\mathbf{H}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{m}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{m}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_2\mathbf{H}_2 & \mathbf{m}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ son el primero y tercer vector renglón de $\mathbf{F}^{-1}$, respectivamente. Como $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}$ es una matriz identidad, se tiene que $\mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 = 0$, $\mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_1 = 1$, $\mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 = 0$, $\mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_1 = 0$, y $\mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_2 = 1$. Por lo tanto, tenemos

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{G} \end{bmatrix}[\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la ecuación (C-14).

Problema C-3

Considere el sistema definido por la ecuación (C-8):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}u(k) = \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}u(k)$$

donde la matriz de transformación $\mathbf{T}$ está definida por la ecuación (C-12). Suponga que la matriz $\hat{\mathbf{G}}$ está dada por la ecuación (C-15) y la matriz $\hat{\mathbf{H}}$ está dada por la ecuación (C-16). Es decir,

$$\hat{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ \hline -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{array}\right], \qquad \hat{\mathbf{H}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Muestre que

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z^3 + a_{13}z^2 + a_{12}z + a_{11} & a_{14} \\ a_{23}z^2 + a_{22}z + a_{21} & z + a_{24} \end{vmatrix}$$

y

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{11} - \delta_{11} & -a_{12} - \delta_{12} & -a_{13} - \delta_{13} & -a_{14} - \delta_{14} \\ -a_{21} - \delta_{21} & -a_{22} - \delta_{22} & -a_{23} - \delta_{23} & -a_{24} - \delta_{24} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \qquad \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

También muestre que si se escoge, por ejemplo,

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ * & * & * & -a_{24} \end{bmatrix} \tag{C-30}$$

donde los elementos mostrados con asterisco son constantes arbitrarias, el sistema presentará una respuesta de oscilaciones muertas para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$; es decir,

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^k = \mathbf{0}, \qquad k = 4, 5, 6, \ldots$$

También muestre que si se escoge

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{bmatrix} \tag{C-31}$$

Entonces

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^k = \mathbf{0}$$

para $k \geq n_{\min}$ donde

$$n_{\min} = \max(n_1, n_2) = \max(3, 1) = 3$$

Solución Para el caso donde la matriz $\hat{\mathbf{G}}$ está dada por la ecuación (C-15), se tiene

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & z + a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & z + a_{24} \end{vmatrix}$$

Al expandir este determinante empleando la fórmula de expansión de Laplace, se obtiene

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z + a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & z + a_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & -1 \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a_{23} & z + a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & -1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ z + a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$$

$$= (z + a_{24})(z^3 + a_{13}z^2 + a_{12}z + a_{11}) - a_{14}(a_{23}z^2 + a_{22}z + a_{21})$$

Por lo tanto, el determinante $|z\mathbf{I} - \mathbf{G}|$ se puede escribir como:

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}| = \begin{vmatrix} z^3 + a_{13}z^2 + a_{12}z + a_{11} & a_{14} \\ a_{23}z^2 + a_{22}z + a_{21} & z + a_{24} \end{vmatrix} \tag{C-32}$$

Luego se calcula

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

(Observe que el efecto de postmultiplicar la matriz $\hat{\mathbf{H}}$ por la matriz $\mathbf{B}$ es eliminar b_{12} del producto $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}$.)
Por lo tanto

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{11} - \delta_{11} & -a_{12} - \delta_{12} & -a_{13} - \delta_{13} & -a_{14} - \delta_{14} \\ -a_{21} - \delta_{21} & -a_{22} - \delta_{22} & -a_{23} - \delta_{23} & -a_{24} - \delta_{24} \end{bmatrix}$$

Si se escoge $\boldsymbol{\Delta}$ como la de la ecuación (C-30), entonces

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

donde los elementos mostrados con asterisco son constantes arbitrarias. Observe que

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(k) = (\mathbf{G} - \mathbf{HK})^k \mathbf{x}(0) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \qquad k \geq 4$$

Se ha visto que la respuesta de oscilaciones muertas se alcanza al escoger Δ como la dada por la ecuación (C-30).

Sin embargo, si se escoge Δ como la de la ecuación (C-31), entonces la respuesta de oscilaciones muertas se puede alcanzar en a lo más tres periodos de muestreo, porque los asteriscos que aparecen en $(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^3$ se convierten en cero y

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \qquad k \geq n_{\min} = 3$$

Problema C-4

Considere el sistema siguiente:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

donde

$\mathbf{x}(k)$ = vector de estado (vector-4)

$\mathbf{u}(k)$ = vector de control (vector-2)

y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al emplear el control por retroalimentación del estado $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, se desea ubicar los polos de lazo cerrado en los siguientes puntos:

$$z_1 = 0.5 + j0.5, \qquad z_2 = 0.5 - j0.5$$

$$z_3 = -0.2, \qquad z_4 = -0.8$$

Determine la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ requerida. Entonces, mediante las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dadas, obtenga la ecuación (C-16).

Solución Primero se examinará la matriz de controlabilidad:

$$[\mathbf{H} \vdots \mathbf{GH} \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H} \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}] = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{GH}_2 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_2 \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{G}^3\mathbf{H}_2]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 8 & -3 & -22 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 15 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \text{(C-33)}$$

El rango de esta matriz de controlabilidad es 4. Por lo tanto, la ubicación arbitraria de polos es posible. Se escogen cuatro vectores linealmente independientes comenzando desde el extremo izquierdo. (Estos vectores se muestran encerrados en líneas punteadas.) Los cuatro vectores linealmente independientes se escogen como $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{GH}_1$ y $\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1$. Ahora estos cuatro vectores se rearreglan de acuerdo con la ecuación (C-10) y la matriz $\mathbf{F}$ se define como sigue:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{GH}_1 \vdots \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \vdots \mathbf{H}_2]$$

Se observa que, en este caso, $n_1 = 3$ y $n_2 = 1$. Al rescribir la matriz $\mathbf{F}$, se tiene

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hdashline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]$$

Luego, se calcula $\mathbf{F}^{-1}$. Con referencia al apéndice A, se tiene

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(El mismo resultado se puede obtener fácilmente con MATLAB.) Como $n_1 = 3$ y $n_2 = 1$, se escoge el tercer vector como $\mathbf{f}_1$ y el cuarto como $\mathbf{f}_2$. (Observe que el vector renglón se define como η_i, donde $\eta_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$, como $\mathbf{f}_i$.) Es decir,

$$\mathbf{f}_1 = [0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad -\tfrac{1}{3}]$$

$$\mathbf{f}_2 = [1 \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad -\tfrac{2}{3}]$$

La matriz de transformación $\mathbf{T}$ se define como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = [\mathbf{f}_2]$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz de transformación $\mathbf{T}$, si se define

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

entonces

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \tag{C–34}$$

También

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] \tag{C–35}$$

Ahora se determina la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$, donde

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1}$$

Con referencia a la ecuación (C-24) y al notar que, en este caso, $b_{12} = 0$, la matriz **B** es una matriz de 2 × 2 dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C-36}$$

Para este caso, Δ es una matriz de 2 × 4:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\delta_{11} & 3 - \delta_{12} & -2 - \delta_{13} & 1 - \delta_{14} \\ \hdashline 2 - \delta_{21} & -\delta_{22} & -\delta_{23} & -1 - \delta_{24} \end{array}\right]$$

Con referencia a la ecuación (C-32), se tiene

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = \left|\begin{array}{c:c} z^3 + (2 + \delta_{13})z^2 + (-3 + \delta_{12})z + \delta_{11} & -1 + \delta_{14} \\ \hdashline \delta_{23}z^2 + \delta_{22}z + (-2 + \delta_{21}) & z + 1 + \delta_{24} \end{array}\right| = 0$$

Esta ecuación característica debe ser igual a la ecuación característica deseada, que es

$$(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5)(z + 0.2)(z + 0.8) = z^4 - 0.34z^2 + 0.34z + 0.08 = 0$$

Si se igualan los coeficientes de potencias iguales de z de las dos ecuaciones características, se tendrán cuatro ecuaciones para determinar las ocho δ. Por lo tanto, la matriz Δ no es única. Suponga que se escogen en forma arbitraria

$$\delta_{14} = 0, \qquad \delta_{22} = 0, \qquad \delta_{23} = 0, \qquad \delta_{24} = -1$$

Entonces

$$|z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta| = z^4 + (2 + \delta_{13})z^3 + (-3 + \delta_{12})z^2 + \delta_{11}z - 2 + \delta_{21} = 0$$

Al igualar la ecuación característica con la ecuación característica deseada, se tiene

$$\delta_{11} = 0.34$$

$$\delta_{12} = 2.66$$

$$\delta_{13} = -2$$

$$\delta_{21} = 2.08$$

Por lo tanto,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.34 & 2.66 & -2 & 0 \\ 2.08 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz **K** se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2.1067 & 0.7800 & 0.1067 \\ -1 & 0.02667 & 0.3600 & -0.02667 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz **K**, el control por retroalimentación del estado

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

colocará los polos de lazo cerrado en $z_1 = 0.5 + j0.5$, $z_2 = 0.5 - j0.5$, $z_3 = -0.2$ y $z_4 = -0.8$. Se observa que la matriz $\mathbf{K}$ no es única; existen muchas posibles matrices para $\mathbf{K}$.

Por último, se obtiene la ecuación (C-16). Observe que

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{GH}_1 \quad \mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_1\mathbf{GH}_1 & \mathbf{m}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_1\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{m}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_2\mathbf{GH}_1 & \mathbf{m}_2\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 & \mathbf{m}_2\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{GH}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{GH}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ son el primero y segundo vectores renglón de $\mathbf{F}^{-1}$, respectivamente. Como $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}$ es la matriz identidad, $\mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 = 0$, $\mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{f}_1\mathbf{GH}_1 = 0$, $\mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 = 0$ y $\mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 = 1$. De la ecuación (C-33) se observa que $\mathbf{GH}_2$ es linealmente dependiente de $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, y $\mathbf{GH}_1$. Por lo tanto, $\mathbf{f}_1\mathbf{GH}_2 = \alpha\mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 + \beta\mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 + \gamma\mathbf{f}_1\mathbf{GH}_1 = 0$, donde α, β, y γ son constantes. Observe que $\mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_2$ puede o no ser cero. En consecuencia,

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{GH}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{GH}_2 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{f}_2\mathbf{H}_1 & \mathbf{f}_2\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $b_{12} = \mathbf{f}_1\mathbf{G}^2\mathbf{H}_2$. Esta última ecuación es la ecuación (C-16).

Problema C-5

Con referencia al problema C-4, considere el mismo sistema. Suponga que se desea una respuesta de oscilaciones muertas para un estado inicial arbitrario $\mathbf{x}(0)$. Determine la matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$.

Solución Con referencia a las ecuaciones (C-34), (C-35), y (C-36), se tiene

$$\hat{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \qquad \hat{\mathbf{H}} = \left[\begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \\ \hdashline 0 \quad 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde b_{12} es cero. Para la respuesta de oscilaciones muertas, se escoge Δ como sigue:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} se definen como en la ecuación (C-15). Entonces

$$\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y se encuentra

$$(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}\Delta)^k = \mathbf{0}, \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

La respuesta de oscilaciones muertas se alcanza en a lo más tres periodos de muestreo. [Observe que en este problema $n_1 = 3$ y $n_2 = 1$. Por lo tanto, $n_{\min} = \max(n_1, n\text{-}2) = 3$.] La matriz de ganancia de retroalimentación del estado $\mathbf{K}$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{B}\Delta\mathbf{T}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Con esta matriz $\mathbf{K}$, el control por retroalimentación del estado

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

colocará los polos de lazo cerrado en el origen y, por lo tanto, producirá la respuesta de oscilaciones muertas para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Bibliografía

A-1. Antoniou, A., *Digital Filters: Analysis and Design.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1979.

A-2. Aseltine, J. A., *Transform Method in Linear System Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1958.

A-3. Åström, K. J. y B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1984.

B-1. Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1960.

B-2. *Bristol, E. H., "Design and Programming Control Algorithms for DDC Systems," Control Engineering, 24, Enero de 1977, pp. 24-26.*

B-3. Butman, S, y *R. Sivan (Sussman), "On Cancellations, Controllability and Observability," IEEE Trans. Automatic Control,* **AC-9** (1964), pp. 317-18.

C-1. Cadzow, J. A. y H. R. Martens, *Discrete-Time and Computer Control Systems.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1970.

C-2. Chan, S. W., G. C. Goodwin y K. S. Sin, "Convergence Properties of the Riccati Difference Equation in Optimal Filtering of Nonstabilizable Systems," *IEEE Trans. Automatic Control,* **AC-29** (1984), pp. 110-18.

C-3. Churchill, R. V. y J. W. Brown, *Complex Variables and Applications,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

D-1. Dorato, P. y A. H. Levis "Optimal Linear Regulators: The Discrete-Time Case," *IEEE Trans. Automatic Control,* **AC-16** (1971), pp. 613-20.

E-1. Evans, W. R., "Control System Synthesis by Root Locus Method," *AIEE Trans. Part II.* 69 (1950), pp. 66-69.

F-1. Falb, P. L. y M. Athans, "A direct Constructive Proof of the Criterion for Complete Controllability of Time-Invariant Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control.* **AC-9** (1964), pp. 189-90.

F-2. Fortmann, T. E., "A Matrix Inversion Identity," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-15** (1970), p. 599.

F-3. Franklin, G. F., J. D. Powell y M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1990.

F-4. Freeman, H., *Discrete-Time Systems*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

G-1. Gantmacher, F. R., *Theory of Matrices*, Vols. I and II. Nueva York: Chelsea Publishing Co., Inc., 1959.

G-2. Gopinath, B., "On the Control of Linear Multiple Input-Output Systems," *Bell Syst. Tech. J.*, **50** (1971), pp. 1063-81.

H-1. Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1963.

H-2. Halmos, P. R., *Finite Dimensional Vector Spaces*. Princeton, N. J.: D. Van Nostrand Company, 1958.

I-1. Ichikawa, K., *Theory for Design of Control Systems* (in Japanese). Tokyo: Gijutsu-Shoin, 1989.

J-1. Jerry, A. J., "The Shannon Sampling Theorem —Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review," *Proc. IEEE*, **65** (1977), pp. 1565-95.

J-2. Jury, E. I., "Hidden Oscillations in Sampled-Data Control Systems," *AIEE Trans. Part II*, **75** (1956), pp. 391-95.

J-3. Jury, E. I., *Sampled-Data Control Systems*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

J-4. Jury, E. I., "Sampling Schemesin Sampled-Data Control Systems," *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-6** (1961), pp. 88-90.

J-5. Jury, E. I., *Theory and Applications of the z Transform Method.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1964.

J-6. Jury, E. I., "A General z-Transform Formula for Sampled-Data Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-12** (1967), pp. 606-8.

J-7. Jury, E. I., "Sampled-Data Systems, Revisited: Reflections, Recollections, and Reassessments," *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102** (1980), pp. 208-16.

J-8. Jury, E. I. y J. Blanchard, "A Stability Test for Linear Discrete-Time Systems in Table Forms," Proc. IRE, **49** (1961), pp. 1947-48.

K-1. Kailath, T., *Linear Systems*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1980.

K-2. Kailath, T., y P. Frost, "An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part II: Linear Smoothing in Additive White Noise," *IEEE Trans. Automatic Control,* **AC-13** (1968), pp. 655-60.

K-3. Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960. *Automatic and Remote Control.* Londres: Butterworth & Co., Ltd., 1961, pp. 481-92.

K-4. Kalman, R. E. I J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the Second Method of Liapunov: I. Continuous-Time Systems; II. Discrete-Time Systems," *ASME J. Basic Engineering, ser.* **D, 82** (1960), pp. 371-93, 394-400.

K-5. Kalman, R. E., Y. C. Ho y K. S., Narendra, "Controllability of Linear Dynamical Systems," *Contributions to Differential Equations*, **1** (1963), pp. 189-213.

K-6. Kanai, K. y N. Hori, *Introduction to Digital Control Systems* (in Japanese), Tokyo: Maki Shoten, 1992.

K-7. Katz, P., *Digital Control Using Microprocessors*. Londres: Prentice Hall International, Inc., 1981.

K-8. Kreindler, E. y P. E. Sarachik, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control, AC-9* (1964), pp. 129-36.

K-9. Kuo B. C., *Digital Control Systems*. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.

L-1. LaSalle, J. P. y S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Nueva York: Academic Press, Inc., 1961.

L-2. Lee, E. B. y L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.

L-3. Leondes, C. T. y M. Novak, "Reduced-Order Observers for Linear Discrete-Time Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-19** (1974), pp. 42-46.

L-4. Li, Y. T., J. L. Meiry y R. E. Curry, "On the Ideal Sampler Approximation," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-17** (1972), pp. 167-68.

L-5. Luenberger, D. G., "Observing the State of a Linear Systems," *IEEE Trans. Military Electronics*, MIL-8 (1964), pp. 74-80.

L-6. Luenberger, D. G., "An Introduction to Observers," *IEEE Trans. Automátic Control*, **AC-16** (1971), pp. 596-602.

M-1. Melsa, J. L. y D. G. Schultz, *Linear Control Systems*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

M-2. Middleton, R. H. y G. C. Goodwin, *Digital Control and Estimation—A Unifled Approach*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1990.

M-3. Mitra, S. K. y R. J. Sherwood, "Canonic Realizations, of Digital Filters Using the Continued Fraction Expansion," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, NAU-20 (1972), pp. 185-94.

M-4. Mitra, S. K. y R. J. Sherwood, "Digital Ladder Networks," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, **AU-21** (1973), pp. 30-36.

N-1. Neuman, C. P. y C. S. Baradello, "Digital Transfer Functions for Microcomputer Control," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-9** (1979), pp. 856-60.

N-2. Noble, B. y J. Daniel, *Applied Linear Algebra*, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1977.

O-1. Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall. Inc. 1967.

O-2. Ogata, K., *Modern Control Engineering*, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1990.

O-3. Ogata, K., *Systems Dynamics*, 2a. ed., Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1992.

O-4. Ogata, K., *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1994.

O-5. Ogata, K., *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1994.

P-1. Pappas, T., A. J. Laub y N. R. Sandell, Jr., "On the Numerical Solution of the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-25** (1980), pp. 631-41.

P-2. Payne, H. J. y L. M. Silverman, "On the Discrete Time Algebraic Riccati Equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-18** (1973), pp. 226-34.

P-3. Phillips, C. L. y H. T. Nagle, Jr., *Digital Control Systems Analysis and Design*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1984.

R-1. Ragazzini, J. R. y G. F. Franklin, *Sampled-Data Control Systems*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1958.

R-2. Ragazzini, J. R. y L. A. Zadeh, "The Analysis of Sampled-Data Systems," *AIEE Trans. Part II*, **71** (1952), pp. 225-34.

S-1. Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*. Nueva York: Academic Press, Inc., 1976.

T-1. Tou, J. T., *Digital and Sampled-Data Control Systems*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1959.

T-2. Turnbull, H. W. y A. C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*. Londres: Blackie and Son, Ltd., 1932.

V-1. Van Dooren, P., "A Generalized Eigenvalue Approach for Solving Riccati Equations," *SIAM J. Scientific and Statistical Computing*, **2** (1981), pp. 121-35.

W-1. Willems, J. C. y S. K. Mitter, "Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction," *IEEE Trans, Automatic Control*, **AC-16** (1971), pp. 582-95.

W-2. Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*. Nueva York: Springer-Verlag, 1974.

W-3. Wonham, W. M., "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-12** (1967), pp. 660-65.

Z-1. Zadeh, L. A. y C. A. Desoer, *Linear System Theory: The State Space Approach*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1963.

Índice

A

Acción de control PID:
  controlador analógico, 115
Alcanzabilidad, 474-475
Análisis de estabilidad de Liapunov, 321-336
  de sistemas en tiempo continuo, 329-332
  de sistemas en tiempo discreto, 332-334
  primer método de, 321
  segundo método de, 321-322
Análisis de estabilidad:
  de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, 328
  mediante el uso de la transformación bilineal y el criterio de estabilidad de Routh, 191-192
Ángulo:
  de la asíntota, 207-208
  de llegada, 209
  de salida, 209

B

Bloque de Jordan, 383, 651-652

C

c2d, 628
Cancelación de polos y ceros, 211, 469-481
Cero, 39-40
Circuito del muestreador y retenedor, 13-14
  operación en el modo de retención del, 13-14
  operación en el modo de seguimiento del, 13-14
Circuitos de retención de datos, 77
Circuitos de retención de orden superior, 19, 82
Circuitos de retención, 17-18
Codificación, 6, 8
Codificador, 7
Compensación:
  de adelanto de fase, 233
  de atraso de fase, 233
  de atraso-adelanto de fase, 233
Compensador de adelanto de fase, 234, 237
Compensador de adelanto, 262, 272-273
Compensador de atraso de fase, 234
Compensador de atraso, 224, 273-274

Compensador de atraso-adelanto de fase, 233
Conjunto ortogonal, 648
Constante de error estático de posición, 199
Constante de error estático, 198-201
Constante del error estático de aceleración, 198-201
Constante del error estático de velocidad, 199
Contracción, 334-335, 367-368
Control óptimo cuadrático:
de sistemas de seguimiento, 596-609
en estado estacionario, 587-596
Control PID digital:
algoritmo de posición, 116
algoritmo de velocidad, 117
Controlabilidad, 377, 379
de la salida completa, 385-386
de la salida, 387
del estado completo, 380-384, 387, 393, 406
en el plano z, 384
matriz de, 380, 401, 707-708
Controlador analógico, 21
Controlador digital, 20
realización de un, 122
Controlador PD, 234
Controlador PI, 234
Controlador PID digital, 114-118
Controlador PID, 117-118, 121, 233-234
algoritmo de posición, 116
algoritmo de velocidad, 117, 157, 159-160
analógico, 156-159
digital, 156-159
Conversión analógica a digital, 14
Convertidor A/D, 15
de tipo contador, 15
del tipo de aproximaciones sucesivas, 15
Convertidor analógico a digital, 7
Convertidor D/A:
mediante resistores ponderados, 16, 18
mediante un circuito en escalera R-2R, 17-18
Convertidor digital a analógico, 7, 16
Covector, 572
Criterio de estabilidad de Routh:
transformación bilineal acoplada con el, 191-192, 258-259
Criterio de Sylvester:
para definición negativa, 662
para definición positiva, 661-662, 679
para semidefinición negativa, 663
para semidefinición positiva, 662
Cuantificación, 1, 7
error de, 9
nivel de, 8-9
proceso de, 4
ruido de, 9, 11, 126
Cuantificador, 9, 10

D

Decodificación, 6
Decodificador, 7
Definición negativa:
de una función escalar, 661
Definición positiva:
de una función escalar, 660-661
Demultiplexor, 13
Dependencia lineal de vectores, 643
Desigualdad de Schwarz, 645-646
Determinante, 633-635
propiedades de un, 634-635
Diagrama de bloques:
de un sistema de control en tiempo continuo en el espacio de estados, 296
de un sistema de control en tiempo discreto en el espacio de estados, 296
Diagrama de Bode, 232-233
Diferencia hacia adelante, 322
m-ésima, 699
primera, 698-699
segunda, 698
tercera, 698
Diferencia hacia atrás:
m-ésima, 698

primera, 697
segunda, 698
tercera, 698
Diferenciación compleja, 681-682
Diferenciación:
en el plano z, 165
Diofanto, 518
Discretización, 6, 394
de la ecuación en el espacio de estados en tiempo continuo, 314
Diseño:
basado en el enfoque de las ecuaciones polinomiales, 517-540
basado en el método analítico, 242-257
basado en el método de respuesta en frecuencia, 225-242
basado en el método del lugar geométrico de las raíces, 204-225
basado en la ubicación de polos con retroalimentación del estado observado, 421-460
basado en la ubicación de polos, 402-421
Doblamiento, 96
en frecuencia, 96
error de, 97
Dominio de atracción, 325

E

Ecuación de error del observador, 428, 443, 445, 450
Ecuación de estado lineal en tiempo discreto:
solución del caso invariante en el tiempo, 302-309
solución del caso variante en el tiempo, 309-310
Ecuación de estado:
enfoque de la transformada z para la solución de la, para el caso en tiempo discreto, 304-307
equivalente mediante el retenedor de orden cero de la, en tiempo continuo, 315-317
solución de la, para el caso en tiempo continuo, 312
solución de la, para el caso lineal e invariante en tiempo discreto, 302-309
solución de la, para el caso lineal y variante en tiempo discreto, 309-310
Ecuación de Riccati, 573-574
en estado estacionario, 588-589, 600-621
Ecuación Diofantina, 518, 520-521, 523-525, 529, 533, 535, 547, 551, 555, 559
solución a la, 520-521
Ecuación indeterminada, 623
Energía de control mínima, 622
Energía de control, 622
Enfoque de ecuaciones polinomiales:
al diseño de sistemas de control, 525-532
al diseño de sistemas de regulación, 523-525
Entrada delta de Kronecker, 43, 103
Error de actuación en estado estacionario, 198-200
Error de actuación, 200
Error de ganancia de un convertidor A/D, 16-17
Error de linealidad de un convertidor A/D, 16-17
Error de redondeo, 9
Error en estado estacionario, 196-197, 200-201
Errores en convertidores A/D:
error de ganancia, 16-17
error de linealidad, 16-17
error de nivel, 16-17
Espacio de estados, 294
Espectro de frecuencia:
de componentes complementarias, 92
de un filtro paso bajas ideal, 92-93
de una componente primaria, 92
de una señal muestreada, 91-92
Estabilidad absoluta, 193
Estabilidad asintótica uniforme, 365
a lo grande, 364-365

Estabilidad asintótica, 325
a lo grande, 325
Estabilidad BIBO, 326
Estabilidad de entrada-acotada salida-acotada, 326
Estabilidad relativa, 193, 195, 220
Estabilidad uniforme, 324
Estabilidad, 324
teorema de Liapunov sobre, 327
Estado de equilibrio aislado, 324
Estado de equilibrio, 324
Estado, 294
Estimador de estados, 422
Evaluación en el semiplano derecho de la, 86-88
Expansión en series de Laurent, 141, 687, 689

F

Filter, 603-604
Filtro de promediado móvil, 136
Filtro de respuesta al impulso finita, 135-137
Filtro de respuesta al impulso infinita, 135
Filtro digital, 122
programación directa de un, 123-124, 133
programación en escalera de un, 128-135
programación en paralelo de un, 127-128
programación en serie de un, 126-127
programación estándar de un, 124-125, 133-134
realización en paralelo de un, 163-165
realización en serie de un, 163-165
realización mediante un diagrama de bloque de un, 122
Filtro ideal:
características de magnitud de un, 92
respuesta al impulso unitario de un, 93-94
Filtro no recursivo, 136-138
Filtro paso bajas ideal, 92-93
Filtro recursivo, 135, 137
Forma bilineal:
compleja, 660
real, 660
Forma canónica controlable, 297-298, 300, 396, 398, 489
Forma canónica de Jordan, 300, 302, 382, 390, 399-400, 651-652, 657, 659, 674
Forma canónica diagonal, 299-300, 399, 489
Forma canónica observable, 298-300, 398-399, 489
Forma cuadrática, 659-660
compleja, 660
real, 659
Forma hermitiana, 660
Formas canónicas:
controlable, 297-298, 300, 396, 398, 489
de Jordan, 300, 302, 382, 390, 399-400, 651-652, 657, 659, 674
diagonal, 299-300, 399, 489
observable, 298-300, 398-399, 489
Format:
corto, 318
extendido, 318
Fórmula de Ackermann:
para el diseño de observadores de orden mínimo, 450, 454
para el diseño de observadores, 435-438, 440, 445, 496
para la ubicación de polos, 408-412, 466, 493
Franja primaria, 175
Franjas complementarias, 175
Frecuencia de cruce de ganancia, 274
Frecuencia de Nyquist, 96
Función de transferencia de fase no mínima, 233
Función de transferencia pulso senoidal, 227-228
Función de transferencia pulso, 98, 102, 104-118
de controladores digitales, 111-118
de elementos en cascada, 108-110

de un sistema en lazo cerrado, 110-111
matriz de, 310-312
Función delta de Kronecker, 42, 62
Función escalar:
definición negativa de una, 322
definición positiva de una, 322
indefinición de una, 322
semidefinición negativa de una, 322
semidefinición positiva de una, 322
Función rampa unitaria, 26

G

Ganancia derivativa, 116
Ganancia integral, 116
Ganancia proporcional, 116
Generador de la función escalera, 78

I

Impulsos unitarios:
tren de, 75
Indefinidad:
de una función escalar, 661
Independencia lineal de vectores, 643
Índice de desempeño cuadrático, 568
con términos cruzados, 582
Índice de desempeño, 566
incluyendo términos cruzados, 582
valor mínimo del, 575
Inestabilidad escondida, 334
Inestabilidad, 325, 327-328
Integración compleja, 682-683
Integrador digital:
bilineal, 172
con retardo, 171-172
sin retardo, 171
Integral de convolución, 84-85
evaluación en el semiplano derecho de la, 86-88
evaluación en el semiplano izquierdo de la, 84-86
Integral de inversión:
para la transformada z, 689
Invariancia:
de la ecuación característica, 312
propiedad de, 401
Invariante de Kronecker, 708
Inversa de z**I**-**G**:
cálculo de la, 304-309
Inversa mínima por la derecha, 665
Inversa mínima por la izquierda, 666

J

Jacobiano, 641

K

Kalman, R. E., 377

L

Ley asociativa, 638
Ley de control cuadrático en estado estacionario:
enfoque de Liapunov a la, 591-594
Ley de control óptimo:
cuadrático, 568-596
de energía mínima, 622-625
Liapunov:
función de, 322-323, 334, 591
método directo de, 322
primer método de, 321
segundo método de, 321-322
Lugar geométrico de las raíces, 206
Lugares geométricos de atenuación constante, 176-177
Lugares geométricos de frecuencia constante, 176-178
Lugares geométricos de las raíces:
asíntotas del, 207-208
reglas generales para la construcción del, 207-210

Lugares geométricos de relación de amortiguamiento constante, 178-180

M

Mapeo conforme, 180
Mapeo:
del plano *s* al plano *z*, 299
del plano *z* al plano *w*, 299
entre el plano s y el plano *z*, 174-182
Matrices pseudoinversas por la izquierda, 665-666
Matrices similares, 651
Matriz antisimétrica, 633
real, 679
Matriz cuadrada:
valores característicos de una, 649-650
Matriz de transferencia:
pulso, 310-312
Matriz pseudoinversa:
por la derecha, 664-665
por la izquierda, 665-666
Matriz simétrica, 633
real, 679
Matriz:
antiHermitiana, 633
antisimétrica, 633
cancelación de una, 639
de ganancia de retroalimentación del estado, 402-403, 410-414, 427, 492, 494
de ganancia de retroalimentación del observador, 427, 434, 438, 442, 449-450, 496, 499
de Sylvester, 518-520, 524, 535, 540-541, 548, 551, 559
de transición de estados, 303, 305, 309-310
definida negativa, 661
definida positiva, 661
derivada de una, 640
diagonalización de una, 651, 653
diferenciación de una, 640
estable, 365
exponencial, 313
fundamental, 303, 309
hermitiana, 633
indefinida, 661
integral de una, 640
inversa, 635-637
lema de inversión, 573, 636, 668
multiplicación por un escalar, 637
multiplicación por una matriz, 637
nilpotente, 414-416
no singular, 635
norma de una, 647
normal, 633
ortogonal, 633
rango de una, 649
reglas de operaciones con, 637-643
semidefinida negativa, 661
semidefinida positiva, 661
simétrica, 633
similar, 651
singular, 635
traza de una, 658
unitaria, 633-648
valores característicos de una, 649-650
vectores característicos de una, 650
Método de diseño analítico, 242-257
Método de expansión en fracciones parciales, 46-50
Método de la integral de inversión, 50-52, 60-64, 64-66
Método de programación anidada, 338, 343
Método de programación mediante expansión en fracciones parciales, 339-341, 345
Método de respuesta en frecuencia, 225-242
Método del lugar geométrico de las raíces, 205
condición de ángulo en el, 206
condición de magnitud en el, 206
Método directo de la división, 40-42
Método directo de Liapunov, 322
Modo de retención, 13
caída del, 14
Modo de seguimiento, 13

Muestreador con impulsos, 75-77, 83
Muestreador real, 78
Muestreador y retenedor, 6
Muestreo aleatorio, 8
Muestreo con impulsos, 75, 77
Muestreo de orden múltiple, 8
Muestreo de razón múltiple, 8
Muestreo periódico, 8
Muestreo, 6
  frecuencia de, 90
  proceso de, 4
  teorema de, 90-92
Multiplexor analógico, 12
Multiplexor, 12
Multiplicador de Lagrange, 570-572

N

Nivel de cuantificación, 8
Norma Euclidiana, 324
Norma, 645-647
  euclidiana, 324

O

Observabilidad, 377, 388
  completa, 389-390
  en el plano z, 391-394
  matriz de, 389, 394, 401
Observación del estado:
  condición necesaria y suficiente para la, 422-425
  de orden mínimo, 422
  de orden reducido, 422
Observación, 422
Observador corriente, 444
Observador de estados, 422
  de orden completo, 422, 426-444
  de orden mínimo, 446-456
Observador de orden mínino, 446-450, 452-454, 469-470, 502-504
Observador de orden reducido, 446
Observador predictor, 428
  de orden completo, 438
  diseño de, 430-444
Operador retardo unitario, 40
Oscilación escondida, 98, 361

P

Plano w:
  procedimiento de diseño en el, 228-242
Planta, 7
Polinomio característico, 649
Polinomio mínimo, 350-354
Polinomio mónico, 518
Polinomios coprimos, 518, 541
Polo, 39-40
Polos del observador, 428
Poly, 499
Polyvalm, 500
Principio de dualidad, 392-394
Principio de superposición, 3
Problema con valores en frontera de dos puntos, 572
Problema de control óptimo cuadrático:
  discretizado, 580-582
  en estado estacionario, 592-594
  enfoque de Liapunov a la solución de, 592-596
Problema de cuantificación de los coeficientes, 234
Problema de optimización paramétrica, 591
Problema del regulador óptimo cuadrático:
  en estado estacionario, 591-592
  enfoque de Liapunov a la solución de, 591-592
Proceso de adquisición de datos, 12
Proceso de distribución de datos, 12
Proceso, 7
Producto escalar, 643
Producto interno, 643-645, 647
Programación directa, 123
  método de, 336

Programación en escalera, 128-135
Programación en paralelo, 127-128
Programación en serie, 126-127
Programación estándar, 124-126
Programas en MATLAB:
  para control óptimo cuadrático, 579, 590-591, 600-603, 615
  para encontrar la respuesta a un escalón unitario, 119, 196, 240, 268, 421, 458, 530, 605-606
  para encontrar la respuesta a una entrada delta de Kronecker, 45
  para encontrar la respuesta a una rampa unitaria, 120, 260, 459, 531
  para encontrar la transformada z inversa, 44, 63
  para encontrar las series de Fibonacci, 68
  para la ubicación de polos en el plano z, 500-501
Prueba de estabilidad de Jury, 185-190
Prueba de estabilidad de Schur-Cohn, 185
Pseudoinversa por la derecha, 623-624, 664-665
Punto de desprendimiento, 208-209
Punto de ruptura de entrada, 208-209

R
Radio de convergencia absoluta, 25
Raíces características, 650
Rango, 649
Realizabilidad física:
  condición para la, 244-245
Regulador con observador, 502, 505, 543
Representación en el espacio de estados:
  no unicidad de la, 301
Residuo, 50, 84-85, 145, 399, 688, 690-691
  teorema del, 689
Respuesta de oscilaciones muertas (deadbeat), 242, 248, 411, 414-418, 435, 439-442, 444, 453-454, 470-471, 490, 494, 498, 502-505, 508, 550, 712-713, 715, 717-718, 723, 728-729
Respuesta en estado estacionario, 193
Respuesta transitoria, 193
  especificaciones de la, 193-195
Respuesta:
  a perturbaciones, 202
  entre dos instantes de muestreo consecutivos, 320-321
Retención de datos, 6, 77
Retenedor de n-ésimo orden, 77
Retenedor de orden cero, 18-19, 78, 166
  características de magnitud y fase de un, 151-153
  características de respuesta en frecuencia de un, 94-96
  diagrama de Bode de un, 95
  función de transferencia de un, 139
Retenedor de primer orden, 19, 80-82, 139-140
  características de magnitud y fase del, 151-153
  con interpolación, 19-20
  función de transferencia del, 80-82
Retenedor de primer orden con interpolación, 19-20
Retenedor de segundo orden, 19
Retenedor poligonal, 19-20
Retraso de transporte, 280

S
Secuencia de ponderación, 100
Secuencia escalón unitario, 26
Segundo método de Liapunov, 322
Semidefinición negativa:
  de una función escalar, 661
Semidefinición positiva:
  de una función escalar, 662-663
  prueba de, 680
Señal analógica en tiempo continuo, 1-2
Señal analógica, 1-2
Señal cuantificada en tiempo continuo, 1-2
Señal de datos muestreados, 2

Señal digital, 2-3
Señal en tiempo discreto, 2-3, 23
Series de Fibonacci, 67-69
Sistema de adquisición de datos, 11-12
Sistema de control con retroalimentación del estado observado, 428, 434
  con un observador de orden mínimo, 447, 451-452
Sistema de control de datos muestreados, 3
Sistema de control del péndulo invertido, 596
Sistema de control digital, 3, 5
Sistema de control en tiempo discreto, 3
Sistema de control óptimo, 566, 568
Sistema de distribución de datos, 11
Sistema de regulación óptima, 566
Sistema de seguimiento tipo 1, 597
Sistema de seguimiento, 460
  con retroalimentación del estado observado, 645
  con retroalimentación del estado y control integral, 460-461
  con retroalimentación del estado, 464
  control óptimo cuadrático de un, 596-609
Sistema del doble integrador, 361-362, 439, 490, 513
Sistema del péndulo invertido, 597, 625-628
Sistema lineal e invariante en el tiempo, 3
Sistema lineal en tiempo discreto variante en el tiempo, 309-310
Sistema lineal, 3
Sistema tipo 0, 197-198
Sistema tipo 1, 197-198
Sistema tipo 2, 197-198
Sistema, 324
Sistemas de control mediante el acoplamiento a un modelo, 532-534, 536-537, 561
Sobrepaso máximo, 195
Solución de norma mínima, 624
  que minimiza $\|Ax - b\|$, 665
  que minimiza $\|x\|$, 663-665
ss2tf, 603-604
Sujetador, 78
Sumatoria de convolución, 98, 100
Sylvester J. J., 661

T

Tabla de estabilidad de Jury, 185, 187-188
Técnica de asignación de polos, 402
Teorema de Cauchy-Goursat, 688-689
Teorema de Cayley-Hamilton, 350, 380, 404, 408, 481, 485, 492
Teorema de convolución compleja, 684
Teorema de convolución real, 684
Teorema de convolución:
  compleja, 684
  real, 684
Teorema de corrimiento, 31
Teorema de diferenciación parcial, 683
Teorema de muestreo de Shannon, 150-151
Teorema de Parseval, 686
Teorema de traslación compleja, 34
Teorema de traslación real, 31
Teorema del valor final, 36
Teorema del valor inicial, 35
Teorema principal de estabilidad de Liapunov, 326, 363-365
Teoremas de Liapunov:
  sobre estabilidad asintótica, 326-327
  sobre estabilidad, 327
  sobre inestabilidad, 327-328
Tiempo de apertura, 14
Tiempo de establecimiento, 195
Tiempo de levantamiento, 195
Tiempo de retardo, 194-195
Tiempo derivativo, 115
Tiempo integral, 115
Tiempo pico, 195
Transductor analógico, 7
Transductor de datos muestreados, 7
Transductor digital, 7
Transductor, 7
Transformación bilineal, 191, 228, 231
Transformación de Riccati, 572-573

Transformación de similitud, 301, 311-312, 651-653, 657
bajo propiedades invariantes, 659
Transformación ortogonal, 645
Transformación unitaria, 645
Transformación w, 228-229, 231
Transformación z inversa, 37
Transformada de Laplace de una función asterisco, 103-104
Transformada z inversa, 37, 687
enfoque mediante ecuaciones en diferencias para la obtención de la, 46
enfoque mediante MATLAB para la obtención de la, 42-45
método de cálculo para la obtención de la, 42-46
método de división directa para la obtención de la, 40-42, 62
método de expansión en fracciones parciales para la obtención de la, 46-50, 64
método de la integral de inversión para la obtención de la, 50-52, 60-62, 64-66
Transformada z modificada, 691-696
Transformada z, 24
bilateral, 25
de la primera diferencia hacia adelante, 698-699
de la primera diferencia hacia atrás, 697-698
de la segunda diferencia hacia adelante, 698-699
de la segunda diferencia hacia atrás, 698
de una función coseno, 28
de una función escalón unitario, 25, 33
de una función exponencial, 27
de una función polinomial, 27
de una función que involucra el término $(1 - e^{-Ts})/s$, 88-90
de una función rampa unitaria, 26
de una función senoidal, 27
definición de la, 24
integral de inversión para la, 689
inversa, 37
linealidad de la, 31
método de la integral de convolución para la obtención de la, 83
propiedades de la, 38
propiedades importantes de la, 31
tabla de, 29-30
teorema de corrimiento para la, 31
teorema de traslación compleja de la, 34
teorema de traslación real para la, 31
teorema del valor final de la, 36
teorema del valor inicial de la, 35
unilateral, 24-25
Traslape, 98
Traza, 307, 658

U

Ubicación de polos, 408
condiciones necesarias y suficientes para la, 402-408
diseño cuando la señal de control es un vector, 704-718
diseño por, 402-421, 707, 718

V

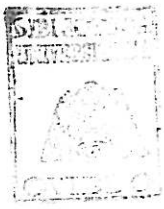
Valor característico, 649-650, 678
Variables de estado, 294
Vector adjunto, 572
Vector característico generalizado, 494, 496, 498, 654, 656, 674
Vector característico, 650, 674
generalizado, 654, 656
normalizado, 650
Vector de control óptimo, 567
forma en lazo cerrado del, 574
forma realimentada del, 574
Vector de estados, 294

Vector:
norma de un, 645
normalizado, 644
unitario, 648

Vectores:
dependencia lineal de, 643
independencia lineal de, 643
ortonormales, 648

ABR

PROGRAMAS EDUCATIVOS S. A. DE C. V.
CALZ. CHABACANO NO. 65,
COL. ASTURIAS, DEL CUAUHTEMOC,
C.P. 06850, MÉXICO, D. F.

EMPRESA CERTIFICADA POR EL
INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACION
Y CERTIFICACIÓN A. C. BAJO LAS NORMAS
ISO-9002:1994/NMX-CC-004: 1995
CON EL No. DE REGISTRO RSC-048
E ISO-14001:1996/NMX-SAA-001:1998 IMNC/
CON EL No. DE REGISTRO RSAA-003

2001